DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.

AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.



LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

AMPLISSIMO VIRO

ANTONIO FABRO

IVRISPERITORVM ET SABAVDI SENATVS PRINCIPI CLARISSIMO.

CLAVDIVS GASPARD BACHETVS S. P. D.

QVOD olim Themistocli accidit (vir Amplissime) vt ex præclaro illo Miltiadis ad Marathonem facinore, immanem gloriæ cupiditatem hauriret, & honesta æmulatione famæ illius accenderetur, id mihi iam contigisse, dissimulare non possum. Etenim cùm oculis meis ingens gloriæ tuæ splendor obuersaretur, & laudum tuarum præconia auribus meis vndique insonarent, tanto iam ab ineunte adolescentia æmulationis studio inflammatus sum, vt dies noctesque vna hæc animum meum morderet cogitatio, quanam potissimum ratione, aliquam & ipse mihi famam conciliare, & ignobili olim patriæ nostræ, quæ iam clarissimi nominis tui fulgore cœpit illustrari, nonnihil etiam claritatis afferre possem. Acuebant infixos hosce menti meæ stimulos crebræ adhortationes tuæ, quibus me ad insistendum paternis auitisque vestigiis frequenter incitare conatus es, quamuis amantissimæ illæ tuæ admonitiones eò præsertim tenderent, vt iurisprudentiæ totus incumberem, vtpote quæ & ad rem familiarem honestè augendam, & ad honores amplissimos consequendos via esset omnium compendiosissima. Sed, vt quod verum est ingenuè fatear, præterquàm quod huic disciplinæ non valdè propensum animum à natura sortitus sum, tu ipse ne tuis parerem adhortationibus, potissimum in causa fuisti, qui quantum verbis incende-

bas, tantùm ſanè factis operibuſque deterrebas; cùm enim incomparabilem in hac ſcientia peritiam conſequutus, non recentiores modò, ſed & antiquiores omnes iuriſconſultos adeo ſuperaueris, vt & ipſe Papinianus, ſi denuo inter mortales rediuiuus ageret, palmam tibi cedere cogeretur, nullam eſſe ſolidæ gloriæ partem relictam ei qui tecum in hoc decertaret ſtadio, facilè mihi perſuaſi. Itaque aliò mihi fuit intendendus animus, vt voti compos fierem. Dumque ea mente diſciplinas omnes reliquas perluſtro, mathematicis penitus adhærendum mihi eſſe ſtatui, tum quod earum certitudo indubitatis vndique fulta demonſtrationibus, animos veritatis cognoſcendæ cupidos, mirificè oblectat & rapit, tum quod in iis pertractandis præcipuè ingenij ſubtilitas & acumen elucet. Quid in his conſequutus, & quam ſuprà vulgares mathematicos famam à poſteris promeritus ſim, indicet Diophantus, cauſam integram eorum iudicio permitto, qui in Logiſtica plus quàm mediocriter verſati, optimum præclariſſimumque ſcientiæ huius parentem, ſemilacerum & ob inextricabiles ferè difficultates pro derelicto habitum, hactenus iacuiſſe queruntur. Cæterùm vt haſce meas qualeſcunque lucubrationes nomini tuo potiſſimum conſecrarem, teque mihi velut patronum in iis euulgandis adſciſcerem, permultis validiſſimiſque adductus ſum rationibus. Nam vt taceam concordiſſimam quæ inter maiores noſtros ſemper interceſſit amicitiam, à te præcipuè, & à patre meo Ioanne Bacheto ſanctè religioſeque excultam. Vt omittam me tibi aliquo affinitatis vinculo eſſe coniunctum, cùm frater tuus ſororem meam duxerit, & ex ea liberos procrearit, quorũ tu patruus, ego vocor auunculus. Vt diſſimulem quàm ſincerus ac penè fraternus amor filio tuo Claudio Fabro Vaugelazio, iam inde à primoribus annis, me penitus addixerit. Hæc, inquam, omnia vt prætermittam, quæ me tibi arctiſſimè deuinciunt, eximia tua virtus, pietas, & ſingularis eruditio, quarum fama iam totum orbem longè lateque peragrauit, animum meum in amorem tui & admirationem rapuerunt, & vt in te potiſſimum oculos conuerterem effecerunt. Adde quod conciuis tuus ſuum, ex eadem vrbe, foro videlicet Sebuſianorum (quod hodie Burgum in Breſſia vulgò nuncupant) oriundus, vt mihi non difficulter perſuaſerim exiſtimationem meam tibi tuto commendari poſſe, & quæ tua eſt benignitas, meos hoſce in communi patria illuſtranda conatus tibi ſummopere gratos futuros eſſe ſperauerim. Tuum eſt præſtare ne ſperatis excidã, ſi lata fronte iſtud propenſi in te ſtudij mei pignus excipias, mihique inter tui amantiſſimos, tibique deuinctiſſimos non vltimum locum tribuas. Vale. Datum Lutetiæ Pariſiorum Kalendis Septembris. Anno ſalutis M. DC. XX.

LECTORI BENEVOLO.

ANTEQVAM Diophanti explicationem aggrediar, pauca de authore ipso præfati, & quid potissimum huic editioni contulerim monere, operæpretium esse duxi.

Diophantum nostrum patria Alexandrinum fuisse, singulis eius libris præfixi tituli satis indicant, ætatem autem qua vixit, definite non ita facile est. Summorum sanè virorum, qui ante nos de Logistica scripsere, fuit opinio, cui indubitanter adhæreo, Diophantum hunc esse, de quo fit mentio apud Suidam in voce Ὑπατία. Qui postquàm retulit Alexandrinam istam Philosopham omni scientiarum & disciplinarũ genere vsque ad miraculum excultam, in mathematicis præsertim adeo excelluisse, vt patrem Theonem, celebrem illum Geometram, longo interuallo superaret, hęc illius opera mathematica recenset, ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διόφαντον, τὸν ἀστρονομικὸν κανόνα, εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. *Scripsit*, inquit, *Commentarium in Diophantum, Astronomicum Canonem, in Conica Apollonij Commentarium*. Vbi monendus es imprimis, in editis Suidę libris malè haberi, εἰς Διοφάντην, vt ex duobus probarissimis codicibus manu exaratis qui extant in Bibliotheca Regia, depræhendi, qui veram exhibent lectionem εἰς Διόφαντον. Verè enim Diophantus appellatus est author, non Diophantes, vt quidam ex corrupto illo Suidæ loco malè arbitrati sunt. Quod ne quis amplius in dubium reuocare debeat, prætet optimorum codicum authoritatẽ, facit ipse Suidas in propria voce, cùm ait. Διόφαντος, ὄνομα κύριον. Quin immò in antiquorum scriptorum monumentis, nullum omnino Diophantem, multos verò Diophantos reperiri contendo. Etenim Diodorus Siculus l. 14. Diophantũ memorat Prætorem Athenis creatum anno 2. Olympiadis 96. cuius & meminit Zenobius Centuria 3. Prouerbio 27. & ipse Suidas in voce Δεξιμὸ χαλαζῶσαι Diophantum scribam Herodis Regis, qui manus cuiusuis literas imitabatur, & deprehensus regis characterem effingens, morte multatus est, recenset Tetzes historia 43. Chiliadis 6. Diophantus denique rhetor, vt alios quamplurimos prætermittam, temporibus Iuliani Apostatæ fuit, Libanij magister, vt constat ex Suida in Libanio. Hactenus autem mihi non contigit in Diophantem aliquem incidisse, vt non immeritò vocem Διοφάντης ne quidem Græcam esse suspicer. Hæc dixisse sufficiat, vt authoris nostri nomen immortali memoria dignum, à temporis iniuria, & ab inculta barbarie vindicemus. Cæterùm de Diophanto nostro loqui Suidam loco citato, & in hos ipsos Arithmeticorum libros Hypatiam scripsisse Commentaria, quamuis non omnino certum est, valdè tamen probabile apparet. Nam Hypatiam cuius ingenium, & doctrina mirabilis à multis scriptoribus tantopere celebratur, in aliquem de plebe mathematicum, & vulgaria, omnibusque passim

obuia pertractantem, Commentarium edidiſſe, nemo ſanus arbitrabitur. Quem autem quæſo Diophanto noſtro ſublimiorem, & in quo enodando plus ſubtilitatis, plus ineſſet difficultatis deligere potuiſſet? Adde quod veriſimile eſt Hypatiam, vt ſe mathematicarum peritiſſimam oſtenderet, tres præcipuas mathematicæ partes ſcriptis ſuis comprehendiſſe, Aſtronomiam videlicet, Geometriam, & Arithmeticam. Ideo Canonem Aſtronomicum elaborauit; ideo Apollonij Conica, arduum opus, quoque in Geometricis nihil ſublimius, & cuius intuitu ipſe Apollonius, magnus Geometra eſt appellatus, commentariis illuſtrauit: idcirco denique hoſce Diophanti Arithmeticorũ libros, qui adeo admiranda & abſtruſa problemata continent, vt humani captum ingenij ſuperare videantur, explicandos ſuſcepit. Quod ſi tot coniecturis fides habenda eſt, certò colligere poſſumus ante mille & trecentos annos ſaltem, vixiſſe Diophantum. Etenim ipſa Hypatia authoribus Suida, Synesio, Socrate, & Nicephoro, floruit temporibus Arcadij & Honorij, circiter annum quadringenteſimum à Chriſti Natiuitate, ſeu annis ab hinc mille ducentis. Quamobrem vt vno tantùm ſæculo Diophantum ſuperiorem fuiſſe fateamur (non enim moris eſt, vt in recentiſſimos & ferè coæuos authores Commentarij conſcribantur) ſupputationis noſtræ ratio manifeſta eſt. Quanto verò temporis ſpatio præcisè, Hypatiam præceſſerit Diophantus, quomodo ſciri poſſit non video, cùm & antiquorum ſcriptorum monumentis deſtituamur, & ex ipſius Diophanti libris qui extant, id certò deprehendi nequeat. Equidem libro de numeris multangulis citatur Hypſicles, cui & numerorum multangulorum definitio tribuitur, vt hinc facilè ſit inferre Diophantum Hypſicle aliquot fortè ſæculis poſteriorem fuiſſe. Sed quiſnam iſte Hypſicles, & qua vixerit ætate nobis diuinandum relinquitur. Vnum duntaxat, qui hoc nomine appelletur, mathematicum reperi, cuius & duo ad Euclidis elementa libri adiecti circumferuntur, decimus quartus videlicet & decimus quintus, qui & ipſe Alexandrinus fuit, vt eum à Diophanto laudari non immeritò ſuſpicemur. Quantum autem conijcere licet ex ipſius præfatione ad Protarchum libro decimo quarto elementorum præfixa, floruit Hypſicles non multò poſt Apollonium, quandoquidem in Apollonij librum imperfectum primùm, tum in eundem ab authore ipſo accuratius elaboratum ſe incidiſſe refert, vnde Hypſiclem Apollonio ferè coæuum fuiſſe probabili argumento concluditur. Atqui vixit Apollonius temporibus Ptolemæi Euergetæ regis Ægypti, vt narrat Eutocius in librum primum Conicorum, ſeu ducentis annis, & amplius ante Chriſti Natiuitatem. Quamobrem vt Hypſiclem vna aut altera ætate Apollonio poſteriorem fuiſſe concedamus, floruit tamen annis ab hinc ferè mille & octingentis, interque ipſum & Hypatiam annos ſexcentos circiter interceſſiſſe oportuit, quo ſanè in ſpatio collocandum eſſe Diophantum, nemo, vt opinor, ſanæ mentis inficiabitur. Dubitari poteſt an de authore noſtro, accipiendum ſit Epigramma Lucilij in Diophantum Aſtrologum, quod extat libro ſecundo Anthologiæ

capite 22. & ideo illud adſcribere non pigebit cum verſione noſtra Latina.

> Ἑρμογένην τὸν ἰατρὸν ὁ ἀστρολόγος Διόφαντος
> Εἶπε μόνους ζωῆς ἐννέα μῆνας ἔχειν.
> Κἀκεῖνος γελάσας. Τί μὲν ὁ χρόνος ἐννέα μηνῶν
> Φησὶ, λέγει, σὺ νόει. τ' ἀμὰ δ' σκόπημ' σοι.
> Εἶπε, καὶ ἐκτείνας μόνον ἥψατο, καὶ Διόφαντος
> Ἄλλον ἀπελπίζων, αὐτὸς ἀπεσκάρισεν.
>
> *Hermogenem medicam monet Aſtrologus Diophantus;*
> *Vix illum menſes viuere poſſe nouem.*
> *Qui ridens, vide, ait, quid nobis aſtra minentur,*
> *Imminet at moneo mors inopina tibi.*
> *Dixit, & extendens dextram admouet, & Diophantus*
> *Deſperare alium dum iubet, ipſe perit.*

Ludit non inuenuſtus poëta tum in Diophantum Aſtrologum, tum in medicum Hermogenem, quem & alibi ſæpæ falsè admodum perſtringit, quòd ſolo attactu non ægros modò, ſed & benè valentes, velut peſtifero ſidere afflatos repentè necaret. Itaque niſi Diophantum noſtrum Aſtrologiæ peritum fuiſſe negemus, nil prohibet, quo minus eum ætate Lucillij extitiſſe dicamus. Fuit autem Lucillius, quantum coniecturis aſſequi poſſumus, circa Neronis tempora, in quæ incidiſſe Diophantum ſatis probabile eſt, cui ſententiæ ſi libet adſentiri, concludemus inter Hypſiclem & Hypatiam ita eſſe collocandum Diophantum, vt æquali temporis interuallo ferè, ab vtroque remotum fuiſſe fateamur, tantoque recentiorem Hypſicle, quanto antiquiorem Hypatia. Hæc ſunt quæ de authore noſtro coniicere licuit, de quo ſi quis certiora proferre ſtuduerit, maximas ei gratias habiturum me eſſe profiteor. Nam quod ait Raphaël Bombellius in præfatione ad ſuam Algebram, fuiſſe Diophãtum ſub Antonino Pio, cùm id ſine authore dicat, exiguam fidem, ne dicam nullam, promeretur. Sicut omnino falſum eſt, quod aſſerit à Diophanto authores Indicos plerunque citari. Nam de ſcriptoribus Indicis ne verbum quidem apud Diophantum. Sed proculdubio inſulſas & putidas Græci ſcholiaſtæ adnotationes, pro ipſo Diophanti contextu accepit Bombellius, ſiquidē Scholiaſtes ille de Indica multiplicandi ratione, quæ inuerſum Græcanici moris ordinem ſequitur, mentionem facit, in definitionem nonam. Porrò ſiue noſtram, ſiue Bombellij, de tempore quo floruit Diophantus, ſententiam amplecti libeat, euidens eſt, nullum qui de Logiſtica ſcripſerit, authore noſtro antiquiorem, nobis hactenus innotuiſſe: ac proinde hallucinatos omnes quotquot Mahumetem quendam Arabem Moſis filium, ſcientiæ huius authorem primum prædicauere. Quemadmodum enim non inficior, hanc, & reliquas diſciplinas, à Græcis per Arabas ad nos eſſe tranſmiſſas, atque etiam ab ipſis Logiſticam, Algebræ nomen eſſe conſecutam: ſic longo temporis ſpatio antequàm Arabes aliquo eruditionis nomine celebres facti eſſent, ſcripſiſſe Diophantum, nemo, niſi præfricta fronte, ne-

gare potest. His de ipso Diophanto præmissis, iam de illius scriptis agendum est. Enimuerò constat ex ipsius authoris verbis, tredecim eum Arithmeticorum libros concinnasse, quorum sex duntaxat reperiuntur, vnusque insuper de numeris multangulis, & ipse imperfectus. Ioannes tamen Regiomontanus, tredecim Diophanti libros se alicubi vidisse asseuerat, & Illustrissimus Cardinalis Perronius, quem nuper extinctum magno Christianæ & literariæ Reipublicæ detrimento, conquerimur, mihi sæpè testatus est, se codicem manuscriptum habuisse, qui tredecim Diophanti libros integros contineret, quem cùm Guilielmo Gosselino conciui suo, qui in Diophantum Commentaria meditabatur, perhumaniter more suo exhibuisset, paulò pòst accidit, vt Gosselinus peste correptus interiret, & Diophanti codex eodem fato nobis eriperetur. Cùm enim precibus meis motus Cardinalis amplissimus, nullisque sumptibus parcens, apud hæredes Gosselini codicem illum diligenter exquiri mandasset, & quouis pretio redimi, nusquam repertus est. Quid ergo de tredecim Diophanti libris iudicem, extentne videlicet alicubi, lateantque, an non, proferre nequeo. Sanè vt in eos inciderem votis omnibus semper experere, nunquam autem voti compotem fieri mihi licuit. Etenim neque codex Regius, cuius ope hanc editionem adornaumius; neque is quem præ manibus habuit Xilander; neque Palatinus, vt doctissimo viro Claudio Salmasio referente accepimus; neque Vaticanus, quem vir summus Iacobus Sirmondus mihi ex parte transcribendum curauit, quicquam amplius continent, quàm sex hosce Arithmeticorum libros, & tractatum de numeris multangulis imperfectum. Sed & tam infeliciter hi omnes codices inter se consentiunt, vt ab vno fonte manasse, & ab eodem exemplari descriptos fuisse non dubitem. Itaque parum auxilij ab his subministratum nobis esse, verissimè affirmare possum. Quid autem à variis scriptoribus qui ante nos Diophantum attigerunt, adiumenti nobis accesserit, non dissimulabo. Primus Guilielmus Xilander Augustanus, vir omnibus disciplinis excultus, Diophantum Latinum edidit, cum Græci Scholiastæ (quem Maximum Planudem esse coniicit) in duos priores libros adnotationibus; suisque in totum authorem Commentariis, quamuis bonam libri quinti partem, & sextum integrum, tractatumque de numeris multangulis vix delibauerit, idque non adeò felici successu, sed & in aliis, pleraque sibi non penitus perspecta fuisse, ipse ingenuè fateatur. An verò & Græcè à Xilandro editus sit Diophantus, nondum certò comperire potui. Videtur sanè in multis suorum Commentariorum locis, de Græco Diophanto tanquam à se edito, vel mox edendo, verba facere. Sed hanc editionem, neque mihi vidisse, neque aliquem qui viderit hactenus audiuisse contigit. Vt tamen extet, eam valde imperfectam, & mendis innumeris scatentem, ac proinde nostra longè deteriorem esse, mihi satis perspectum est, cùm eam passim Xilander è Latina sua versione à lectore iubeat emendari, & ipsa Latina interpretatio, plus quàm sexcentis locis à nobis castigari meruerit. Quicquid tamen Xilander peccauerit,

dignus profectò eſt, qui à poſteris pro tam generoſo conatu commendetur, & cui à nobis maximæ referantur gratiæ, quòd eius opera præſtantiſſimus author nobis innotuit; & aperta via eſt ad eum explicandum. Non longo poſt Xilandrum interuallo Raphaël Bombellius Bononienſis, Græcum è Vaticana Bibliotheca Diophanti codicem nactus, omnes priorum quatuor librorum quæſtiones, & è libro quinto nonnullas, problematibus ſuis inſeruit, in Algebra ſua quam Italico ſermone conſcripſit. Sed ſuas Diophantæis quæſtionibus ita immiſcuit, vt has ab illis diſtinguere non ſit in promptu, neque verò ſe fidum ſatis interpretem præbuit, cùm paſſim verba Diophanti immutet, hiſque pleraque addat, pleraque pro arbitrio detrahat. In multis nihilominus interpretationem Bombellij, Xilandriana præſtare, & ad hanc emendandam me adiuuiſſe ingenuè fateor. Denique nouiſſimè omnium Franciſcus Vieta Fontenæenſis, recentiorum mathematicorum facilè princeps, &

Quo ſe præcipuè mea Gallia iactat alumno.

tum præclariſſimis aliis operibus Logiſticam illuſtrauit; tum ſubtiliſſimos illos zeteticorum libros è Diophanti ſelectis quæſtionibus cõcinnauit. Multas tamen libri quinti non attigit, & vix vnam aut alteram è libro ſexto deprompſit. Cùm autem de Diophanto perfectè reſtituendo, vt opinor, vir ſummus deſperaret, relicta plerumque Diophanti operatione, problemata ſua peculiari ſibi methodo explicauit. Sed neque ipſe, neque Bombellius, ardua poriſmata, & abſtruſa numerorum Theoremata, quæ paſſim aſſumit Diophantus, demonſtrando proſequuti ſunt, nec verò quàm ſubtili artificio ſuas poſitiones inſtituat Diophantus, aut operationum illius cauſas omnes, & varia ſymptomata nobis aperuerunt. Itaque ex iis quæ in tribus hiſce authoribus celeberrimis deſiderari manifeſtum eſt, vt abſolutam Diophantæorum omnium problematum enodationem habeamus, quid Diophanto contulerim colligi poteſt. Primùm enim Græcum Diophanti contextum à mendis innumeris repurgatum exhibeo, in quo quantopere deſudauerim, vix eſt vt aliquis cogitando aſſequi poſſit. Sanè liberè pronuncio in nullam ferè incidiſſe me quæſtionem, in qua non aliquid mutandum, addendum, detrahendumve fuerit. Religioſus tamen vſque adeò fui, vt quæcunque adieci, virgulis huiuſmodi [ ] incluſerim, ne pro Diophanti verbis, mea temerè obtrudere voluiſſe viderer. Quæ autem detraxi, cùm non adeò multa ſint, de iis ſemper lectorem admonui. Quemadmodum & ea quæ paulò liberius immutare coactus ſum, in meis Commentariis adnotaui. Quæcunque autem leui aliqua mutatione indubitanter corrigenda fuere, ea audacter ne quidem præmonito lectore caſtigaui. Etenim ſi quoties è vocis vnius praua inflexione obortum mendum ſuſtulerim, aut quoties deprauatos numeros, & paſſim deficientes in fractionibus, nunc numeratores, nunc denominatores reſtituerim ſubnotare collibuiſſet, in immenſam proculdubio molem Commentaria noſtra excreuiſſent. Ego verò neque is ſum, qui è re leui gloriam aucu-

pari velim, nec cui de aliquot verborum caſtigatione inanem captare auram fuerit opus, cùm res ipſæ ampliſſimam laudis minimè vulgaris adipiſcendæ materiam mihi ſubminiſtrarent. Pauciſſima quidem loca, in quibus inſignis eſt deprauatio, intacta reliqui, cùm præfrictam habere frontem oporteat eum, qui pro integris periodis quæ nil ſani continent, alias ſubſtituere non vereatur. Non eſt tamen cur iacturam verborum aliquot Diophanti, valdè iniquo feramus animo, cùm nihilominus partim ex noſtra verſione, partim ex Commentariis noſtris, conſtet nobis de perfecta Diophantæarum omnium quæſtionum ſolutione. Porrò Græci Scholiaſtæ in duos priores libros adnotationes, edi non curauimus, vt quæ nullius ſint momenti, eaſque proinde Guilielmus Xilander cenſura ſua meritò perſtrinxerit, ſi cui tamen oleum operamque perdere adeò leue eſt, vt miras Græculi huius ineptias peruidere cupiat, adeat Xilandrum. Deinde Latinum damus tibi Diophantum ex Xilandri verſione accuratiſſimè caſtigata, in qua duo potiſſimum nos præſtitiſſe ſcias velim, nam & deprauata correximus, hianteſque paſſim lacunas repleuimus: & quæ ſubobſcurè, vel ambiguè fuerat interpretatus Xilander, dilucidius expoſuimus; fateor tamen, inde tantam inductam eſſe mutationem, vt propemodum æquius ſit verſionem iſtam nobis quàm Xilandro tribuere. Si quis autem potius ad eum pertinere contendat, quòd eius verba, quatenus Diophanto fraudi non erant, mordicus retinuimus, per me licet. Præterea, cùm videremus poriſmata non vulgaria paſſim à Diophanto vſurpari, quæ velut ex opere alio citat, quod vel ipſe, vel antiquior alius mathematicus conſcripſerat, ea in vnum colligere conati, tres poriſmatum libros confecimus, quibus non illa ſolùm quæ aſſumit Diophantus, ſed & alia pleraque Theoremata, quorum nobis ſæpius, in noſtris Commentariis, vtendum erat, complexi ſumus, nihil penitus, præter ea quæ ab Euclide in Elementis demonſtrata ſunt, ſupponentes. Ad hæc probi Commentatoris partes omnes, niſi fallor, proſequutus, operationum Diophanti cauſas latentiores, & ſymptomata omnia vt aperirem, potiſſimum contendi, firmiſſimas vbique adhibens demonſtrationes. Quod ſi quid perfectè aſſequi non potui, ſanè non diſſimulaui, & quàm libenter ab aliis, quicquid ignoro, accepturus ſim, ingenuè ſum profeſſus. Denique abundantioris doctrinæ gratia multas nec ineleganres quæſtiones adieci, quarum plurimas nemo ante nos aut propoſuit, aut explicauit, quaſque Diophantæis lucem, vel ornatum aliquem afferre, vt ſpero, non inficiaberis. Hæc ſunt (ſtudioſe lector) quæ te præmonitum volui, vt inſtituti mei ratio apud te omni ex parte conſtaret. Cæterùm te rogo atque obteſtor, quandoquidem tui gratia immenſum laborem ſuſtinui, vt ſi quid à me peccatum eſt, veniam amanter indulgeas, vix enim ipſe mihi perſuadeo, in tam longo difficilique opere, non aliquid mihi humanitus accidiſſe, præſertim cùm ingentes numeros, & moleſtiſſimas fractiones exhibere oportuit. Qua in re vt ne quis vnquam decipiatur, nec aliquo ſaltem calculi errore labatur, non patitur humana fragilitas. Sed

hæc leuia sunt errata, nec viris doctis imputanda, dum eos optimo vti constet logismo. Adde quòd operarum negligentia non raro contingunt, & vt quis in castigandis iis quæ excuduntur sit accuratissimus, multa tamen eum subterfugere menda necesse est. Porrò meos hosce conatus tibi non ingratos fuisse si resciuero, breui Elementorum Arithmeticorum libros non inutiles, necnon & Tractatum copiosissimum de Geometricis quæstionibus quæ per Algebram explicantur, te expectare iubeo.

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI.

IN DIOPHANTVM PORISMATVM, LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO PRIMA.

SI duobus æqualibus numeris inæquales duo adiiciantur, erit compoſitorum minor ratio quàm adiectorum.

A ..... B ... E
C ..... D .. F

Sint æquales numeri A B C D quibus addantur inæquales B E maior, & D F minor. Dico minorem eſſe rationem A E ad C F quàm B E ad D F. Quoniã enim A B & C D ſunt æquales [a], minor erit ratio ipſius A B ad maiorem B E, quàm ipſius C D ad minorem D F: igitur & componendo [b], minor eſt ratio A E ad B E quàm C F ad D F. Quare & viciſſim [c] minor eſt ratio A F ad C F quàm B E ad D F. Quod demonſtrandum erat.

[a] octaua, quinti.
[b] vigeſima octaua, quinti.
[c] vigeſima ſeptima, quinti.

PROP. II.

Si fuerint quotlibet numeri continuè proportionales, planus ſub extremis æquatur plano ſub duobus quibuſlibet ab extremis æqualiter diſtantibus, atque etiam quadrato medij, ſi multitudo numerorum fuerit impar.

A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. F 64.

Sint quotlibet numeri A B C D E F continuè proportionales & numero pari, dico primo planum ſub A F. æqualem eſſe tum plano ſub B E, tum plano ſub C D. Quia enim eſt A ad B vt E ad F ex hypotheſi, [a] fiet idem numerus ex primo A in quartum F qui fit ex ſecundo B in tertium E. Similiter quia eſt B ad C vt D ad E [b] fiet idem numerus ex primo B in quartum E qui fit ex ſecundo C in tertium D ſeu idem qui fit ex A in F. Igitur plani ſub A F ſub B E ſub C D ſunt æquales. Quod erat propoſitũ.

Deinde conſiderentur tantum numeri A B C D E multitudine impari. Dico planum ſub A E æquari tum plano ſub B D. tum quadrato ipſius C. Nam vt prius quia eſt A ad B vt D ad E. [c] planus ſub A E æquatur plano ſub B D. ſed quia eſt vt B ad C, ita C ad D. [d] planus ſub B D. æquatur quadrato ipſius C. Igitur planus ſub A E planus ſub B D. & quadratus ipſius C æquales ſunt inter ſe. Quod demonſtrandum erat.

[a] decima nona, 7.
[b] decima nona, 7.
[c] decima nona, 7.
[d] vigeſima, 7.

PROP. III.

Si tres, pluresve numeri inter ſe multiplicentur, idem ſemper procreabitur numerus, quomodocunque & quouis ordine ſeruato fiat multiplicatio.

Quod oſtendit Euclides de duobus numeris inter ſe multiplicatis decimaſexta 7. id in vniuerſum de tribus pluribuſve hîc oſtendetur. Tres autem, pluresve numeri inter ſe multiplicari dicuntur, cùm vnus ex illis ducitur in alium, tum productus in alium, & rurſus productus in alium, & ita deinceps, donec omnes multiplicati ſint.

A 2. B 3. C 4.
D 6. H 8. F 12.
E 24. K 24. G 24.

Sint ergo tres numeri A B C. ductoque A in B fiat D. quo ducto in C fiat E. Rurſus ordine mutato, ducatur B in C & fiat F, quo ducto in A fiat G. Denique mutato rurſus ordine ducatur A in C & fiat H, quo ducto in B. fiat K. (tot enim

modis ordo variari poteſt.) Dico tria producta E K G inter ſe eſſe æqualia. Quia enim B ductus in vtroſque A C. producit ipſos D F. [a] erit A ad C vt D ad F. [b] Igitur productus ex A F nempe G. æquatur producto ex C in D nempe ipſi E. Similiter quia idem C ductus in vtrumque A & B producit ipſos H F. erit A ad B vt H ad F. Igitur qui fit ex A in F nempe G. æquatur ei qui fit ex B in H nempe ipſi K. Quamobrem conſtat tres E K G. æquales eſſe inter ſe. Quod erat propoſitum.

[a] decima ſeptima 7. [b] decima nona, 7.

E 24. F 60.
A 2. B 3. C 4. D 5.
G 12.
K 120. H 120.

Deinde ſint quatuor numeri A B C D. & tribus A B C inter ſe ductis fiat E quo ducto in reliquum D fiat K. Tum mutato ordine, & tribus B C D inter ſe ductis fiat F. quo ducto in reliquum A fiat H. Dico ipſos K & H æquales eſſe inter ſe, & ſemper eundem produci numerum quomodocumque aliter ordine mutato iidem A B C D inter ſe multiplicentur. Quia enim ſumendo ternos A B C. tum ternos B C D. duo B C vtrique ſumptioni communes ſunt, productus ex B in C eſto G. patet ergo ex demonſtratis in tribus numeris ex G in A produci E, & ex G in D produci F. Quare [c] vt E ad F ſic eſt A ad D. [d] Igitur qui fit ex E in D, nempe H; æquatur ei qui fit ex F in A nempe ipſi K. ſimiliter quomodocunque ſumantur tres ex iiſdem quatuor numeris, duo ex illis reperientur in qualibet alia trium ſumptione. Quare licebit eodem argumento propoſitum concludere.

[c] decima ſeptima 7. [d] decima nona, 7.

Eodem modo ſi ſint quinque numeri, ſumendo quaternos & quaternos, productumq; ex mutua quatuor numerorũ multiplicatione, ducendo in reliquũ, reperientur tres iidem numeri in duabus quibuslibet ſumptionibus, vnde ſumendo productum ex trium communium mutuo ductu, licebit ſimili prorſus argumento propoſitum concludere. Et ſic in ſex numeris per ea quæ in quinque demonſtrata ſunt probabitur intentum, & in ſeptem per ea quæ in ſex erunt oſtenſa. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

PROP. IV.

Si fuerint quatuor numeri in proportionalitate arithmetica, erit ſumma extremorum, ſummæ mediorum æqualis. Et ſi ſumma extremorum ſit æqualis ſummæ mediorum, erunt in proportionalitate arithmetica ipſi quatuor numeri.

Arithmetica proportionalitas dicitur cùm primi & ſecundi idem eſt interuallum, quod tertij & quarti, ita tamen vt primus ſecundo, & tertius quarto comparati, ſinguli ſingulis vel æquales ſint, vel maiores, vel minores, non perturbato ordine.

A.........B
C.........
D.......G
H.......

Sint ergo arithmeticè proportionales A B ad C ſicut D G ad H. dico extremorum A B & H ſummam æquari ſummæ mediorum C & D G. etenim vel A B æqualis eſt ipſi C. vel maior vel minor illo. Sit primum æqualis ergo vt ſeruetur arithmetica medietas, erit & D G. æqualis, ipſi H. Quamobrem ſi æqualibus A B & C addantur æquales H & D G. erunt duo A B & H ſimul æquales duobus G & D G ſimul. Quod eſt propoſitum.

A.......E..B
C.......
D.....F..G
H.....

Deinde excedat A B numerum C numero E B ita vt A E & C ſint æquales, igitur & D G excedit H numero F G. æquali ipſi E B. per definitionẽ, & erit D F ipſi H æqualis. Itaque ſi æqualibus A E & C addantur æquales H & D F fient A E & H ſimul æquales ipſis C & D F ſimul, igitur ſi his ſummis æqualibus addantur rurſus æquales E B & F G. Erunt A B & H ſimul æquales ipſis C & D G ſimul. Quod demonſtrandum erat.

Denique concipiatur H primus. D G ſecundus. C tertius. A B quartus. ita vt H ſit minor quàm D G numero F G. & C ſit minor quàm A B numero E B, ſintque differentiæ F G. E B æquales: dico rurſus extremorum H & A B ſummam æquari ſummæ mediorum D G & C. Nam conſideratis iiſdem numeris ordine in

uerso concludetur per proximè demonstrata summam duorum A B & H. æquari summæ duorum C & D G. Quod est propositum.

Iam è conuerso sit summa extremorum A B & H æqualis summæ mediorum C & D G. Dico ipsos quatuor numeros esse in arithmetica medietate. Nam vel A B æqualis est ipsi C. vel maior vel minor illo. Sit primum æqualis. Quia igitur A B & H simul æquantur ipsis C & D G simul, si vtrimque auferantur æquales A B. & C. remanebunt D G. & H æquales. Quare sicut ipsorum A B & C nullum est interuallum, sic & ipsorum D G. & H. Vnde constat propositum.

Deinde excedat A B ipsum C numero E B ita vt A E & C sint æquales. Igitur ab æqualibus summis duorum A B & H simul, & duorum C & D G simul, auferendo æquales numeros A E & C. remanent E B & H simul, æquales ipsi D G. Quare si abscindatur ex D G numerus D F æqualis H, erit reliquus F G. æqualis E B. Cùm itaque A B excedat C. eodem numero quo D G excedit H. erunt arithmeticè proportionales ipsi quatuor numeri. Quod demonstrandum erat.

Denique concipiatur H primus. D G. secundus. C tertius. A B quartus. Ita vt H sit minor quàm D G numero F G. & reliquus D F sit æqualis ipsi H. Quia ergo ab æqualibus summis duorum H & A B. & duorum D G, & C. auferendo æquales H & D F remanent F G & C simul æquales ipsi A B, si ab A B abscindatur A E æqualis ipsi C relinquetur E B æqualis ipsi F G. Quare cùm H deficiat à D G. eodem numero quo C deficit ab A B. sunt arithmeticè proportionales H ad D G. sicut C ad A B. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc apparet si quatuor numeri fuerint in hac proportionalitate, & conuertendo fore eos in eadem proportionalitate.

Nam si primus excedat secundum, eodem interuallo quo tertius excedit quartum, & conuertendo quartus deficiet à tertio, eodem numero quo secundus deficit à primo. Rursus si primus deficiat à secundo, eodem numero quo tertius à quarto, & conuertendo quartus excedet tertium, eodem interuallo quo secundus primum.

PROP. V.

Si tres numeri arithmeticè proportionales fuerint, summa extremorum æqualis est duplo medij. Et si summa extremorum sit æqualis duplo medij, ipsi tres numeri arithmeticè proportionales erunt.

A 9.
B 6. D 6.
C 3.

Sint tres numeri A B C in arithmetica proportionalitate, vt A ad B ita B ad C. Dico extremorum A C summam æquari duplo medij B. Etenim sumpto D æquali ipsi B. erit ex hypothesi in arithmetica proportionalitate vt A ad B ita D ad C. (quia D idem est atque B) Igitur per primam partem præced. erit extremorum A C summa, æqualis summæ mediorum B D, seu duplo ipsius B. Quod erat primò propositum.

Sit deinde summa ipsorum A C æqualis duplo ipsius B. Dico esse in arithmetica proportionalitate vt A & B ita B ad C. Nam rursus sumpto D æquali B erit ex hypothesi, summa duorum A C. summæ duorum B D æqualis. Quare per secundam partem præcedentis erit in arithmetica medietate A ad B vt D ad C. hoc est A ad B vt B ad C. Quod erat secundò demonstrandum.

PROP. VI.

Si sint quotlibet numeri in arithmetica medietate continui, summa extremorum æqualis est summæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, atque etiam duplo medij, si multitudo numerorum fuerit impar.

A 3. B 5. C 7. D 9. E 11. F 13. Sint quotlibet numeri ABCDEF in arithmetica medietate continui, dico summam extremorum AF æqualem esse summæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, hoc est summæ duorum BE, & summæ duorum CD. Nam ob continuitatem arithmeticæ proportionalitatis, est A ad B sicut E ad F. Igitur [a] extremorum AF summa, summæ mediorum BE æqualis est. Similiter quia est in arithmetica medietate B ad C, vt D ad E. [b] erit summa extremorum BE æqualis summæ mediorum CD. Quare cùm eadem summa duorum BE sit iam ostensa æqualis summæ duorum AF. erit vtique summa duorum AF æqualis tam summæ duorum BE. quàm summæ duorum CD & sic de aliis si plures essent numeri propositi.

[a] quarta, huius. [b] quarta, huius.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10. F 12. G 14. Quod si numeri ABCDEFG sint multitudine impari, ostendemus vt prius summam extremorum AG æqualem esse summæ duorum CE. Quia vero ex hypothesi est C ad D vt D ad E. in medietate arithmetica, [a] summa duorum CE æqualis est duplo medij D. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

[a] quinta, huius.

PROP. VII.

Si fuerint quatuor numeri arithmeticè proportionales, & permutando, arithmeticè proportionales erunt.

A 12. B 9. C 4. D 1. Sit in medietate arithmetica primus A ad secundum B. sicut tertius C ad quartum D. Dico & permutando esse in eadem medietate A ad C vt B ad D. Quia enim est in hac medietate A ad B vt C ad D, erit summa extremorum AD æqualis summæ mediorum CB per primam partem quartæ huius. Igitur per secundam partem eiusdem erit in eadem medietate primus A ad C secundum, sicut tertius B ad D quartum. Quod demonstrandum erat.

PROP. VIII.

Omnis numerus pariter par, dimidium par habet. Et si quis numerus dimidium par habet, is est pariter par.

A 24. B 12. Esto A numerus pariter par, cuius dimidium B. Dico B esse parem. Si enim B esset impar, [a] ipse A esset pariter impar tantum, contra hypothesim. Non est ergo B impar, sed par. Quid est propositum.

[a] trigesima tertia, 9. Euclidis.

Deinde sit B par, dico A esse pariter parem, & patet ex definitione. Etenim A producitur ex binario numero pari, in parem B. Quamobrem ex omni parte patet intentum.

COROLLARIVM.

Binarius metitur omnem numerum parem, per ipsius dimidium.

PROP. IX.

Omnis numerus pariter impar tantum, dimidium impar habet.

A 10. B 5. Hæc conuertit trigesimam tertiam, 9. Euclidis. Esto A numerus pariter impar tantum, cuius dimidium B. Dico B esse imparem. Nam si B esset par, [a] ipse A esset pariter par. Atqui A supponitur pariter impar tantum. Igitur B non est par sed impar. Quod demonstrandum erat.

[a] octaua, huius.

PROP. XI.

Omnem numerum pariter parem quaternarius metitur. Et omnem numerum quem quaternarius metitur, is pariter par est.

A......C......B
G 4. D 2.

Eſto A B numerus pariter par cuius dimidium ſit C B numerus par per octauã huius. Et ſit G quaternarius. Dico primo G metiri ipſum A B. Nam ſumpto D binario, erit D ad G ſicut C B ad A B. & permutando erit D ad C B, ſicut G ad A B. ſed [a] D binarius metitur numerum parem C B. Igitur & G metitur ipſum A B. Quod demonſtrandum erat.

Deinde quaternarius G metiatur numerum A B. Dico A B eſſe pariter parem. Nam primo parem eſſe conſtat, [b] quia eum metitur G numerus par. Itaque ipſius A B dimidium eſto C B. Tunc vt prius ſumpto binario D, oſtendemus eſſe D ad C B ſicut G ad A B. Sed G metitur A B ex hypotheſi. Igitur & D metitur C B [c] Quamobrem A B habens dimidium par, eſt pariter par. Quod ſecundo erat oſtendendum.

[a] *coroll. octaua. huius.* [b] *vigeſimaprima, 9.* [c] *octaua, huius.*

P R O P. X I.

Omnis numerus excedens binario aliquem pariter parem, eſt pariter impar tantum.

A..C.......B

Sit numerus A B excedens pariter parem C B, binario A C. Dico A B eſſe pariter imparem tantum. Nam primo eſſe parem conſtat, [a] quia componitur ex duobus paribus A C. C B. Deinde eſſe pariter imparem ſic probatur. Nam ſi ponatur pariter par, [b] metietur eum quaternarius. Sed & idem quaternarius metitur pariter parem C B. Ergo quaternarius metiens totum A B. & ablatum C B, metietur & reliquum binarium A C, maior minorem. Quod eſt impoſſibile. Quamobrem A B non eſt pariter par. Eſt igitur pariter impar tantum. Quod demonſtrandum fuit.

[a] *vigeſimaprima, 9.* [b] *octaua, huius.*

P R O P. X I I.

Omnis numerus pariter impar tantum, excedet aliquem pariter parem binario.

A..G.....C.D......B

Eſto A B pariter impar tantum, dico eum excedere binario aliquem pariter parem. Quia enim A B eſt par, ſecetur bifariam in A C. C B. [a] eruntque A C C B impares. Quare ſi ab ipſo C B auferatur vnitas C D, reliquus D B erit par. Sit illius duplus G B. [b] Igitur G B erit pariter par. Quum itaque vt totus A B ad totum C B, ſic ſit ablatus G B ad ablatum D B, (nam vtrobique eſt proportio dupla) erit & reliquus A G ad reliquum C D in eadem proportione dupla. Quare cùm C D ſit vnitas, erit A G binarius. Atque ideo cùm G B ſit oſtenſus pariter par, numerus A B ſuperat pariter parem G B binario A G. Quod demonſtrandum erat.

[a] *nona, huius.* [b] *octaua, huius.*

P R O P. X I I I.

Si numerus pariter par, numero pariter impari tantum addatur, erit compoſitus pariter impar tantum.

A....C......B

Numerus pariter par A C. addatur pariter impari tantum C B. Dico compoſitum ex his A B eſſe pariter imparem tantum. Nam ſi A B ponatur pariter par, [a] metietur eum quaternarius. Sed idem quaternarius metitur pariter parem A C. Igitur metiens totum A B, & ablatum A C, metietur & reliquum C B. [b] Quamobrem C B erit pariter par contrà hypotheſim. Nam poſitus eſt pariter impar tantum. Igitur A B non poteſt eſſe pariter par. Vnde relinquetur eſſe pariter imparem tantum. Quod erat oſtendendum.

[a] *octaua, huius.* [b] *octaua, huius.*

P R O P. X I V.

Si numerus pariter par per aliquem numerum multiplicetur, productus erit pariter par.

A 8. B 3.
C 24.

Sit numerus pariter par A quo ducto in quemlibet numerum B fiat C. Dico C esse pariter parem. Quia enim A est pariter par, [a] metitur eum quaternarius. Quare cùm A metiatur C, metietur & quaternarius, eundem C. [b] Igitur C est pariter par. Quod demonstrandum erat.

[a] octaua, huius.
[b] octaua, huius.

PROP. XV.

Si numerus pariter impar tantum, per numerum imparem multiplicetur, productus erit pariter impar tantum.

A 6. B 5.
D 3. E 15.
C 30.

Sit A numerus pariter impar tantum, quo ducto in B imparem numerum, producatur C. Dico C esse pariter imparem tantum. Sumatur enim D dimidium ipsius A, quo ducto in B fiat E. Euidens est, quia B ductus in vtrumque D A producit E C [a] esse E ad C sicut D ad A. Quamobrem E est dimidium ipsius C. [b] Atqui D est impar, cùm sit semissis ipsius A numeri pariter imparis tantum & B etiam impar est ex hypothesi. [c] Igitur E productus ex duorum imparium mutuo ductu, & ipse impar est. [d] Quare C habens dimidium impar E, est pariter impar tantum. Quod erat demonstrandum.

[a] decima septima 7'.
[b] nona, huius.
[c] vigesima nona, 9'.
[d] trigesima tertia, 9'.

PROP. XVI.

Si pariter pares quotcunque componantur, totus pariter par erit.

A 8.
B 12. D 36.
C 16.

Sint pariter pares quotcunque A B C. quorum summa D. dico D esse pariter parem. Quia enim A B C sunt pariter pares, [a] singulos illorum quaternarius metitur. Igitur & compositum ex ipsis D, idem quaternarius metietur. [b] Quamobrem erit D pariter par. Quod demonstrandum erat.

[a] octaua, huius.
[b] octaua, huius.

PROP. XVII.

Si quotlibet numeri pariter impares tantum componantur, sit autem par illorum multitudo, totus erit pariter par. Si vero sit impar illorum multitudo, totus erit pariter impar tantum.

A 6. E 4.
B 10. F 8.
C 14. G 12.
D 18. H 16.
K 48.

Sint quotcunque pariter impares tantum A B C D. & sit primum par eorum multitudo, & compositus ex ipsis K. dico K esse pariter parem. sumantur enim E F G H singuli binario minores singulis A B C D. [a] Eruntque ipsi E F G H pariter pares. Numerus autem K æquabitur composito ex ipsis E F G H & totidem binariis. At [b] compositus ex ipsis E F G H est pariter par. Necnon & totidem binarij faciunt pariter parem [d] cùm compositus ex illis habeat dimidium par, scilicet numerum multitudinis ipsorum E F G H. [g] Igitur K compositus ex duobus pariter paribus, est pariter par. Quod demonstrandum fuit.

[a] duodecima, huius.
[b] decima sexta, huius.
[d] octaua, huius.
[g] decima sexta, huius.

A 6. E 4.
B 10. F 8.
C 14. G 12.
D 30.

Sint vero A B C pariter impares tantum, multitudine impari, quorum summa D. dico D esse pariter imparem tantum. Nam sumptis vt prius E F G binario minoribus quàm ipsi A B C. erit D æqualis composito ex ipsis E F G & totidem binariis. [a] Quia vero singuli E F G sunt pariter pares, erit [b] & compositus ex ipsis pariter par. Summa vero totidem binariorum est pariter impar tantum, [c] quia dimidium impar habet, numerum multitudinis ipsorum E F G. Igitur [d] numerus D compositus ex duobus quorum alter est pariter par, alter pariter impar tantum, est & ipse pariter impar tantum. Quod demonstrandum erat.

[a] duodecima, huius.
[b] decima sexta, huius.
[c] trigesima tertia, 9'.
[d] decima tertia, huius.

PROP. XVIII.

Si cuiuis quadrato addatur duplum lateris illius, & præterea vnitas, fit quadratus à latere vnitate maiore.

A 16.
B . . . . C . D
G 25.

Sit quadratus A cuius latus B C cui addita vnitate C D fiat B D & ipsius B D quadratus esto G. dico si addatur ad A duplum sui lateris B C & præterea vnitas, fieri quadratum G. etenim [a] quadratus G. æqualis est quadratis ipsorum B C. C D. & producto bis ex B C in C D. Atqui quadratus ipsius B C est A, & quadratus C D est ipsa vnitas; Produ-

[a] quarta, 2'.

ctus autem ex vnitate C D in B C bis, est duplum ipsius B C. Patet ergo quadratum G æquari quadrato A & vnitati, & duplo ipsius B C. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Eadem prorsus ratione si cuilibet quadrato addatur quadruplum sui lateris & praeterea 4. ostendetur fieri quadratum lateris binario maioris. Et si quadrato addatur sextuplum sui lateris, & praeterea 9. fiet quadratus lateris ternario maioris, & sic in infinitum multiplicando latus per omnes numeros pares ordinatè dispositos, & assumendo quadratos illis collatrales seu quadratos semissum eorundem numerorum parium. Nec ad hoc demonstrandum requiritur aliud quàm quarta, 2'.

PROP. XIX.

Si à quolibet quadrato auferatur numerus vnitate minor duplo lateris illius, relinquetur quadratus à latere vnitate minore.

A25. B5. C10. Sit A quadratus, cuius latus B cuius duplum C, vnde ablata
D 9. E4. F8. vnitate relinquatur D & sit E vnitate minor ipso B. Dico si D
auferatur à quadrato A, relinqui quadratum ipsius E. sumpto enim F duplo ipsius E, cùm B E differant vnitate, patet eorum dupla C F differre binario. Quare idem fiet numerus siue auferatur vnitas ex C, siue addatur vnitas ad F, nempe idem D. Atqui si ad quadratum ipsius E addatur duplum eiusdem E vnitate auctum nempe D, [a] fiet quadratus ipsius B nempe A. Igitur si ex A detrahatur D, residuum erit quadratus ipsius E. Quod demonstrandum erat. [a] *decima octaua, huius.*

PROP. XX.

Omnis numerus quadratus aut impar est, aut pariter par.

A 25. A 16. Sit numerus quadratus A, cuius latus B. dico A vel imparem esse,
B 5. B 4. vel pariter parem. Etenim vel B impar est, vel par. Sit primum impar.
Quia ergo ex impare B in imparem B. fit A. [a] erit A impar. [a] *vigesima nona, 9'.*

Deinde sit B par. Quia igitur ex pari B in parem B fit A, erit A pariter par ex definitione. Quamobrem A vel impar est, vel pariter par. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

Nullus numerus pariter impar tantum, est quadratus. G. I.

Patet, cùm numerus pariter impar tantum, nec impar sit, nec pariter par.

PROP. XXI.

Quilibet quadratus impar, excedit numerum pariter parem vnitate.

A 25. C 24. Sit A quadratus impar, cuius latus B, & ab ipso A detracta vnitate
B 5. D 4. superfit C. dico C esse pariter parem. Sumatur D numerus vnitate
minor ipso B. Quia ergo B est impar [a] (nam si B esset par, ex ductu illius in seipsum fieret A par contrà hypothesim) erit D par. [b] Atqui duplum ipsius D vnà cum quadrato eiusdem D, æquatur numero C. Quadratus autem numeri paris D, [c] est pariter par. Duplum quoque numeri paris D est pariter par (cùm fiat ex binario pari numero, in D parem:) igitur & C compositus ex duobus pariter paribus, [d] est pariter par. Quod demonstrandum erat.

[a] *Schol. vigesima octaua, 9'.* [b] *decima octaua, huius.* [c] *vig. sima, huius.* [d] *decima sexta, huius.*

PROP. XXII.

Duorum quorumlibet quadratorum interuallum, aut impar est, aut pariter par.

A 25. B 9. C 16. Sint duo quadrati A maior & B minor, quorum interuallum C. Dico C esse pariter parem, vel imparem. Sumatur ipsius A latus D F, & latus ipsius B sit D E, ita vt E F sit differentia dictorum laterum.
D...E..F Itaque E F vel par est, vel impar. Sit primum par. Cùm igitur interuallum quo quadratus A superat quadratum B [a] æquetur quadrato ipsius E F & producto ex D E in E F bis, erit C æqualis quadrato ipsius E F & producto ex D E in E F bis. [b] At quadratus paris numeri E F est pariter par. Necnon & duplum

[a] *quarta, 2.* [b] *vigesima, huius.*

[c] octaua, huius. [d] decima sexta, huius.

productiex D E in E F est pariter par, [c] cùm dimidium eius, nempe productus ex D E in E F parem, sit par. [d] Igitur C compositus ex duobus pariter paribus, est pariter par. Quod erat propositum.

A 25. B 4.
C 21.
D..E...F

Deinde sit E F impar. Tunc quia quod fit bis ex D E in E F est numerus par (habet enim dimidium quod fit semel ex D E in E F.) si ei adiiciatur quadratus imparis E F, [a] qui impar est, [b] erit C compositus ex pari & impari, impar. Quamobrem ex omni parte patet propositum.

[a] vigesima, huius. [b] schol. vigesima tertia, 9.

COROLLARIVM.

Numerus pariter impar tantum, non potest esse interuallum duorum quadratorum.

Intellige vnitate indiuisibili manente, aliter enim quilibet numerus statui potest interuallum duorum quadratorum, vt ostendit Diophantus lib. 2. sed & vigesima propositio, & hæ etiam intelligendæ sunt de numeris integris, nam fracti numeri nec pares sunt nec impares.

PROP. XXIII.

Si duorum inæqualium numerorum summæ addatur & adimatur eorundem interuallum, aggregatum quidem, maioris numeri, residuum vero, minoris duplum est.

E...A....B....C...D

Sint inæquales numeri A B minor & B D maior & à maiori abscindatur B C minori A B æqualis ita vt reliquus C D sit interuallum ipsorum. Dico primo, si toti A D addatur E A æqualis interuallo C D aggregatum E D esse duplum maioris numeri B D. etenim cùm æqualibus A B. B C. addantur æquales E A. C D erunt toti E B. B D æquales. atque ideo totus E D ipsius B D duplus erit. Quod erat propositum.

Dico secundo, si à toto A D auferatur interuallum C D, residuum A C minoris A B duplum esse, & patet cùm B C ipsi A B sit æqualis. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

COROLLARIVM.

Si semissi summæ duorum numerorum addatur & adimatur semissis interualli eorundem, aggregatum quidem maiori numero, residuum vero minori æquale est.

PROP. XXIV.

Si quotlibet numeri continuè proportionales, in totidem alios continuè proportionales ducantur, primus in primum, secundus in secundum, tertius in tertium & ita deinceps, & producti continuè proportionales erunt.

P 16.	A 2.	B 4.	C 8.	D 16.
Q 324.	E 27.	F 18.	G 12.	H 8.
R 5184.	K 54.	L 72.	M 96.	N 128.

Sint quotlibet numeri continuè proportionales A B C D & totidē alij E F G H ductisque A in E. B in F. C in G. D in H. fiāt K L M N. Dico & ipsos K L M N esse continuè proportionales. Fiant enim ex A in C & ex E in G fiant P Q. [a] quadrati ipsorum B F fiunt que etiam R productus ex K in M. Itaque quoniam ex A in E & ex C in G fiunt K M & ex K in M fit R, patet R produci ex mutua multiplicatione quatuor numerorum A C E G. [b] Quamobrem idem R producetur quomodocunque iidem quatuor numeri inter se ducantur, nimirum si A ducatur in C. & E in G. & producti P Q inter se ducantur. Igitur ex P in Q fiet R. At productus ex mutuo ductu quadratorum P Q [c] æquatur quadrato plani sub lateribus B F & ex B in F fit L ex hypothesi. Ergo R est quadratus ipsius L, [d] ac proinde tres K L M sunt continuè proportionales. Eadem ratione ostendemus tres L M N esse continuè proportionales. Quamobrem patet & omnes K L M N esse continuè proportionales. Quod erat demonstrandum.

[a] vigesima, 7. [b] tertia, huius. [c] vndecima, 8. [d] vigesima, 7.

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI
IN DIOPHANTVM PORISMATVM
Liber Secundus.

PROPOSITIO I.

SI numerus secetur in quotlibet partes. Quadratus totius æquatur quadratis partium, & numeris qui fiunt bis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis.

A....D...C.....B

Numerus A B sectus sit primum in tres partes A D. D C. C B. Dico quadratum totius A B æquari quadratis partium A D. D C. C B. & numeris qui fiunt bis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, nimirum productis bis ex A D in C B, ex D C in C B. & ex A D in D C. Etenim concipiendo numerum diuisum in duas partes A C. C B. [a] erit quadratus totius A B æqualis quadratis partium A C. C B. & producto bis ex A C in C B. [b] Sed productus bis ex A C in C B æquatur productis bis ex singulis A D. D C in C B. Quadratus autem ex A C. [c] æquatur quadratis partium A D. D C. & producto bis ex A D in D C. Igitur constat quadratum totius A B æquari quadratis ipsorum A D. D C. C B & numeris qui fiunt bis ex quolibet in quemlibet ex aliis. Quod est propositum.

[a] quarta, 2'.
[b] prima, 2'.
[c] quarta, 2'.

A..E...D....C.....B

Deinde secetur A B in quatuor partes A E. E D. D C. C B. Dico nihilominus sequi propositum. Nam si totus A B concipiatur diuisus in duas partes A C. C B. [a] erit quadratus totius æqualis quadratis partium A C. C B & producto ex A C in C B bis. At productus ex A C in C B bis, [b] æquatur productis bis ex singulis A E. E D. D C. in C B. Et quadratus ex A C. æquatur per iam demonstrata quadratis singulorum A E. E D. D C. & productis ex quolibet illorum in quemlibet ex aliis. Igitur quadratus totius A B æquatur quadratis singulorum A E. E D. D C. C B. & productis bis ex quolibet in quemlibet ex aliis. Quod demonstrandum erat. Similiter si numerus secetur in quinque partes, idem ostendetur assumendo quod demonstratum de sectione in quatuor partes, & sic in infinitum. Igitur ex omni parte constat propositum.

[a] quarta, 2.
[b] prima, 2'.

PROP. II.

Datis duobus numeris inæqualibus, productus ex mutua eorum multiplicatione vna cum quadrato semissis interualli ipsorum, æquatur quadrato semissis summæ eorumdem.

Hæc propositio eadem est cum quinta, 2'. Euclidis mutatis tantum verbis. Etenim

A...F..E..B...C

sint numeri inæquales A B maior & B C minor, & totius A C semissis esto A E vel E C, & in semissi A E sumatur F E æqualis ipsi E B. Tunc ab æqualibus A E. E C. auferendo æquales F E. E B. erunt reliqui A F. B C æquales. Quamobrem F B est interuallum inæqualium numerorum A B. B C. & E B est semissis eiusdem interualli. Itaque per quintam, 2'. constat quadratum ipsius E C semissis summæ æquari producto ex A B in B C. & quadrato E B semissis interualli. Quod demonstrandum erat.

PROP. III.

Duorum inæqualium quadratorum interuallum, æquale est numero qui fit ex summa laterum in interuallum eorundem.

Hæc etiam non differt à sexta, 2'. etenim sint inæquales numeri A C minor, &

A...C...B.....D

C D maior abscindatur ex C D numerus C B æqualis ipsi A C. erit ergo B D interuallum duorum A C. C D. Dico itaque quadratum ex C D superare quadratum ex A C. numero qui fit ex A D summa laterum, in B D interuallum eorundem. Cùm enim A B sectus sit bifariam in C.

& ei adiectus sit B D, erit per sextam, 2'. quadratus ex C D æqualis producto ex A D in B D & quadrato ex A C. Quare quadratus ex C D superat quadratum ex A C producto ex A D in B D quod demonstrandum fuit.

PROP. IV.

Duorum quadratorum summa, æquatur duplo plani sub lateribus, vnà cum quadrato interualli eorundem.

A..D....C....B

Hæc quoque aliis verbis idem pronunciat, quod septima, 2'. Etenim sint inæquales numeri A C maior & C B minor, & abscindatur D C æqualis ipsi C B. ita vt A D sit interuallum ipsorum A C. C B. Dico summam quadratorum ab ipsis A C. C B, æquari duplo plani sub A C. C B. vnà cum quadrato ipsius A D. Quia enim numerus A C sectus est vtcumque in D, per septimam, 2'. quadratus ex A C cum quadrato ex D C. idest summa quadratorum ab ipsis A C. C B. æquatur duplo plani sub A C. D C. seu sub A C. C B. vnà cum quadrato ipsius A D. Quod demonstrandum erat.

PROP. V.

Quadratus summæ duorum numerorum, æqualis est quadruplo plani sub ipsis numeris contenti, vnà cum quadrato interualli eorundem.

A.....C..B..D

Hæc rursus eadem est cum octaua 2'. sint enim inæquales numeri A B maior, & B D minor, & abscindatur C B æqualis ipsi B D, ita vt A C sit interuallum ipsorum A B. B D. Dico quadratum totius A D æquari quadruplo plani sub A B. B D. vnà cum quadrato interualli A C. Cùm enim numerus A B sectus sit vtcumque in C. per octauam 2'. quadratus compositi ex A B. C B. nimirum totius A D, æquatur quadruplo plani sub A B. C B. seu sub A B. B D, cum quadrato ipsius A C. Quod demonstrandum proponebatur.

PROP. VI.

Duorum inæqualium quadratorum summa, dupla est quadrati semissis summæ laterum, & quadrati semissis interualli eorundem.

A.:....C..D...B

Hæc non differt à nona 2'. sint enim inæquales numeri A D. D B. & totius A B. semissis esto A C. vel C B ergo per ostensa secunda huius C D erit semissis interualli ipsorum A D. D B. Itaq; dico summam quadratorum ab ipsis A D. D B. duplam esse quadratorum ab ipsis C B. C D. Quod ipsum enunciat nona 2'. Quamobrem constat propositum.

PROP. VII.

Quadratus summæ duorum numerorum, & quadratus interualli eorum simul, dupli sunt quadratorum ab ipsis numeris.

A.....C.....B..D

Hæc quoque coincidit cum decima, 2'. sint enim inæquales numeri A C. minor, & C D maior & à maiori abscindatur C B minori A C æqualis, ita vt B D sit interuallum ipsorum A C. C D. Dico Quadratum totius A D cum quadrato interualli B D esse duplum quadratorum ab ipsis A C. C D. Cùm enim A B sectus sit bifariam in C. & adiectus sit ei B D. per decimam 2'. Quadrati ipsorum A D. B D simul dupli sunt quadratorum ab ipsis A C. C D. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Cuiuslibet numeri ex duobus quadratis compositi tam dimidium quàm duplum componitur & ipsum ex duobus quadratis.

SCHOLIUM.

Colligitur manifestò hoc corollarium ex his duobus postremis propositionibus, & verum est in omni numero siue pari siue impari, siue integro, siue fracto, cùm hæ duæ demonstrationes omnibus numeris conueniant, vt apparet. vnde constat lapsum esse Cardanum cap. 42. suæ arithmeticæ regula 120. vbi hanc proprietatem numeris fractis conuenire negat. Notandus etiam error Nicolai Tartaleæ lib. 6. secundæ partis quæst. 48. vbi ait si numerus

ex duobus quadratis compositus sit duplus alterius ex duobus item quadratis compositi, semper euenire vt minus latus sub duplorum sit interuallum inter maius latus eorundem & minus duplorum, vt quia quadrati 64. & 4. simul sunt dupli quadratorum 25. & 9. accidit 3. latus ipsius 9. esse differentiam laterum 5. & 2. Etenim cùm vterque numerus ex duobus quadratis compositus, infinitis modis componatur ex duobus quadratis, vt ostendit Diophantus quæst. decima lib. 2. sanè vterque infinitis modis diuidi poterit in duos quadratos in quibus non eueniet quod semper euenire asserit Tartalea, quod vnico exemplo probare sufficiet. Quadrati 121. & 9. simul dupli sunt quadratorum 64. & 1. cùm illorum summa sit 130, horum 65. Attamen cùm latera illorum sint 11. & 3. horum 8. & 1. manifestum est, minus horum nempe 1. non esse interuallum ipsorum 8. & 3. Rursus 130. componitur ex duobus quadratis 81. & 49, At 65. componitur è duobus 49 & 16. & illorum latera sunt 9. & 7. istorum 7. & 4 vbi tamen 4. non est interuallum ipsorum 7. & 7. Verum quidem est si aliter comparentur hi quadrati, euenire quod ait Tartalea, nimirum si quadrati 121. & 9. comparentur ipsis 49. & 16. vel si quadrati 81. & 49. comparentur ipsis 64. & 1. Hoc igitur distinguere debuit Tartalea; sed doctrinam de numeris è duobus quadratis compositis perfectè non calluit

Hinc etiam colligere licet. Nullum numerum pariter parem tantum componi posse ex duobus quadratis integris & inæqualibus. Nam si hoc ponatur, facilè concludetur ex quibusdam propositionibus lib. 1. porism. & ex sexta huius, illius quoque dimidium componi è duobus quadratis integris & inæqualibus. Quia igitur numeri pariter paris tantum, continue dimidium sumi potest, & dimidium dimidij donec ad binarium & ad vnitatem deueniatur per trigesimam quartam 9. Euclidis, patet sequi & ipsum binarium & ipsam vnitatem componi quoque ex duobus quadratis integris & inæqualibus. Quod est impossibile.

PROP. VIII.

Differentia medij proportionalis à quolibet quadratorum inter quos medius est, æquatur productis ex interuallo laterum in quodlibet latus.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 28. C 49.

Sint quadrati A C. quorum latera D F, quorum interuallum E & medius proportionalis inter ipsos A C. esto B. Dico differentiam qua B superat A æquari producto ex E in D, & differentiam qua C superat B æquari producto ex E in F. [a] Etenim patet ipsum B fieri ducto D in F. Quia ergo F æquatur ipsis D E simul, [b] fiet idem B ducto D in singulos D E. Atqui ex D in D fit quadratus A. Igitur si à productis ex D in D & in E hoc est à numero B auferatur productus ex D in D, nempe quadratus A, restabit productus ex D in E pro differentia inter ipsos A B. Similiter quia ex F in F fit C. & F æquatur ambobus D E, fiet idem C ex F in singulos D E. At ex F in D fit B vt dictum est. Igitur si à quadrato C. auferatur B, restat productus ex F in E pro differentia inter B C. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

[a] vndecima, 8.
[b] prima, 2.

PROP. IX.

Si à duobus quadratis, & à medio eorum proportionali auferatur sigillatim quilibet datus numerus, & tria residua per differentiam laterum sigillatim diuidantur, medius quotientum superat minimum latere minoris quadrati, & superatur à maximo, latere maioris quadrati, & summa maximi & minimi superat duplum medij, eorundem laterum interuallo.

D 4. E 3. F 7.
A 16. C 28. B 49.
G 10.
H 6. K 18. L 39.
M 2. N 6. P 13.

Sint A B duo quadrati, quorum latera D F. quorum interuallum E. & medius proportionalis sit C. & ab ipsis A. C. B. auferendo sigillatim datum quemuis numerum G. supersint H. K. L. quibus diuisis sigillatim per E, fiant quotientes M. N. P. Dico primo N. superare ipsum M. numero D, & eundem N. superari ab ipso P. numero F. Etenim cùm à singulis A C B, ablatus sit idem G. patet residuorum H K L eadem esse interualla

a *octaua, huius.*

D 4. E 3. F 7.
A 16. C 28. B 49.
G 10.
H 6. K 18. L 39.
M 2. N 6. P 13.

quæ ipsorum A C B. a Atqui C superat A. producto ex D in E, & B superat C producto ex E in F. Igitur & interuallum duorum H K. est productus ex D in E, & interuallum duorum K L est productus ex E in F. Quoniam verò diuisis H K L. per E, prodeunt M N P. constat duorum M N interuallum fieri, diuiso per E interuallo ipsorum H K. seu producto ex D in E. similiter duorum N P interuallum fiet, diuiso per E interuallo ipsorum K. L, seu producto ex E in F. Atqui diuidendo per E productos ex E in D, & ex E in F, fiunt quotientes ipsi D F. Igitur duorum M N interuallum est D, & duorum N P interuallum est F. Quod erat propositum.

Deinde, dico summam ipsorum M P. superare duplum ipsius N numero E. Nam per ostensa P æquatur ipsis N F. Igitur summa ipsorum M P. æquatur tribus numeris M N F. At F æquatur vtrique D E. Igitur summa amborum M. P. æquatur quatuor numeris D E M N. Verùm per ostensa ambo D M æquantur ipsi N. Igitur ambo M P. æquantur duplo ipsius N, & numero E. Quod demonstrare oportuit.

PROP. X.

Si duobus quadratis & medio eorum proportionali addatur sigillatim idem numerus, & tres summæ per interuallum laterum sigillatim diuidantur, idem quod prius quotientibus accidet.

D 4. E 3. F 7.
A 16. C 28. B 49.
G 2.
H 18. K 30. L 51.
M 6. N 10. P 17.

Sint iidem qui suprà D E F. A C B. & ipsis A C B addatur sigillatim numerus G, vnde fiant H. K L. quibus diuisis sigillatim per E, fiant quotientes M N P. Dico primo N superare ipsum M numero D, & eundem N superari ab ipso P. numero F. Etenim cùm singulis A C B additus sit idem G. patet summarum H K L eadem esse interualla, quæ ipsorum A C B. Atqui C superat A & assumantur reliqua omnia verba præcedentis demonstrationis, & nulla quidem mutata litera propositum concludetur.

PROP. XI.

Si à duobus quadratis auferatur idem numerus sigillatim, & residua per interuallum laterum sigillatim diuidantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu, adscito numero qui à quadratis detractus est, quadratus euadit.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 49.
G 10.
a *nona, huius.* M 2. N 6. P 13.

Sint quadrati A B. quorum latera D F. & horum interuallum E & ab ipsis A B auferendo G sigillatim supersint duo numeri, quibus diuisis sigillatim per E. fiant quotientes M P. Dico ex mutuo ductu ipsorum M P. fieri numerum qui adscito G. quadratus euadit. Sumatur N quotiens qui fit si
b *prima, 2.* medius proportionalis inter A B detracto G, diuidatur per E. a Quare N æquabitur vtrique D M. & P vtrique N F. Igitur qui fiet ex N in D. b æquabitur iis qui fient ex D in D & ex D in M, hoc est quadrato A & numero qui fit ex D in M. Sed quadratus A æquatur producto ex M in E adsciscenti G ex constructione. Igitur qui
c *prima, 2.* fit ex N in D æquatur productis ex M in D & in E addito G. & c quia producti ex M in ipsos D E æquantur producto ex M in F composito ex ipsis, patet productum ex N in D æquari producto ex M in F adsciscenti G. Rursus, quia productus ex M in P æquatur productis ex M in N. & in F, ex quibus P ostensus est componi, addendo vtrimque numerum G. erit productus ex M in P addito G. æqualis productis ex M in N & in F addito G. Quare loco producti ex M in F adscito G, sumendo eum qui ostensus est æqualis, productum scilicet ex N in D. erit productus ex M in P adscito G. æqualis productis ex N in D & in M. Quare cùm D & M simul ostensi sint æ-
d *secunda, 2.* quales ipsi N, d & ideo producti ex N in D & in M æquentur quadrato ipsius N, erit vtique productus ex M in P adscito G. æqualis quadrato ipsius N. Quod erat demonstrandum.

PROP.

PROP. XII.

Si duobus quadratis idem numerus sigillatim addatur, & summæ per interuallum laterum sigillatim diuidantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu multatus numero qui quadratis additus est, euadit quadratus.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 49.
G 2.
M 6. N 10. P 17.

Sint quadrati A B quorum latera D F, & horum interuallum E. & numerus G addatur sigillatim ipsis A B. & summæ sigillatim diuidantur per E & fiant quotientes M P. Dico productum ex M in P. detracto numero G. euadere quadratum. Sumatur enim N qui fit si medius proportionalis inter A & B adscito G diuidatur per E. Igitur [a] ambo D M æquantur ipsi N. & ambo N F æquantur ipsi P. [b] Quare qui fit ex N in D. æquatur productis ex D in D (seu quadrato A) & ex D in M. At quadratus A per constructionem est æqualis producto ex E in M. detracto G. Igitur productus ex N in D æquatur productis ex M in D & in E detracto G. Quia vero D E componunt F. [c] producti ex M in D & in E æquantur producto ex M in F. Quare productus ex N in D. æquatur producto ex M in F detracto G. Rursus quia productus ex M in P. æquatur productis ex M in N & in F ex quibus P componitur, detrahendo vtrimque numerum G. erit productus ex M in P detracto G. æqualis productis ex M in N & in F detracto G. Quare loco producti ex M in F detracto G, sumendo illi æqualem (vt ostensum est) productum ex N in D, erit productus ex M in P detracto G, æqualis productis ex N in D & in M. Quia vero D M æquantur ipsi N (vt ostensum est) [d] producti ex N in D & in M æquantur quadrato ipsius N. Igitur productus ex M in P. detracto G. æquatur quadrato ipsius N. Quod demonstrandum erat.

[a] decima huius.
[b] prima, 2.
[c] prima, 2.
[d] secunda, 2.

PROP. XIII.

Si à duobus quadratis auferatur datus aliquis numerus sigillatim, & residua diuidantur sigillatim per interuallum laterum, duo quotientes, vnà cum duplo summæ ipsorum multato supradicto interuallo, exhibent tres numeros, quorum bini quilibet si inuicem ducantur, & producto addatur datus numerus, fit quadratus.

C 4. D 3. E 7.
A 16. B 49.
H 6. G 10.
K 2. L 13. M 27.
N 36. P 64. Q 361.

Sint quadrati A B. quorum latera C E & horum interuallum D. & sit datus numerus G. quo detracto sigillatim ex ipsis A B, & diuidendo residua per D fiant quotientes K L, & horum summę duplum multatum ipso D sit M. Dico tres K L M. præstare quod proponitur. Etenim à medio proportionali cadente inter A & B detrahendo G, & residuum per D diuidendo, fiat quotiens H. Et primò ducto K in L & producto addendo G. fiat N. Dico N esse quadratum. Etenim N est quadratus ipsius H [a] vt suprà demonstratum est. Secundò ducto K in M & producto addendo G. fiat P. dico P esse quadratum. [b] Quia enim summa duorum K L æquatur duplo ipsius H, & numero D; duplum ipsorum K L. æquabitur quadruplo H & duplo D. Quare auferendo D vtrimque, duplum ipsorum K L detracto D, nempe numerus M æquatur quadruplo H, & ipsi D semel sumpto. Vnde qui fit ex K in M æquatur producto ex K in H quater & in D semel. Igitur addito vtrimque numero G. productus ex K in M addito G, (nempe P.) æquatur productis ex K in H quater, & in D semel adscito G. At numerus qui fit ex K in D adscito G æquatur ipsi A per constructionem. Igitur P æquatur ipsi A & producto quater ex K in H. Quamobrem [c] cùm A sit quadratus interualli duorum K H. patet numerum qui fit quater ex K in H. adscito A [d] esse quadratum summæ duorum K H. Igitur P est talis quadratus.

Denique ducto L in M & producto addendo G, si fiat Q. simili prorsus argumento ostendemus Q esse quadratum summæ duorum H L. Igitur ex omni parte patet propositum.

[a] undecima, huius.
[b] nona, huius.
[c] nona, huius.
[d] quinta, huius.

PROP. XIV.

Si duobus quadratis addatur ſigillatim quilibet datus numerus, & ſummæ ſigillatim diuidantur per interuallum laterum, duo quotientes, vna cùm duplo ſummæ illorum multato dicto interuallo, exhibent tres numeros, quorum bini quilibet ſi inuicem ducantur, & à producto detrahatur datus numerus, fit quadratus.

C 4. D 3. E 7.
A 16. B 49.
H 10. G 2.
K 6. L 17. M 43.
N 100. P 256. Q 729.

Sint quadrati A B. quorum latera C E, & horum interuallum D. & ipſis A B addendo ſigillatim G, fiant numeri qui diuiſi ſigillatim per D, dent quotientes K L. quorum duplum multatum numero D, ſit M. Dico tres K L M. efficere quod proponitur.

Nam primo ducto K in L. & à producto auferendo G ſuperſit N. & ſumatur H quotiens qui fit ſi medius proportionalis cadens inter A & B auctus numero G diuidatur per D. [a] Conſtat igitur N. eſſe quadratum ipſius H.

[a] *decima, huius.*

Secundo ducto K in M & à producto detrahendo G ſuperſit P. [b] Quoniam ergo K L ſimul æquantur duplo ipſius H & numero D. patet duplum ipſorum K L detracto G. nempe numerum M. æquari quadruplo ipſius H, & numero D. Quare qui fit ex K in M. æquatur ei qui fit ex K in H quater, & in D ſemel. Ergo detracto vtrimque G. numerus qui fit ex K in M detracto G nimirum P. æquatur eis qui fiunt ex K in H quater, & in D ſemel detracto G. At numerus qui fit ex K in D detracto G æquatur ipſi A per conſtructionem. Igitur P. æquatur ipſi A & producto ex K in H quater. Quoniam igitur A [c] eſt quadratus interualli ipſorum K H. numerus qui fit ex K in H quater adſcito A, [d] eſt quadratus ſummæ duorum K H. Igitur P. eſt talis quadratus.

[b] *decima huius.* [c] *decima huius.* [d] *quinta, huius.*

Denique ducto L in M & à producto detrahendo G ſuperſit Q. ſimili prorſus argumento probabitur Q eſſe quadratum ſummæ ambotum H L. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

PROP. XV.

Differentia quælibet duorum quadratorum à medio eorum proportionali, eſt media proportionalis inter eundem quadratum, & quadratum interualli laterum.

H 3. K 2. L 5.
M 4.
G 6. D 10.
A 9. B 15. C 25.

Sint quadrati A C. & medius eorum proportionalis B. ſintque H L. quadratorum latera, quorum interuallum K. cuius quadratus M. Et differentiæ ipſius B à quadratis A C. ſint G D. Dico G eſſe medium proportionalem inter A & M. Itemque D inter C & M. Etenim differentia G [a] fit ex K in H. Quamobrem G [b] eſt medius proportionalis inter quadratos ipſorum H K, nempe inter A & M. Similiter differentia D. fit ex K in L. Igitur D eſt medius proportionalis inter quadratos ipſorum K L. nempe inter M & C. Quamobrem conſtat propoſitum.

[a] *octaua, huius.* [b] *vndecima, 8'.*

PROP. XVI.

Datis duobus quadratis ſi ſumatur duplum ſummæ illorum, & quadrati interualli laterum: habentur tres numeri, quorum bini quem producunt mutuo ductu, is ſi adſumat productum ex quadrato interualli laterum, ſiue in amborum ſummam, ſiue in reliquum, quadratum facit.

Sint dati quadrati A B. & ſit E quadratus interualli laterum ſumaturque C duplus ſummæ ipſorum A B E. Dico tres A B C. præſtare quod proponitur.

D 15.	E 4.	F 8.	
A 9.	B 25.	C 76.	
H 225.	H 225.	G 684.	G 684.
K 136.	M 304.	P 340.	R 100.
L 361.	N 529.	Q 1024.	S 784.
	T 1900.	T 1900.	
	V 404.	Y 36.	
	X 2304.	Z 1936.	

Primò, enim ducatur A in B & fiat H. ducaturque E in summam ipsorum A B & fiat K, sitque L summa ipsorum H K. Dico L esse quadratum. Sumatur D medius proportionalis inter ipsos A B. a qui vtrique fit ex mutua laterum multiplicatione. b Igitur H qui fit ex A in B est quadratus ipsius D. c Sed & summa quadratorum A B. æquatur duplo ipsius D & ipsi E. Igitur productus ex E in summam ipsorum A B. puta K. æquatur duplo producti ex D in E, & quadrato ipsius E. Quare addito H quadrato ipsius D, summa L æquabitur quadratis ipsorum D E. & duplo producti ex D in E. d Ergo L quadratus est cuius latus est summa ipsorum D E. Quod erat propositum.

a *vndecima, 8* b *vigesima, 7.* c *quarta, huius.* d *quarta, 2.*

Secundò, ducatur E in reliquum C vnde fiat M. & amborum H M summa esto N. Dico N. esse quadratum. Sumatur F duplum ipsius E. Quia ergo C æquatur duplo ipsorum A B E. erit productus ex E in C. puta M. æqualis duplo producti ex F in A B. & duplo quadrati ipsius E. Et quia A B simul, vt ostensum est, æquantur ipsi D bis, & E semel productus ex E in A B bis. æquatur producto ex E in D quater, & duplo quadrati ipsius E. Quare totus productus ex E in C. puta M æquatur producto ex E in D quater, & quadruplo quadrati ipsius E seu quod idem est duplo producti ex D in F. & quadrato ipsius F. Quare addito H quadrato ipsius D. fiet N æqualis quadratis ipsorum D F & duplo producti ex D in F. k Ac proinde N est quadratus latus habens summam ipsorum D F. Quod erat intentum.

k *quarta, 2.*

Tertiò, ducatur A in C. & fiat G. ducaturque E in summam ipsorum A C. & fiat P. sitque amborum G P. summa Q. Dico Q esse quadratum. Quia enim G æquatur duplo ipsorum A B E. erit productus ex A in C puta G. æqualis duplo quadrati ipsius A, duplo producti ex A in B seu duplo quadrati ipsius D, & duplo producti ex A in E. At duplum quadratorum ab ipsis A D. a æquatur quadrato summæ ipsorum A D, & quadrato intervalli ipsorum. Quia vero intervallum hoc b est medium proportionale inter A & E, c quadratus illius æquatur producto ex A in E. Igitur G. æquatur quadrato summæ ipsorum A D, & triplo producti ex A in E. Rursus productus ex E in A C puta P. ostendetur æqualis triplo producti ex E in A, duplo producti ex E in B, & duplo quadrati ipsius E. Quare Q compositus ex ipsis G P. æquatur quadrato summæ amborum A D. sextuplo producti ex E in A, duplo producti ex E in B. & duplo quadrati ipsius E. & loco eius qui fit bis ex E in A B. sumendo illi æqualem quadruplum producti ex E in D, vnà cum duplo quadrati ipsius E vt ostensum est in secunda parte, erit Q æqualis quadrato summæ ipsorum A D. quadruplo producti ex E in A D. & quadruplo quadrati ipsius E. & loco quadrupli ex E in A D sumendo duplum ex F in A D, & loco quadrupli quadrati ipsius E sumendo quadratum ipsius F. fit Q æqualis quadrato summæ A D, & quadrato F, & duplo producti ex F in A D. d Quare Q est quadratus summæ ipsorum A D F. Quod erat propositum.

a *septima, huius* b *decima quinta, huius.* c *vigesima, 7.* d *quarta, 2.*

Quartò, ducatur E in B. & fiat R. quo addito ad G. fiat S. Dico S. esse quadratum. Quia enim vt ostensum est, G continet quadratum summæ ipsorum A D, & triplum producti ex A in E. huic addendo R productum ex E in B. fiet S. continens quadratū summæ ipsorum A D. triplum producti ex E in A. & productū ex E in B. Quare loco producti ex E in A B. sumendo duplum producti ex E in D cum quadrato ipsius E. patet S æquari quadrato summæ amborum A D, & quadrato ipsius E, & duplo producti ex E in A D. Ac e proinde S. quadratus est summæ ipsorum. A D E. Quod erat intentum.

e *quarta, 2.*

Quintò, ducatur B in C & fiat T. ducaturque E in summam ipsorum B C & fiat V. & summa ipsorum T V esto X. Dico X esse quadratum. Quia enim C æquatur duplo ipsorū A B E, erit productus ex B in C. puta T. æqualis duplo quadrati ipsius B. duplo producti ex B in A, & ex B in E. Et loco producti bis ex B in A. sumendo illi æqualem duplum quadrati ipsius D. Tum pro duplo quadratorum ab ipsis B D,

D 15.	E 4.	F 8.	
A 9.	B 25.	C 76.	
H 225.	H 225.	G 684.	G 684.
K 136.	M 304.	P 340.	R 100.
L 361.	N 529.	Q 1024.	S 784.
	T 1900.	T 1900.	
	V 404.	Y 36.	
	X 2304.	Z 1936.	

a *ſeptima, huius.* b *decima quinta, huius.*

a ſumendo quadratum ſummæ amborum B D cum quadrato interualli eorundem, & pro hoc quadrato interualli ipſorum B D, b ſumendo productum ex B in E, fiet totus T æqualis quadrato ſummæ amborum B D, & triplo producti ex B in E. Rurſus autem productus ex E in B C puta V. æqualis eſt triplo producti ex E in B duplo producti ex E in A. & duplo quadrati ipſius E. Quare X compoſitus ex vtroque T V æquatur quadrato ſummæ amborum B D. ſextuplo producti ex E in B. duplo producti ex E in A & duplo quadrati ipſius E. Itaque loco eius qui fit bis ex E in A B ſumendo illi æqualem quadruplum producti ex E in D, vnà cum duplo quadrati ipſius E, erit X æqualis quadrato ſummæ ipſorum B D quadruplo producti ex E in B D. & quadruplo quadrati ipſius E. Quare rurſus loco quadrupli ex E in B D, ſumendo duplum ex F in B D, & loco quadrupli quadrati ipſius E, ſumendo quadratum ipſius F. fiet X æqualis quadrato ſummæ ipſorum B D, & quadrato ipſius F, & duplo producti ex

c *quarta, 2.* F in B D. c Proinde X quadratus eſt ſummæ ipſorum B D F. Quod erat propoſitum.

Denique ducatur E in A & fiat Y. quo addito ad T fiat Z. Dico Z eſſe quadratum. Quia enim, vt oſtenſum eſt, T continet quadratum ſummæ ipſorum B D & triplum producti ex B in E. huic addendo Y productum ex E in A fiet Z. continens quadratum ſummæ ipſorum B D, triplum producti ex E in B & productum ex E in A. Quare loco producti ex E in A B ſumendo duplum producti ex E in D vnà cum quadrato ipſius E, patet Z æquari quadrato ſummæ amborum B D. & qua-

d *quarta, 2.* drato ipſius E. & duplo producti ex E in B D. Ac d proinde Z quadratus eſt, cuius latus componitur ex ſumma ipſorum B D E. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum.

PROP. XVII.

Datis duobus quadratis, ſi ſumatur duplum ſummæ illorum, & quadrati interualli laterum: habebuntur tres numeri, quibus ſi addatur ſigillatim duplum quadrati interualli laterum, fient tres alij, quorum bini quem producunt mutuo ductu, detracto eo qui fit ex quadrato interualli laterum, ſiue in ſummá amborum, ſiue in reliquú remanet quadratus.

D 15.	E 4.		
A 9.	B 25.	C 76.	
F 8.	F 8.	F 8.	
G 561.	G 561.	N 1428.	N 1428.
H 336.	L 200.	P 404.	R 132.
K 225.	M 361.	Q 1024.	S 1296.
	T 2772.	T 2772.	
	V 468.	Y 68.	
	Z 2304.	Z 2704.	

Sint duo quadrati A B. & quadratus interualli laterum E. & duplum ipſorum A B E eſto C. addaturque ſingulis A B C. duplum ipſius E puta F. Dico tres A F. B F. C F. præſtare quod dictum eſt.

Primo enim ducatur A F in B F & fiat G. Ductoque E in reliquum C F. fiat H, quo detracto ex G, maneat K. Dico K eſſe

a *prima, 2.* quadratum. a Quia enim ducere A F in B F idem eſt, atque ducere A in B & F in F & vtrumque A B in F. patet G continere productum ex A in B. & productum ex F in A B, (ſeu ex E bis in A B,) & quadratum ipſius F, ſeu quadratum ipſius E quater. Rurſus, quia C continet duplum ipſorum A B E. productus ex E in C F, puta H. continet productum ex E in A B bis, & ex E in ſeipſum quater. Quare detracto H ex G. reliquus K æquatur producto ex

b *vigeſima, 7.* A in B, b ſeu quadrato medij proportionalis D. Quod erat propoſitum.

Secundo, ducatur E in ſummam ipſorum A F. B F. & fiat L. quo detracto rurſus ex G. ſuperſit M. Dico M eſſe quadratum. Nam vt oſtenſum eſt, G continet productum ex A in B, & productum ex E bis in A B. & quadruplum quadrati ipſius

E. At productus ex E in A. F. B F, puta L, continet productum ex E in A B. & ex E in sui quadruplum, seu quadruplum quadrati ipsius E. Igitur detrahendo L ex G reliquus M manet æqualis producto ex A in B. & producto ex E in A B. Quamobrem M. quadratus est per primam partem præcedentis, cuius latus est summa amborum D E. Quod erat propositum.

Tertiò, ducatur A F in C F. & fiat N. tum ducatur E in summam ipsorum A F C F & fiat P. quo detracto ex N. supersit Q. Dico Q. esse quadratum. Quia enim ducere A F in C F idem est atque ducere A in C. & F in F. ac demum F in ipsos A C. patet N. continere productum ex A in C. & productum ex F in F seu ex E in seipsum quater, & productum ex F in A C. seu ex E bis in A C. Rursus productus ex E in A F. C F puta P. continet productum ex E in A C. semel, & ex E in seipsum quater. Quare detracto P ex N. reliquus Q. manet æqualis producto ex A in C & producto ex E in ipsos A C. Quare Q quadratus est per tertiam partem præcedentis cuius latus componitur ex ipsis D A F. Quod erat intentum.

Quartò, Ducatur E in reliquum B F & fiat R quo detracto ex eodem N. maneat S. Dico S. quadratum esse. Quia enim ducto E in A F. C F fit P. & ducto eodem E in B F fit R. patet P superare R. producto qui fit ex E in interuallum quo A F. C F superant B F. Atqui loco ipsius C. sumendo duplum ipsorum A B E. Interuallum quo A F. C F superant B F reperitur continere A ter. F bis. B semel. Igitur P superat R producto ex E in A ter, in F bis, in B semel. Porrò quia P Q simul conficiunt eundem N. quem & R S. simul conficiunt, [a] sunt in arithmetica medietate [a] *quarta,*
P ad R. vt S ad Q. Igitur S. superat Q producto ex E in A ter, in F bis, in B se- *1. porism.*
mel. Et loco producti ex E in A B semel, [b] sumendo productum ex E in D bis, & in [b] *quarta,*
seipsum semel, fiet interuallum quo S superat Q æquale producto ex E bis in ipsos *huius.*
D A F. & quadrato ipsius E. Quare cùm Q ostensus sit quadratus, cuius latus componitur ex ipsis D A F. & quadrato Q. addendo quadratum ipsius E & duplum producti ex ipso E in latus ipsius Q, fiat S [c] Vtique S. quadratus est latus habens [c] *quarta,*
compositum ex ipsis D A F E seu ex D A & triplo ipsius E. Quod erat propo- *2.*
situm.

Quintò, Ducatur B F in C F. & fiat T. tum ducatur E in summam ipsorum B F. C F. & fiat V. quo detracto ex T supersit X. Dico X esse quadratum. Quia enim T producitur ex B F. in C F. patet T continere productum ex B in C, & productum ex F in F, seu ex E in F bis, & productum ex F in B C, seu ex E bis in B C. At productus ex E in B F. C F. seu V. continet productum ex E in B C. semel, & ex E in F bis. Igitur detracto V. ex T. reliquus X. continet productum ex B in C. & productum ex E in B C. Quare X quadratus est per quintam partem præcedentis, cuius latus componitur ex ipsis B D F. Quod erat propositum.

Denique ducatur E in reliquum A F & fiat Y. quo detracto ab eodem T. supersit Z. Dico & ipsum Z quadratum esse. Quia enim ex E in B F C F fit V. & ex eodem E in A F fit Y patet V. superare Y producto qui fit ex E in interuallum quo B F. C F superant A F. Sed eodem quo suprà, ductu vtentes inueniemus hoc interuallum continere ipsum B ter. F bis. A semel. Quare V. superat Y. producto ex E in B ter, in F bis, in A semel. Et loco producti ex E in A B semel, sumendo illi æqualem productum [a] ex E in D bis, & in seipsum semel fiet in- [a] *quarta,*
teruallum quo V superat Y æquale producto ex E in ipsos D B F bis, & quadrato *huius.*
ipsius E. Quoniam vero V X. simul, æquantur ipsis Y Z simul, [b] sunt in æquali [b] *quarta,*
differentia V Y. & Z X. Ergo interuallum quo Z superat X. æquatur duplo pro- *1. porism.*
ducti ex E in ipsos D B F. & quadrato ipsius E. Quamobrem cùm X ostensus sit quadratus, cuius latus componitur ex ipsis B D F. patet ad ipsum X. addendo quadratum ipsius E. & duplum producti ex ipso E in latus ipsius X, [c] compositum Z [c] *quarta,*
esse quadratum cuius latus constat ex ipsis D B F E seu ex D B & triplo ipsius E. *2.*
Quare ex omni parte constat propositum.

PROP. XVIII.

Si planus ſub duobus numeris contentus, ducatur in compoſitum ex ipſis, idem fiet numerus, atque ſi quadratus primi ducatur in ſecundum & quadratus ſecundi ducatur in primum.

D 12. E 18.
A 2. B 3.
C 6.

Sint duo numeri A B. & planus ſub ipſis contentus C. quo ducto ſigillatim in ipſos A. B. fiant D E. patet ergo [a] ſummam ipſorum D E. æqualem eſſe producto ex C in compoſitum ex ipſis A B. Hanc igitur ſummam dico æqualem eſſe productis ex quadrato ipſius A in B, & ex quadrato ipſius B in A. Nam ſumptis tribus numeris A. B & A rurſus, [b] idem gignetur numerus quomodocunque & quouis ordine inter ſe ducantur. Quare ducto A in A & producto, nempe quadrato ipſius A ducto in B, fiet idem D, qui fit ducto A in B & producto C in A. Eodem argumento probabitur numerum E fieri ducto quadrato ipſius B in A. Quamobrem conſtat propoſitum.

[a] *prima, 2.* [b] *tertia, 1. poriſm.*

PROP. XIX.

Si numerus ſecetur in duas partes, cubus totius æqualis eſt cubis partium, & numero qui fit ter ex toto numero in planum ſub partibus comprehenſum.

A...C..B
D.........G....K............M

Sit numerus A B ſectus in duas partes A C. C B. Dico cubum totius A B æquari cubis partium A C. C B, & numero qui fit ter ex toto A B in planum ſub ipſis A C. C B comprehenſum. Sumatur D M quadratus ipſius A B. [a] qui cùm ſit æqualis quadratis ipſorum A C. C B & plano bis ſub ipſis comprehenſo, eſto D G quadratus ipſius A C. & G K quadratus ipſius C B. & K M planus bis ſub A C. C B contentus. Itaque patet ex definitione cubi ex toto A B in totum D M produci cubum ipſius A B. [b] Ergo idem cubus producetur ductis ſingulis partibus ipſius A B in ſingulas ipſius D M. Ducto autem A C in ſuum quadratum D G. fit cubus ipſius A C. & ducto C B in ſuum quadratum G K. fit cubus ipſius C B. Ergo iam habemus cubos partium. Reſtat vt ducamus A C in G K, & C B in D G, tum vtrumque A C. C B in K M. [c] Atqui ducere ipſos A C. C B in K M. idem eſt atque ducere totum A B in K M. Quare cùm K M. ſit planus bis ſub partibus A C. C B contentus, patet ducere A C. C B in K M. idem eſſe atque ducere totum A B in planum bis ſub partibus comprehenſum. Rurſus autem ducere A C in G K, & C B in D G, [d] idem eſt atque ducere totum A B in planum ſub partibus comprehenſum. Quamobrem harum omnium multiplicationum producta ſimul, (ſeu cubus totius A B) æquantur cubis ipſorum A C. C B, & numero qui fit ter ex toto A B in planum ſub ipſis A C. C B comprehenſum. Quod erat oſtendendum.

[a] *quarta, 2.* [b] *ſchol. prima, 2.* [c] *prima, 2.* [d] *decima octaua, huius.*

PROP. XX.

Si numerus ſecetur in duas partes, cubus totius æqualis eſt cubis partium, & numeris qui fiunt ex qualibet parte in quadratum alterius ter.

A...C..B

Sit numerus A B ſectus in duas partes A C. C B. Dico cubum totius A B æquari cubis ipſorum A C. C B, & numeris qui fiunt ter ex quadrato ipſius A C in C B, & ex quadrato ipſius C B in A C. Etenim [a] cubus totius A B æquatur cubis ipſorum A C. C B, & numero qui fit ter ex A B in planum ſub A C. C B. Sed numerus qui fit ex A B in planum ſub A C. C B. [b] æquatur productis ex qualibet parte in quadratum alterius. Quare numerus qui fit ter ex A B in planum ſub partibus, æquatur eis qui fiunt ter ex qualibet parte in quadratum alterius. Igitur cubus totius A B æquatur cubis partium & numeris qui fiunt ter ex qualibet parte in quadratum alterius. Quod demonſtrandum erat.

[a] *decima nona, huius.* [b] *decima octaua, huius.*

PROP. XXI.

Duorum cuborum interuallum, æquatur cubo interualli laterum, &

numero qui fit ter ex eodem interuallo laterum in planum sub lateribus comprehensum.

A.... D .. B.... C
E 216. F 64.

Sint inæquales numeri A B. B C. quorum interuallum D B, ita vt A D. B C. sint æquales. Et cubus ipsius A B esto E, cubus autem ipsius B C sit F. Dico interuallum ipsorum E F. æquari cubo ipsius D B. & numero qui fit ter ex D B in planum sub A B. B C. Etenim [a] cubus totius A B, nimirum E æquatur cubis partium A D D B & numero qui fit ter ex A B in planum sub A D. D B. quare cùm A D sit æqualis B C. & ideo cubus ipsius A D sit F. patet E æquari ipsi F & cubo ipsius D B & numero qui fit ter ex A B in planum sub A D. D B. Sumptis autem tribus numeris A B. A D. D B. [b] idem producetur numerus quouis ordine ij inter se ducantur. Quare idem numerus qui fit ex A B in planum sub A D. D B. fiet etiam ex D B in planum sub A B. A D. seu sub A B. B C. Quamobrem cubus E æquatur cubo F, cubo ipsius D B, & numero qui fit ter ex D B in planum sub A B. B C. Itaque à cubo E auferendo cubum F, remanet interuallum cuborum æquale cubo interualli laterum D B, & numero qui fit ter ex eodem D B in planum sub lateribus A B. B C comprehensum. Quod demonstrandum erat.

[a] *decimanona, huius.*

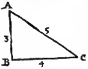
[b] *tertia, 1. porism.*

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI IN DIOPHANTVM PORISMATVM

Liber Tertius.

DEFINITIO I.

Triangulum rectangulum in numeris constitui dicitur, cùm tres exhibentur numeri, ita vt maioris quadratus, quadratis reliquorum simul sumptis æqualis sit.



Vt tres numeri 3. 4. 5. dicuntur constituere triangulum rectangulum quia maioris 5. quadratus 25. æqualis est quadratis 9. & 16. reliquorum 3. & 4. Cuius rei ratio pendet à quadragesima septima, 1ⁱ. Euclidis. Nam verbi gratia, si sit triangulum rectangulum A B C. cuius angulus rectus B. demonstrauit Euclides quadratum lateris A C. æquari quadratis ipsorum A B. B C.

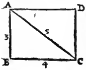
DEFINITIO II.

Maius latus trianguli rectanguli, dicitur Hypotenusa. Reliqua duo, latera circa rectum, & horum alterum, basis: alterum vocatur Cathetus seu perpendiculum.

Sic in superiore diagrammate A C vocatur hypotenusa seu subtendens, quia subtendit angulum rectum. Reliqua vero latera A B. B C dicuntur latera circa rectum, quia rectum angulum comprehendunt. Et horum alterum, puta B C dicitur basis, alterum A B dicitur perpendiculum, si triangulum concipiatur inniti lateri B C. vel è conuerso B C dicetur perpendiculum, & A B basis, si triangulum ipsi A B niti concipiatur.

DEFINITIO III.

Area trianguli rectanguli est semissis plani contenti sub lateribus circa rectum.



Sic positis lateribus circa rectum A B. B C. 3. & 4. cùm planum sub ipsis sit 12. erit area trianguli rectanguli A B C. numerus 6. Et ratio est euidens. Nam si perficiatur parallelegrammum rectangulum A B C D. patet eius aream fieri ducto latere A B in B C. Quamobrem cùm triangulum A D C. triangulo A B C sit æquale, manifestum est ipsum A B C. esse dimidium totius parallelegrammi, atque adeo eius aream esse dimidium producti ex A B in B C.

DEFINITIO IV.

Similia triangula rectangula dicuntur, quæ latera habent proportionalia.

Cùm scilicet est hypotenusa vnius ad hypotenusam alterius, sicut basis ad basim, & perpendiculum ad perpendiculum, qualia sunt triangula 3. 4. 5. & 12. 16. 20.

DEFINITIO. V.

A duobus planis similibus formari dicitur triangulum rectangulum, cùm ex eorum summa, & eorundem interuallo, & duplo medij proportionalis, constant latera trianguli.

Sic à planis similibus 3. & 12. dicetur formari triangulum. 15. 9. 12. quia 15. est summa planorum similium, 9. interuallum eorundem, 12. duplum medij proportionalis.

DEFINITIO VI.

A duobus quibuscunque numeris formari dicitur triangulum rectangulum, cùm ex aggregato & ex interuallo quadratorum ab ipsis, & ex duplo plani sub ipsis numeris cohrenti, constant larera trianguli.

Sic à duobus numeris 2. & 3. formari dicitur triangulum 13. 5. 12. Quia 13. est aggregatum quadratorum ab ipsis 2. & 3. & 5. est eorundem quadratorum interuallum, & 12. est duplum plani sub 2. & 3. contenti. Hos autem duos modos formandi triangulum rectangulum legitimos esse demonstrabimus hoc libro propositione tertia & quinta,

DEFINITIO VII.

A duobus datis triangulis rectangulis, tertium efformari dicitur, cùm productus ex hypotenusa 1'. in hypotenusam 2'. fit hypotenusa 3'. At aggregatum productorum ex basi 1'. in basim 2'. & ex perpendiculo 1'. in perpendiculum 2'. fit alrerum larus circa rectum 3'. Denique productorum ex basi 1'. in perpendiculum 2'. & ex basi 2'. in perpendiculum 1'. minus de maiori subtrahendo, fit alterum latus 3'.

Sic datis duobus triangulis 5. 4. 3. & 13. 12. 5. fiet tertij hypotenusa productum ex 5. & 13. nempe 65. alterum latus circa rectum erit aggregatum numerorum 48. & 15. qui fiunt ex basi in basim & ex perpendiculo in perpendiculum. Tertium vero latus erit quod relinquitur auferendo productum ex 4. in 5. nempe 20. à producto ex 3. in 12. nempe à 36. Erunt igitur latera omnia tertij trianguli. 65. 63. 16. Hic modus etiam demonstrabitur infrà, propositione decima.

PROP. I.

Si latera trianguli rectanguli per eundem numerum multiplicentur aut diuidantur, fit aliud triangulum rectangulum simile priori.

Hanc & sequenrem propositionem omnibus triangulis similibus in vniuersum applicatam demonstrauit Euclides libro sexto sed ex propriis numerorum principiis eruto demonstrationis medio, libet hîc vtramq; triangulis rectangulis singulariter applicare. Sint trianguli rectanguli latera circa rectum A B, & hypotenusa C. & horum quadrati D E F [a] ita vt F sit æqualis ambobus D E. ductoque eodem numero G in ipsos A B C. fiant H. K. L. quorum quadrati M. N. P. Dico H K L constituere triangulum rectangulum simile priori, nimirum quadratum P. ambobus M N esse æqualem, & latera H K L. esse proportionalia lateribus A B C. & quidem hoc vltimum patet, [a] cùm fiant H K L ex eodem G in ipsos A B C. Primum autem probatur. [b] Quia enim rationes ipsorum D E F ad ipsos M N P sunt duplicatæ rationum ipsorum A B C ad ipsos H K L, cùm vt ostensum est, sit A ad H, vt B ad K & vt C ad L, erit etiam D ad M vt E ad N, & vt F ad P. & permutando erit D ad P vt M ad P. & E ad F vt N ad P. Cùm ergo sit D primus ad P secundum, sicut M tertius ad P quartum, & rursus sit E quintus ad F secundum, sicut N sextus ad P quartum; [c] Erunt & D E simul, primus scilicet & quintus ad F secundum, sicut M N simul, nimirum tertius & sextus simul ad P quartum. Sed D E simul æquantur ipsi F ex hypothesi. Ergo & M N simul æquantur ipsi P. [d] Quare H K L constituunt triangulum rectangulum simile priori. Quod demonstrandum erat. Eadem porro diuisionis ratio est quæ multiplicationis vt manifestum est. Igitur constat propositum.

A 3.	B 4.	C 5.	D 9.	E 16.	F 25.
		G 2.			
H 6.	K 8.	L 10.	M 36.	N 64.	P 100.

[a] *definitio prima.*
[a] *decima septima 7'.*
[b] *vndecima, 8'.*
[c] *vigesima quarta, 5'.*
[d] *definitio prima.*

PROP. II.

Areæ similium triangulorum rectangulorum sunt in duplicata ratione homologorum larerum.

Sint latera triangulorum rectangulorum similium. A B C. D E F. & sint A & D

[a] defin. 3. [b] defin. 4.

K 48. G 24.
A 10. B 8. C 6.
D 5. E 4. F 3.
L 12. H 6.

hypothenuſæ B C. E F latera circa rectum. ductoque B in C fiat K. cuius ſemiſſis numerus G. [a] area ſcilicet trianguli A B C. ſimiliter ducto E in F fiat L, cuius ſemiſſis H. area trianguli D E F. Cùm ergo ſimilia ſint triangula, [b] erit A ad D vt B ad E & vt C ad F. Dico itaque eſſe aream G ad aream H in duplicata ratione lateris B ad latus E, vel lateris C ad latus F. Cùm enim plani K L habeant latera proportionalia, [c] erunt plani ſimiles, & erit K ad L in duplicata ratione lateris B ad latus E vel C ad F. Sed quia G eſt dimidium ipſius K, & H eſt dimidium ipſius L, eſt G ad H vt K ad L. Igitur & G ad H eſt in duplicata ratione laterum B C. ad latera E F. Quod demonſtrandum erat.

[c] decima octaua, 8'.

S c h o l i v m.

Quia igitur ſumpto denominatore rationis cuius libet, eius quadratus eſt denominator rationis duplicatæ illius, ſequitur ſumpto denominatore rationis laterum, eius quadratum eſſe denominatorem rationis arearum. vt in propoſito paradigmate, quia rationis inter latera denominator eſt 2. rationis inter areas denominator eſt 4. quadratus ipſius 2. & ſic de alijs.

P R O P. III. Problema 1.

A duobus ſimilibus planis numeris, triangulum rectangulum efformare.

[a] decima octaua, 8'.

A 3. B 6. C 12.
D 9. E 12. F 15.

Sint duo plani ſimiles A C à quibus oporteat formare triangulum rectangulum. [a] Sumatur B medius proportionalis ipſorum A C. Et ſit amborum A C. ſumma F, interuallum D & duplum ipſius B eſto E. Patet tres D E F efformatos eſſe ab ipſis A B C vt traditum eſt definitione quinta. Dico itaque tres D E F conſtituere triangulum rectangulum. Quia enim F eſt ſumma amborum A C. [b] erit quadratus ipſius F æqualis quadruplo plani ſub A & C. & quadrato interualli ipſorum A C, qui eſt quadratus ipſius D. [c] At quadruplum plani ſub A & C. æquatur quadruplo quadrati ipſius B. cùm A B C ponantur proportionales, [d] & quadruplum quadrati ex B, eſt quadratus dupli ipſius B, nimirum ipſius E. Igitur quadratus ipſius F eſt æqualis quadratis ipſorum D E. [e] atque adeo D E F conſtituunt triangulum rectangulum. Quod erat propoſitum.

[b] quinta, 2'. poriſm. [c] vigeſima, 7. [d] Schol. quartæ, 2'. [e] defin. 1.

C o r o l l a r i v m.

Summa duorum planorum ſimilium conſtituit. hypotenuſam trianguli rectanguli.

Hinc patet quemlibet numerum ſtatui poſſe hypotenuſam trianguli rectanguli, cùm quiliber numerus diuidi poſſit in duos datam rationem ſeruantes, atque adeo infinitis modis componi poſſit ex duobus planis ſimilibus. vnde & erui poteſt canon ad diuidendum quemlibet quadratum in duos quadratos infinitis modis, vt docebimus ad octauam 2'. Diophanti.

P R O P. IV.

Cuius libet trianguli rectanguli hypotenuſa componitur ex duobus planis ſimilibus.

[a] vigeſima, 1'. poriſm. [b] ſchol. vigeſimæ tertiæ, 9'. [c] vigeſima prima 1'. poriſm. [d] vndecima, 1'. poriſm.

D 100. E 64. F 36.
A 10. B 8. C 6.
G......H..K..L......M

Sit hypotenuſa trianguli rectanguli A & latera circa rectum B C. & ipſorum A B C. quadrati D E F. ita vt D ipſis E F ſit æqualis. Dico A componi ex duobus planis ſimilibus. Vel enim A eſt par, vel impar Sit primũ par. Ergo & D par eſt, [a] & pariter par. Igitur non erit ipſorum E F alter par, alter impar, alioquin [b] cõpoſitus ex ipſis D eſſet impar, contra id quod oſtẽſum eſt. Non erit etiam vterque ipſorum E F impar, [c] nam ſic vterque ipſorum excederet pariter parem vnitate, atque adeo compoſitus ex ipſis D. excederet pariter parem binario, [d] & eſſet pariter impar tantum, at oſtenſus eſt pariter par. Relinquitur ergo vtrumq; E F eſſe parem, Quare & vterque B C. par eſt. Itaque ſumatur ipſi A æqualis G L atque adeo par,

& addatur ei L M æqualis alteri laterum circa rectum puta C. erit igitur & L M par. [e] Quare totus G M par etiam erit. Secetur ergo bifariam in K & ipsi K L sumatur æqualis H K. ita vt reliquus G H. reliquo L M. seu C. sit æqualis, Cùm ergo G L componatur ex duobus G K. K L. [g] erit quadratus totius G L, seu D. æqualis quadruplo plani sub G K. K L. & quadrato interualli G H qui est F. At idem D est æqualis quadratis E F ex hypothesi, ergo quadrati E F æquantur quadruplo plani sub G K. K L. & quadrato F. Quare ablato vtrimque F. remanet E æqualis quadruplo plani sub G K. K L. Quamobrem planus sub G K. K L æquatur quadranti ipsius E, seu quadrato semissis ipsius B. [h] & ipse semissis ipsius B est medius proportionalis inter G K. & K L. vnde sequitur ipsos [k] G K. K L. esse planos similes. Quamobrem A æqualis G L. componitur ex duobus planis similibus. Quod erat propositum.

[e] vigesima prima, 9. [g] quinta, 2. porism. [h] vigesima, 7. [k] vigesima, 8.

D 169.	E 144.	F 25.
A 13.	B 12.	C 5.

G....H....K....L....M

Iam vero sit A impar, atque ideo & D impar. Igitur ex ipsis E F alterum parem, alterum imparem esse necesse est. Nam siue vterque ponatur par, siue vterque impar, [a] erit compositus ex ipsis D par, contra hypothesim. Sit ergo E par. F impar. Igitur & B par erit, & C impar. Itaque sumpto G L æquali ipsi A, & ideo impare, addatur ei L M impari C. æqualis. [b] erit ergo totus G M par. Quare secetur bifariam in K & ipsi K L sumatur æqualis H K, ita vt G H remaneat æqualis ipsi L M. Tunc, vt prius ostendemus, quadratum ex G L. seu D æquari quadruplo plani sub G K. K L. & quadrato interualli G H qui est F. & tandem quadratum E æquari quadruplo plani sub G K. K L. atque ideo planum ipsum sub G K. K L æquari quadrato semissis ipsius B. Vnde sequitur ipsos G K. K L esse planos similes. Quamobrem A componitur ex duobus planis similibus. Quod erat ostendendum.

[a] vigesima prima & vigesima secunda 9. [b] schol. vigesimætertia, 9.

SCHOLIVM.

Hinc patet qui sint illi plani similes ex quibus componitur hypotenusa trianguli. Nam si hypotenusæ addatur & adimatur vtrumlibet laterum circa rectum, semisses summæ, & interualli exhibebunt planos illos similes.

Vnde rursus collige si hypotenusa sit numerus par, eam semper bis componi ex duobus planis similibus integris. Nam tunc vt ostensum est, vtrumque latus circa rectum est par, quare vtrumlibet addatur & adimatur hypotenusæ, erunt summæ & interualla numeri pares, & eorum semisses in integris habebuntur. Sic posita hypotenusa 10. si ei addas & adimas 6. fiet summa & interuallum 16. & 4. quorum semisses 8. & 2. sunt plani similes ex quibus 10. constat, Rursus si eidem 10. addas & adimas alterum latus 8. sit summa & interuallum 18. & 2. quorum semisses 9. & 1. sunt alij duo plani similes ex quibus 10. componitur.

Si vero hypotenusa sit impar, cùm vt ostensum est, alterum laterum circa rectum sit par, alterum impar. Componetur hypotenusa semel tantum ex integris duobus planis similibus, qui habentur si ei addatur & adimatur latus illud quod est impar, & summæ & interualli semisses sumantur; sed si hypotenusæ addatur & adimatur latus par, tam summa quàm interuallum impar erit, atque adeo semisses eorum non habebuntur in integris.

PROP. V. Probl. 2.

A duobus quibuscumque inæqualibus numeris triangulum rectangulum formare.

A 2.	B 5.	
C 4.	D 10.	E 25.
F 29.	G 21.	H 20.

Sint duo numeri inæquales A B à quibus oportet formare triangulum rectangulum. Sint ipsorum A B quadrati C E. & productus ex A in B. esto D. Tunc duorum C E summa esto F, & eorundem interuallum G. & sit H duplum ipsius D. Dico F G. H esse triangulum rectangulum quæsitum. Nam ipsos F G H formari ab ipsis A B vt traditum est definitione sexta manifestum est. Restat probandum eosdem F G H constituere triangulum. Quoniam ergo C E sunt plani similes, & D medius eorum proportionalis, patet ab ipsis C E formatos esse F G H, atque adeo F G H constituere triangulum rectangulum per tertiam huius. Quare constat propositum.

SCHOLIVM.

Inæquales numeros esse oportet. Alioquin si æquales essent, quadrati quoque eorum essent æquales, & haberi non posset latus circa rectum quod est interuallum quadratorum. Cæterum patet modum hunc formandi triangulum à duobus quibuscumque numeris non differre ab eo qui traditus est propositione tertia, si loco laterum sumantur ipsa quadrata & ab ipsis concipiatur formari triangulum.

PROP. VI.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, aggregatum quadratorum à singulis, æquatur quadratis summæ extremorum, & interualli mediorum. Itemque quadratis summæ mediorum, & interualli extremorum.

H 8. K 1.
A 2. B 4. C 3. D 6.
G 7. L 4.

Sint A B C D quatuor numeri proportionales, sit videlicet A ad B vt C ad D. & sit extremorum summa H, mediorũ interuallũ K. Rursus sit mediorũ summa G. interuallum extremorum L. Dico quadratorum à singulis A B C D aggregatum æquari tum quadratis ipsorum H. K. tum quadratis ipsorum G L. Quia enim [a] quadratus H æqualis est quadratis partiũ A & D & duplo plani sub A & D [b] seu plani sub B & C. duplum autem plani sub B & C cum quadrato interualli eorum K [c] æquatur quadratis ipsorum B C. Manifestum est quadratos singulorum A B C D æquari quadratis ipsorum H K. Eadem prorsus ratione, quia quadratus abs G. æquatur quadratis partium B. C. & plano bis sub B & C. seu sub A & D. & planus bis sub A & D vnà cum quadrato interualli eorum L. æquatur quadratis ipsorum A D, sequitur quadratos abs G & L æquari rursus quadratis à singulis A B C D. Quamobrem constat propositum.

[a] quarta, 2. [b] decima nona, 7. [c] quarta, 2. porism.

PROP. VII.

Si numerus ex duobus inæqualibus quadratis compositus, ducatur in alium compositum quoque ex duobus inæqualibus quadratis, qui non sint proportionales iis ex quibus prior componitur, producetur numerus qui componetur bis ex duobus quadratis.

C 65.
A 5. B 13.
D 1. E 4. F 4. G 9.
H 1. K 2. L 2. M 3.
N 2. P 4. Q 3. R 6.

Sit A compositus ex duobus quadratis inæqualibus D E. itemque B compositus ex aliis quadratis inæqualibus F G. qui non sint proportionales ipsis D E. ductoque A in B. fiat C. Dico C componi bis ex duobus quadratis. Etenim quadratorum D. E. F G latera sunto H K L M. ductoque L. in ipsos H K. fiant N P, & ducto M in eosdem H K. fiant Q R. [a] Erit igitur tam N ad P quàm Q ad R sicut H ad K. Quare ipsi N. P. Q. R. sunt proportionales. Quia verò ducere A in B [b] idem est ac ducere singulos D E in singulos F G. At ex singulis quadratis D E in singulos quadratos F G. fiunt quadrati quatuor quorum latera sunt ipsi N. P. Q. R. qui fiunt ex singulis lateribus H K. in singula latera L M. patet C æqualem esse quadratis ipsorum N. P. Q. R. [c] sed quadrati ipsorum N P Q R. æquantur tum quadrato summæ extremorũ N R. & quadrato interualli mediorum P Q. tum quadrato summæ mediorum P Q. & quadrato interualli extremorum N R. Igitur & C æquatur tum quadrato summæ extremorum, & quadrato interualli mediorum; tum quadrato summæ mediorum, & quadrato interualli extremorum, ac proinde componitur bis ex duobus quadratis. Quod erat demonstrandum.

[a] decima septima 7. [b] schol. prima, 2. [c] sexta, huius.

SCHOLIVM.

Hic duæ veluti conditiones apponuntur. Prima vt vterque A B componatur ex quadratis in æqualibus. Secunda vt quadrati componentes A non sint proportionales componentibus B. Quarum conditionum vt necessitas appareat, ponatur alter ipsorum, puta B com-

	C 136.		
	A 17.	B 8.	
D 16.	E 1.	F 4.	G 4.
H 4.	K 1.	L 2.	M 2.
N 8.	P 2.	Q 8.	R 2.

puta B componi ex quadratis æqualibus F G. Igitur & latera L. M. erunt æqualia. Quare ipsi N & Q. qui fiunt ex eodem H in L & in M. æquales erunt, similiter æquales erunt ipsi P R cùm fiant ex eodem K in æquales numeros L. M. Patet igitur extremorum N R summam æquari summæ mediorum P Q. & vtrorumque etiam idem esse interuallum. Quare C non exinde componetur bis ex duobus quadratis, sed tantum semel, nimirum ex quadrato summæ extremorum, vel mediorum, & ex quadrato interualli eorundem.

	C 100.		
	A 5.	B 20.	
D 1.	E 4.	F 4.	G 16.
H 1.	K 2.	L 2.	M 4.
N 2.	P 4.	Q 4.	R 8.

Iam verò quadrati D E sint proportionales quadratis F G. Ergo & latera erunt proportionalia, eritque H ad K, sicut L ad M. [a] Quare planus sub extremis H M, puta Q. æqualis erit plano sub mediis nempe ipsi P. Quamobrem cùm mediorum P. Q. nullum sit interuallum non poterit concludi numerum C. componi ex duobus quadratis, eò quod æqualis sit quadrato summæ extremorum N R, & quadrato interualli mediorum P Q. Sed tantum ostendi poterit C componi semel ex duobus quadratis, quia æquatur quadrato summæ mediorum P Q & quadrato interualli extremorum N. R. Sed & hinc constat ipsum C esse quadratum, æqualem scilicet quadrato summæ extremorum N R. Quod & ipsum aliunde arguitur. Quia enim est D ad F vt E ad G, [b] erit & vterque D E simul seu A ad vtrumque F G simul seu ad B. sicut D ad F. Quare cùm D F sint quadrati, est A ad B in ratione quadrati ad quadratum, [c] ac proinde A B sunt plani similes, & [d] ex eorum mutuo ductu productus C est quadratus.

[a] decimanona, 7. [b] duodecima, 7. [c] vigesima sexta, 8. [d] prima, 9.

Attamen in propositionis conditione dixi potius quadratos ex quibus A componitur non debere esse proportionales quadratis componentibus B, quàm A B non debere esse planos similes. Quia plani similes non omnino excludendi erant, sed tantum quatenus ex quadratis proportionalibus componuntur; nam si dentur plani similes qui componantur ex quadratis minimè proportionalibus, ij optimè satisfacient proposito quales sunt 5. & 125. quorum ille componitur ex quadratis 1. & 4. iste vero ex quadratis 4. & 121. qui non sunt illis proportionales. Vnde nihil obstat quo minus per hanc propositionē concludamus productum ex 5. in 125. componi bis ex duobus quadratis, nimirum ex 225. & 400. Itemque ex 576. & 49.

PROP. VIII.

Si duorum triangulorum rectangulorum latera circa rectum proportionalia fuerint, similia erunt triangula. Sed & si fuerit hypotenusa primi ad alterum latus eiusdem, sicut hypotenusa 2'. ad alterum illius latus, similia erunt ipsa triangula.

Demonstratur hoc ab Euclide in omnibus triangulis lib. 6. prop. sexta & septima.

G 25.	H 16.	K 9.
A 5.	B 4.	C 3.
D 10.	E 8.	F 6.
L 100.	M 64.	N 36.

Sit triangulum rectangulum A B C. cuius hypotenusa A. Itemque triangulum rectangulum D E F cuius hypotenusa D. & primo sit B ad E sicut C ad F. Dico triangula esse similia. Sumantur G H K quadrati ipsorum A B C. itemque L M N. quadrati ipsorum D E F. Cùm ergo sit B ad E vt C ad F, erit & H ad M vt K ad N [a] cùm vtraque ratio sit eiusdem rationis duplicata. [b] Igitur & antecedentes simul H K seu G. ad consequentes simul M N. seu ad L. erunt vt H ad M vel K ad N. Quare cùm sit G ad L vt H ad M vel vt K ad N. [c] erit & A ad D vt B ad E & vt C ad F. Atque ideo tota triangula similia erunt ex definitione. Quod erat propositum.

[a] vndecima 8. [b] duodecima, 7. [c] vndecima, 8.

Deinde sit A ad D vt B ad E. Dico rursus similia esse triangula. Etenim quia est A ad D vt B ad E, erit & G ad L vt H ad M. Quare permutando erit G ad H vt L ad M. & diuidendo erit K ad H vt N ad M. & rursus permutando erit K ad N vt H ad M. Igitur est & C ad F vt B ad E vel vt A ad D. Ac proinde similia sunt triangula. Quod erat demonstrandum.

PROP. IX.

A proportionalibus numeris formata triangula, similia sunt.

E 4. F 1. G 36. H 9.
[a quinta, huius.] A 2. B 1. C 6. D 3.
K 5. L 3. M 4. N 45. P 27. Q 36.

Sint proportionales numeri A B. C D. quorum quadrati E F. G H[a] à quibus formentur triangula rectangula, sit videlicet K. summa ipsorum E F, at L eorundem interuallum, M duplum medij proportionalis. Similiter sit N. summa ipsorum G H. At P eorundem interuallum, Q duplum medij proportionalis. Dico triangula K L M. N P Q. esse similia. Quia enim est A ad B vt C ad D. erit & E ad F vt G ad H. & componendo erit vterque E F simul, nempe K ad F. sicut ambo G H, nempe N. ad H. Rursus quia est E ad F vt G ad H, diuidendo & conuertendo, erit F ad L, sicut H ad P. Cùm ergo sit K ad F vt N ad H, & rursus F ad L, vt H ad P. erit ex æquo K ad L. vt N ad P. [b] Quamobrem similia erunt triangula K L M. N P Q. Quod erat propositum. Eademque erit demonstratio si formentur triangula à planis similibus proportionalibus vt traditum est prop. tertia. Nam si ponantur huiusmodi plani E F. G H. ab eis formata erunt triangula K L M. N P Q. quæ ostendentur similia vt prius.

[b octaua, huius.]

P R O P. X. Problema 3.

A datis duobus triangulis non similibus, efformare alia duo.

A 5. B 12. C 13.
D 3. E 4. F 5.

K 36. H 15. | T 39.
L 20. G 48. | V 52.

M 56. N 33. |
P 16. Q 63. | R 65.

Sit triangulum rectangulum A B C. & aliud non simile D E F, à quibus oporteat efformare alia duo: ducatur basis A in basim D, & perpendiculum B in perpendiculum E & fiant H G. Tum ducatur basis D in perpendiculum B & basis A in perpendiculum E & fiant K L. Deinde additis K & L simul fiat M. & ex duobus H G minor de maiore auferatur & supersit N. Similiter addantur H G. & fiat Q. & ex ipsis K L minor de maiore detrahatur, & supersit P. Denique ducatur hypotenusa C. in hypotenusam F & fiat R. Dico M N R. & P Q R esse quæsita triangula. Primum enim ea formata esse constat à datis triangulis, vt traditum est definitione septima, si videlicet latera A D. vel B E nunc vt bases nunc vt perpendicula considerentur. Igitur restat solum probandum M N R constituere triangulum rectangulum, itemque P Q R. Ducatur C in ipsos D E & fiant T V. Cùm ergo idem C ductus in singulos D E F fecerit ipsos T V R. [a] patet T V R constituere triangulum rectangulum, & quadratum ab R æquari quadratis abs T. & V. Similiter quia idem D ductus in sigulos B A C. producit ipsos K H T. constituunt & hi triang. rect. & quadratus abs T æquatur quadratis abs K & H. Rursus quia idem B ductus in singulos A B C. producit ipsos L G V. constituunt & hi triang. rect. & quadratus ab V æquatur quadratis abs L. & G. Quare cùm quadratus ab R sit ostensus æqualis quadratis abs T & V. erit quadratus ab R æqualis quadratis à singulis K H L G. [b] Quoniam verò ex eodem D in ipsos B A producuntur K H. erit K ad H vt B ad A. Similiter quia ex E in eosdem B A fiunt G L. erit G ad L vt B ad A, ac proinde erit K ad H vt G ad L. Quamobrem [c] aggregatum quadratorum à singulis K H L G. seu quadratus ab R. æquatur quadrato summæ extremorum seu quadrato ab M. & quadrato interualli mediorum seu quadrato ab N. Quare M N R constituunt triang. rectang. Rursus idem aggregatum quadratorum à singulis K H L G. seu quadratus ab R æquatur quadrato summæ mediorum seu quadrato abs Q. & quadrato interualli extremorum seu quadrato abs P. Quamobrem & ipsi P Q R. constituunt triang. rectang. Itaque ex omni parte constat propositum.

[a prima, huius.]
[b decima septima 7.]
[c sexta, huius.]

S C H O L I V M.

A 6. B 8. C 10.
[a decima nona, 7.] D 3. E 4. F 5.

K 24. H 18.
L 24. G 32.

M 48. N 14. R 50.
P — Q 50.

Data duo triangula non debent esse similia, alioquin ab illis vnicum tantum efformabitur triangulũ. Nam si sit A ad B vt D ad E, [a] *erit planus sub extremis L. æqualis plano sub mediis K.* [d] *Quamobrem ipsorum K L. interuallũ P. nullum erit, nec formari poterit triangulum P Q R. Sed tantũ ex summa ipsorum K L fiet latus M. & ex interuallo ipsorum H G. fiet latus N. unde constituetur unicum triangulum M N R. Cæterum Q. æqualis erit ipsi R.*

PROP. XI. Probl. 4.

Inuenire tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub basibus sit in ratione quadrati numeri ad quadratum numerum.

	H 100.	
R 10.	V 12.	T 48.
A 5.	B 4.	C 3.
D 41.	E 40.	F 9.
G 34.	K 30.	L 16.
P 1200.	M 48.	
Q 4800.	N 432.	

Exponatur triang. rect. A B C. cuius hypotenusa A. perpendiculum B. basis C. [a] Deinde ab ipsis A & B formetur aliud triang. rect. ita vt hypotenusa D sit summa quadratorum, perpendiculum E sit duplum producti multiplicationis & basis F sit interuallum quadratorum, nimirum quadratus ipsius C. Denique ab ipsis A C. formetur etiam tertium triangulum, cuius hypotenusa G sit summa quadratorum, perpendiculum K duplum producti, & basis L differentia quadratorum, nempe quadratus ipsius B. Dico tria hæc triangula præstare quod requiritur. Ducto enim E in K fiat P. quo ducto in B fiat Q. similiter ducto C in L fiat M, quo ducto in F fiat N. Dico Q solidum sub perpendiculis, ad N solidum sub basibus habere rationem quadrati ad quadratum. Sumatur R duplum ipsius A. & ex B in C fiat V, quo ducto rursus in B fiat T. Quia ergo sumptis tribus numeris B C. & B rursus, [b] idem fit numerus quouis ordine inter se ducantur, ducto autem B in C & producto V in B fit T. At ducto B in B & producto L in C. fit M. sunt vtique T & M æquales. Quia vero ex B in A bis, seu ex B in R fit E, & ex C in R fit K. consideratis quatuor numeris B. R. C. R. idem fiet numerus quouis ordine inter se ducantur. Sed ducto B in R. vnde fit E, & ducto C in R vnde fit K, & demum ducto E in K producitur P. Igitur si ducatur R in R vnde fit H, & B in C vnde fit V. ac demum V ducatur in H. fiet idem P. Cùm igitur idem V ductus in H & in B producat ipsos P T. seu P M. [c] erit H ad B sicut P ad M. [d] Quare qui fit ex mutuo ducto mediorum B P. nempe solidus Q. fit etiam ex ductu extremorum H M. Cùm igitur ex eodem M in ipsos H & F fiant solidi Q N. [e] erit Q ad N. sicut H ad F. Quare cùm H & F sint quadrati, erit Q ad N in ratione quadrati ad quadratum. Quod demonstrandum erat.

[a] *quinta, huius.* [b] *tertia, 1. porism.* [c] *decima septima, 7.* [d] *decima nona, 7.*

S C H O L I V M.

Notatu dignissimum est iisdem prorsus manentibus triangulis, solidos Q N quadrupliciter variari posse, prout latera circa rectum nunc fient bases, nunc perpendicula, & omnibus tamen modis ratio solidi ad solidum erit quæ quadrati ad quadratum, quod miraculo simile videtur.

	H 100.			H 100.	
A 5.	B 4.	C 3.	A 5.	C 3.	B 4.
D 41.	E 40.	F 9.	D 41.	E 40.	F 9.
G 34.	K 30.	L 16.	G 34.	K 30.	L 16.
Q 4800.	N 432.		Q 3600.	N 576.	

Primus casus est, qui in demonstratione exhibetur, quo probatum est esse Q ad N. sicut H ad F.

Secundus est cùm reliquis omnibus inuariatis manentibus B fit basis, & C perpendiculum. Et tunc solidus sub ipsis C E K nempe Q. ad solidum sub B F L. seu ad N est in ratione quadrati H ad quadratum L. quod iisdem prorsus argumentis probatur. Itaque in his duobus casibus solidus ad solidum est vt quadratus H ad quadratum F, vel ad quadratum L, prout solidus N. fit à producto ex quadratis F L in latus ipsius F vel in latus ipsius L.

A 5.	B 4.	C 3.
D 41.	F 9.	E 40.
G 34.	K 30.	L 16.
Q 1080.	N 1920.	

Tertius casus est cùm primi & tertij trianguli lateribus in eadem dispositione manentibus, secundi latera transponuntur, & fit E basis, F perpendiculum. Et tunc solidus Q ad solidum N. se habet vt quadratus F ad quadratum L. Quod ita probatur. Quia E K producuntur ex eodem duplo ipsius A in ipsos B C. patet esse B ad C vt E ad K. [a] *Igitur ex B in K idem fit numerus qui fit ex C in E. Quare cùm producto ex B in K ducto in F fiat Q. Et producto ex C in E ducto in L. fiat N. patet eodem numero ducto in ipsos F & L. fieri ipsos Q. & N.* [b] *Quare est Q ad N vt F ad L. Quod erat propositum.*

[a] *decima nona, 7.* [b] *decima septima 7.*

	R 10.	
A 5.	B 4.	C 3.
D 41.	E 40.	F 9.
G 34.	L 16.	K 30.
Q 2560.		N 810.

Quartus denique caſus eſt cùm lateribus 1. & 2. trianguli eodem loco manentibus, mutantur latera tertij, & fit L perpendiculum K baſis. Tuncque ſolidus Q ad ſolidum N. ſe habet vt quadratus ipſius L ad quadratum ipſius F. Quod ſic probatur. Quia ex B in R fit E. ſi conſiderentur quatuor numeri B. R. B. L. [a] *idem fiet numerus quouis ordine inter ſe ducantur. Igitur cùm ducto B in R, & producto E in B, & producto rurſus in L. fiat Q ſolidus, idem ſolidus fiet ducto B in B, & producto, quadrato ſcilicet ipſius B ducto in L ſibi aequalem, & rurſus producto, quadrato ſcilicet ipſius L ducto in R. Quare Q fit ex R in quadratum ipſius L. Eodem prorſus argumento probatur ſolidum N. fieri ex R in quadratum ipſius F. Proinde patet eſſe Q ad N. vt quadratus ipſius L ad quadratum ipſius F.*

[a] *tertia, 1. poriſm.*

Vnde colligas in hoc caſu Q ad N eſſe non ſolum in ratione quadrati ad quadratum, ſed & in ratione quadratoquadrati ad quadratoquadratum, cùm L. F ſint quadrati ac per conſequens quadrati eorum ſint quadratoquadrati quorum latera ipſi B. C.

Supereſt vt moneam licere loco cuiuſlibet ſic inuentorum triangulorum, aliud ſimile ponere, & eadem manebit ſemper quae prius, ratio ſolidi ad ſolidum, quod vnica demonſtratione omnibus caſibus conueniente demonſtrari poteſt, hac arte. Loco trianguli G L K ſumatur triangulum illi ſimile T. V. X. & latera homologa intelligantur eadem ratione diſpoſita, & ſolidus ſub ipſis B E V eſto Y. ſolidus ſub ipſis C F X eſto Z. Dico eſſe Y ad Z ſicut Q ad N. Quia enim idem productum ex B in E ductum tum in L tum in V. producit ſolidos Q Y. erit Q ad Y ſicut L ad V. Similiter quia idem productum ex C in F ductum in ipſos K X producit N. & Z. erit N ad Z ſicut K ad X. ſed eſt L ad V vt K ad X ex hypotheſi ob ſimilitudinem triangulorum. Igitur eſt etiam Q ad Y vt N ad Z. & permutando eſt Q ad N. vt Y ad Z. Quod demonſtrandum erat.

A 5.	B 4.	C 3
D 41.	E 40.	F 9.
G 34.	L 16.	K 30.
T 17.	V 8.	X 15.
Q 2560.		N 810.
Y 1280.		Z 405.

PROP. XII. Problema 5.

Inuenire duo triangula rectangula, vt planus ſub perpendiculis, ſuperet planum ſub baſibus numero quadrato, vel cubo, vel quadratoquadrato, vel quadratocubo, vel cubocubo.

	D 6.				
A 5.	B 4.	C 3.			
E 13.	F 5.	G 12.	Q 36.	K 20.	R 16.
H 52.	K 20.	L 48.	S 144.	N 80.	T 64.
M 108.	N 80.	P 192.	V 576.	X 320.	Y 256.

Exponatur quodlibet triang. rect. A B C. ita vt D duplum perpendiculi C ſit maius baſi B. & ab ipſis [a] B D. formetur triangulum H K L. ita vt H ſit aggregatum quadratorũ, baſis K ſit interuallum eorundem & perpendiculum L. ſit duplum producti ex B in D. Deinde ſingula latera H K L. diuidantur per baſim B & [b] fiat aliud triangulum ſimile E F G.

[a] *quinta, huius.*

[b] *prima, huius.*

Dico primo haberi duo triangula A B C. E F G. ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus quadrato numero. Etenim ducto C in G fiat Q. & quia ducto B in F fit K ex conſtructione, auferatur K ex Q. & ſuperſit R. Dico R eſſe quadratum. Quia enim D eſt duplus ad C. productus bis ex B in D nempe L aequatur quadruplo producti ex B in C. Quare diuiſo L per B quotiens G eſt quadruplus ad C. Cùm ergo ex C in G fiat Q. erit Q quadruplus quadrati ipſius C. ſeu aequalis quadrato ipſius D. Proinde cùm K ſit interuallum quo quadratus ex D. nempe Q ſuperat quadratũ ex B patet auferendo K ex Q reſiduum R eſſe quadratũ ipſius B. Quod erat propoſitum.

Dico ſecundo haberi duo triangula A B C. H K L. ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero cubo. Etenim ducto C in L fiat S. & ducto B in K fiat N. quo detracto ex S. ſuperſit T. Dico T eſſe cubum. Quia enim ex eodem C in ipſos G L fiunt Q S. erit Q ad S vt G ad L. Rurſus, quia ex eodem B in ipſos F K, fiunt K N. erit K ad N vt F ad K. Quare cùm ob ſimilitudinem triangulorum ſit F ad K vt G ad L. erit & Q ad S. vt K ad N. Ideo cùm ſit vt totus Q ad totum S ſic ablatus K ad ablatum N. erit & reliquus R ad reliquum T. in eadem ratione. Sed rationis F ad K ſeu G ad L. denominator eſt B ex conſtructione. Igitur & rationis R ad T idem B

denominator erit, ac proinde ex B in R fiet T. Igitur cùm ex B in suum quadratum R. fiat T. erit T cubus ipsius B. Quod erat propositum.

Rursus si B ducatur in triangulum H K L. & fiat aliud simile M N P. Dico haberi duo triangula A B C. M N P. ita vt planus sub perpendiculis superet planum sub basibus numero quadratoquadrato. Etenim si C ducatur in P vnde fiat V. & B ducatur in N vnde fiat X quo detracto ex V relinquatur Y. Dico Y esse quadratoquadratum. Nam eodem quo prius argumento ostendemus esse T ad Y sicut K ad N vel L ad P. Quare cùm rationis K ad N vel L ad P denominator sit B ex constructione; erit idem B denominator rationis T ad Y ac proinde ex B in suum cubum T fiet Y. Quare Y erit quadratoquadratus ipsius B. Similiter, si B ducatur rursus in triangulum M N P. fiet aliud simile quod cum triangulo A B C exhibebit duo triangula ita vt planus sub perpendiculis superet planum sub basibus numero quadratocubo, nimirum quadratocubo ipsius B. Et si rursus B ducatur in vltimum triangulum, fiet aliud quod cum ipso A B C duo exhibebit triangula, ita vt planus sub perpendiculis superet planum sub basibus cubocubo ipsius B. Igitur ex omni parte constat propositum.

P R O P. X I I I. Probl. 6.

Inuenire duo triangula rectangula vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus, faciat quadratum, vel cubum, vel quadratoquadratum, vel quadratocubum, vel cubocubum.

	D 10.				
A 13.	B 12.	C 5.			
E $20\frac{1}{3}$.	F $3\frac{2}{3}$.	G 20.	Q 100.	K 44.	R 144.
H 244.	K 44.	L 240.	S 1200.	N 528.	T 1728.
M 2928.	N 528.	P 2880.	V 14400.	X 6336.	Y 20736.

Exponatur triang. rect. A B C. ita vt D duplum basis C. sit minus perpendiculo B. [a] Et ab ipsis B D formetur aliud triangulum H K L vt supra, cuius omnia latera diuidantur per B & [b] fiat triangulum simile E F G. Dico primo duo triangula A B C. E F G huiusmodi, esse vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat quadratum. Etenim ducto C in G fiat Q. cui addatur K productus ex B in F ex constructione & fiat R. dico R esse quadratum. Quia enim D est duplus ad C. & ex B in D bis fit L, idem L fiet ex B in quadruplum ipsius C. Quare cùm diuidendo L per B fiat G. erit G quadruplus ipsius C. proinde Q productus ex C in G æquabitur quadtuplo quadrati ipsius C, seu quadrato ipsius D. cùm ergo K sit interuallum quo quadratus ex B superat quadratum ex D nempe ipsum Q. addendo Q. & K summa R. erit quadratus ipsius B. Quod erat propositum.

[a] quinta, huius.

[b] prima, huius.

Dico secundo duo triangula A B C. H K L. talia esse vt planus sub perpẽdiculis cum plano sub basibus faciat cubum. Nam ducto C in L fiat S. ductoque B in K fiat N quo addito ad S. fiat T. Dico T esse cubum. Etenim quia ex eodem C in G & in L. fiunt Q S. & ex eodem B. in ipsos F K. fiunt K N. erit Q ad S. vt G ad L. & erit K ad N. vt F ad K. sed est F ad K vt G ad L ob similitudinem triangulorum, ergo est & Q ad S. vt K ad N. Quare & erunt antecedentes simul nempe R ad consequentes simul nempe ad T vt K ad N. sed B est denominator rationis K ad N ex constructione, ergo & rationis R ad T. Quamobrem ex B in R fiet T. vnde cùm R sit quadratus ipsius B vt ostensum est, erit T cubus eiusdem B. Quod erat propositum.

Rursus si B ducatur in triangulum H K L. & fiat aliud simile M N P. Dico tertio duo triangula A B C. M N. P huiusmodi esse vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat quadratoquadratum. Etenim si C. ducatur in P & fiat V, & B ducatur in N. & fiat X. quo addito ad V fiat Y. Dcio Y esse quadratoquadratũ. Nam eodẽ quo prius argumento ostendemus esse T ad Y, sicut N ad X. Quare cũ ex B in N fiat X, necesse est etiam ex B in T fieri Y. ac proinde cùm T ostẽsus sit cubus ipsius B, erit N quadratoquadratus eiusdem B. Similiter si B ducatur rursus in triangulum M N P. fiet aliud simile quod cum triãgulo A B C. ostendetur esse huiusmodi vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat quadratocubũ ipsius B. Ac demum si B ducatur rursus in vltimum triangulum, fiet aliud, quod cum ipso A B C, ostendemus esse huiusmodi, vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat cubocubum ipsius B. Igitur ex omni parte constat propositum.

SCHOLIVM.

In hoc & in præcedenti problemate accidit vt inuenta duo triangula ſi per eundem numerum vtraque multiplicentur aut diuidantur, producant alia duo idem præſtantia, quod vnico exemplo ſufficiet probare. Multiplica per 3. triangula 13. 12. 5. & 20 $\frac{1}{3}$. 3 $\frac{2}{3}$. 20. fient alia duo. 39. 36. 15. & 61. 11. 60. vbi vides planum ſub baſibus 900. cum plano ſub perpendiculis 396. efficere quadratum 1296. à latere 36. perpendiculo ſcilicet primi trianguli. Demonſtratio facilis eſt, & ideo eam tibi relinquo indagandam.

PROP. XIV. Probl. 7.

Inuenire tria triangula rectangula, vt ſolidus ſub hypotenuſis, ad ſolidum ſub perpendiculis ſe habeat vt quadratus ad quadratum.

	D 6.	
A 5.	B 4.	C 3.
E 13.	F 5.	G 12.
H 65.	K 63.	L 16.
M 4225.	N 576.	

a duodecima, huius. *b decima huius.*

Exponatur triang. rectang. quodcumque A. B. C. ita vt D duplum perpendiculi C. ſit maius baſi B. [a] & ab eo formetur aliud E F G, ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero quadrato. Tum à duobus hiſce triangulis [b] formetur tertium H K L. ita vt H ſit productus ex A in E. At K baſis fiat addito producto ex G in B. ad productum ex F in C. Denique pependiculum L fiat auferendo productum ex F in B. à producto ex G in C. Dico tria hæc triangula ſatisfacere propoſito, nimirum M ſolidum ſub hypotenuſis ad N ſolidum ſub perpendiculis eſſe in ratione quadrati ad quadratum. Quia enim ex A, in E fit H ex conſtruct. patet ſolidum M factum ex H in H eſſe quadratum ipſius H. Quia vero vt probatum eſt 12. huius ex C in G fit quadratus ipſius D. At L. eſt quadratus ipſius B. ex conſt tuct. & per 12. huius. Patet ſolidum N. qui fit ex quadrato in quadratum, eſſe quadratum cuius latus ſcilicet eſt productus ex B in D. Quare cum vterque M & N. ſit quadratus, patet propoſitum.

Aliter expoſito triangulo A B C. ita vt D duplum perpendiculi ſit minus baſi B

	D 10.	
A 13.	B 12.	C 5.
E 20 $\frac{1}{3}$.	F 3 $\frac{2}{3}$.	G 20.
H 264 $\frac{1}{3}$.	K 221 $\frac{2}{3}$.	L 144.

c decima tertia, huius. *d decima huius.*

[c] formetur aliud E F G, ita vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat quadratum. Et ab his duobus [d] efformetur tertium H K L. ita vt hypotenuſa H fiat ex A in E, baſis K ſit, quod reſtat à producto ex B in G detrahendo productum ex C in F. Denique perpendiculum L. ſit ſumma productorum ex B in F & ex C in G. [e] Erit igitur L quadratus ipſius B. Quare cùm conſtet etiam per decimamtertiam ex C in G produci quadratum ipſius D. patet ſolidum ſub ipſis C G L. productum ex quadrato in quadratum, eſſe quadratum, cuius ſcilicet latus eſt productus ex B in D. At ſolidus ſub hypotenuſis, vt prius oſtendetur æqualis quadrato ipſius H. Igitur cùm vterque ſolidus ſit quadratus, conſtat abundè propoſitum.

e decima tertia, huius.

SCHOLIVM.

Quæ hactenus tradita ſunt, ſatis ſuperque ſufficiunt ad abſolutam Diophantæorum problematum enodationem. Cæterum placuit his ſubnectere ſequentia Theoremata non inutilia de triangulis rectangulis, quæ protulit primus Franciſcus Vieta in libris zeteticorum, quamuis ea ſynthetice minimè demonſtrarit.

PROP. XV.

In triangulo rectangulo, quodlibet laterum circa rectum, eſt medium proportionale inter aggregatum & interuallum alterius lateris & hypotenuſæ. Et è conuerſo, ſi fuerint tres inæquales numeri, quorum vnus ſit medius proportionalis inter ſummam & interuallum aliorum, conſtituent triangulum rectangulum ipſi tres numeri.

A 3.	B 4.	C 5.
D 2.	G 16.	E 8.

Sit triangulum rectangulum A B C. & alterius lateris A & Hypotenuſæ C interuallum ſit D. aggregatum E. Dico reliquum latus B eſſe medium proportionale inter ipſos D E: ſumpto enim G. quadrato ipſius B, patet ex hypotheſi quadratum ex A cum quadrato G æquari quadrato ipſius C. Quare G eſt interuallum quo quadratus ex C ſuperat quadratum ex A. [a] Quamobrem G fiet ex D in E, ex interuallo ſcilicet in

a tertia, 2. poriſm.

summam. [b] Igitur B est medius proportionalis inter D & E. Quod demonstrandum erat. [b vigesima, 7.]

E conuerso ponatur B medius proportionalis inter D E interuallum & summam ipsorum A C. Dico tres A B C constituere triang. rect. Quia enim sunt proportionales D B E, [c] ex D in E fiet G quadratus ipsius B. [d] Atqui ex interuallo D in summam E fit interuallum quadratorum ex A & C. Constat ergo G esse interuallum quo quadratus ex C superat quadratum ex A. Ac ideo G seu quadratus ex B cum quadrato ex A æquatur quadrato ex C. Quamobrem A B C constituunt triangulum rectangulum. Quod demonstrandum erat. [c vigesima, 7.] [d tertia, 2.] [porism.]

PROP. XVI.

In triangulo rectangulo quadratus vnius laterum circa rectum, æquatur quadrato interualli inter alterum latus & hypotenusam, vnà cum duplo producti ex eodem interuallo in idem latus, & è conuerso.

A 4. B 3. C 5.
G 4. D 2.

Sit triang. rect. A B C. & sit D interuallum inter hypotenusam C. & latus B, & ipsius D duplus esto G. Dico quadratum alterius lateris A æquari quadrato ipsius D, & producto ex G in B. Quia enim B D simul æquantur ipsi C. [a] erit quadratus ex C. æqualis quadratis ipsorum B D, & duplo producti ex B in D. hoc est quadratis ex B & D, & producto ex G in B. At rursus ex hypothesi quadratus ex C æquatur quadratis ipsorum A B. Igitur quadrati ex A & B. æquantur quadratis ex B & D & producto ex G in B. Quare ablato vtrimq. cõmuni quadrato ex B, remanet quadratus ex A æqualis quadrato ex D, & producto ex G in B. Quod demonstrandum erat. [a quarta, 2.]

Conuersum eadem facilitate ostendetur. Sit enim quadratus ex A æqualis quadrato ex D interualli ipsorum B C. & producto ex G in B. Dico A B C constituere triang. rect. Nam vt prius quadratus ex C æquatur quadratis ex B & D & producto ex G in B. Ergo loco quadrati ex D & producti ex G in B. sumendo quadratum ex A illis æqualem, erit quadratus ex C æqualis quadratis ex A & B. Ac proinde A B C constituent triang. rect. Quod erat propositum.

PROP. XVII.

In triangulo rectangulo, si duplum interualli lateris vnius & hypotenusæ ducatur in hypotenusam, fit numerus æqualis quadrato reliqui lateris, vnà cum quadrato eiusdem interualli; & è conuerso.

A 4. B 3. C 5.
G 4. D 2.

Sit eadem figura quæ prius, dico productum ex G in C æquari quadratis ipsorum A D. [a] Quia enim quadratus ex A æquatur producto ex G in B & quadrato ex D, si addatur vtrimque quadratus ex D, erunt quadrati ex A & D simul æquales producto ex G in B & duplo quadrati ex D. sed quia G est duplus ad D, productus ex G in D æquatur duplo quadrati ex D. ergo quadrati ex A & D æquantur productis ex G in B & in D, [b] seu producto ex G in C qui componitur ex ipsis B D. Quod erat propositum. [a decima sexta, huius.] [b prima, 2.]

E conuerso ponantur quadrati ex A & D æquales producto ex G in C: dico ipsos A B C constituere triang. rect. [c] Quia enim productus ex G in C. æquatur productis ex G in B & in D. & productus ex G in D æquatur duplo quadrati ex D, constat quadratos ex A & D æquari producto ex G in B & duplo quadrati ex D. Quare auferendo vtrimque communem quadratum ex D, remanet quadratus ex A æqualis producto ex G in B & quadrato ex D. Quamobrem A B C constituunt triang. rect. Quod demonstrandum erat. [c prima, 2.] [d decima sexta, huius.]

PROP. XVIII.

Si duplum compositi ex vno latere & hypotenusa ducatur in hypotenusam, productus æquatur quadrato eiusdem compositi, & reliqui lateris quadrato. Et è conuerso.

Sit triang. rect. A B C. & sit H summa lateris B & hypotenusæ C. & sit K

A 4. B 3. C 5.
K 16. H 8.

[a] quarta, 2'.

duplum ipſius H. dico productum ex K in C. æquari quadratis ipſorum A H. [a] Nam quadratus ex H æquatur, quadratis partium B. C. & producto bis ex B in C. Quare addendo vtrimque quadratum ex A. Quadrati ex A & H æquantur quadratis ſingulorum A B C & producto bis ex B in C. Quia vero K continet bis vtrumque B C. ducere C in K idem eſt ac ducere C in ſeipſum, & in B bis. Ergo productus ex K in C. æquatur duplo quadrati ex C, & producti ex B in C. Proinde loco vnius quadrati ex C. ſumendo quadratos illi æquales ex A & B. fiet productus ex K in C. æqualis quadratis ſingulorum A B C. & producto bis ex B in C. hoc eſt quadratis ipſorum A. H. Quod erat oſtendendum.

E conuerſo ſi ponantur quadrati ex A & H. æquales producto ex K in C. Dico A B C conſtituere triang. rect. Nam vt prius oſtendemus quadratos ex A & H. æquari quadratis ſingulorum A B C & duplo producti ex B in C. vnde ſequitur ex hypotheſi productum ex K in C. æquari quadratis ſingulorum A B C. & producto bis ex B in C. At vt prius productus ex K in C oſtendetur æqualis duplo quadrati ex C & producti ex B in C. Igitur & quadrati ſingulorum A B C, cum duplo producti ex B in C. æquabuntur duplo producti ex B in C & duplo quadrati ex C. Quare auferendo vtrimque duplum producti ex B in C, & quadratum ex C ſemel, remanent quadrati ex A & B æquales quadrato ex C. Ac proinde A B C conſtituunt triangulum rectangulum. Quod demonſtrandum fuit.

S C H O L I V M.

His ſubiicere libet aliud non iniucundum, neque inutile theorema, quod ipſi commenti ſumus.

PROP. XIX.

In triangulo rectangulo quadratus ſummæ laterum æqualis eſt numero qui fit bis ex aggregato hypotenuſæ & baſeos, in aggregatum hypotenuſæ & perpendiculi; & è conuerſo

D 12.
A 3. B 5. C 4.
E 8. F 9.

[a] prima, 2'. poriſm.

Eſto triangulum rectangulum A B C. cuius hypotenuſa B. ſumma laterum D. aggregatum ipſorum A B ſit E, & F aggregatum ipſorum B C. Dico quadratum ipſius D. equari duplo producti ex E in F. [a] Etenim quadratus ex D. æquatur quadratis ſingulorum A B C & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex alijs. At ex hypotheſi quadratus ipſius B æquatur quadratis ipſorum A C. Quare loco quadratorum ex A & C. ſumendo quadratum ex B. erit quadratus ex D æqualis duplo quadrati ex B, & duplo producti ex A in C. & ex B in ipſos A C. Rurſus autem quia E continet ipſos A B. & F continet ipſos B C. duplum producti ex E in F continet bis quadratum ipſius B, & duplum productorum ex A in C. & ex B in ipſos A C. Igitur duplum producti ex E in F æquatur quadrato ex D. Quod erat demonſtrandum.

[b] prima, 2'. poriſm.

Deinde ſint tres numeri A B C. quorum ſumma D, & aggregatum ipſorum A B ſit E, & aggregatum ipſorum B C. ſit F. & duplum producti ex E in F æquetur quadrato ex D. Dico ipſos A B C. conſtituere triangulum rectangulum. Nam vt prius [b] quadratus ex D. æquatur quadratis ipſorum A B C. & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex alijs. At duplum producti ex E in F æquatur duplo quadrati ex B & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex alijs. Quare auferendo vtrimque duplum producti ex quolibet in quemlibet ex alijs, manet duplum quadrati ex B æquale quadratis ſingulorum A B C. & rurſus auferendo vtrimque quadratum ex B, remanet adhuc quadratus ex B. æqualis quadratis ipſorum A C. Ac proinde A B C. conſtituunt triangulum rectangulum. Quod erat oſtendendum.

FINIS.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ
ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ Α.

DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBER PRIMVS.

CVM animaduerterem te (obseruandissime mihi Dionysi) studio discédi explicationem quæstionum earum quæ in numeris proponuntur teneri; aggressus sum eius rei viam rationémq; fabricari, ex ipsisque fundaméntis, quibus tota res nititur, initio petito, naturã ac vim numerorum constituere. Quod negotiũ vt videatur fortasse difficilius (quippe ignotum adhuc) cùm animi incipientium ad bonam de re dextrè conficienda spem concipiendam nequaquã sint procliues: tamen cùm tua alacritas, tum mea demonstratio efficiet, vt facilè id comprehendas. Celeriter enim addiscunt, quorum ad discendi cupiditatem doctrina accedit.

ΤΗΝ εὕρεσιν τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς προβλημάτων, τιμιώτατέ μοι Διονύσιε, γινώσκων σε σπουδαίως ἔχοντα μαθεῖν, ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον ἐπειράθην, ἀρξάμενος ἀφ' ὧν συνέστηκε τὰ πράγματα θεμελίων, ὑποστῆσαι τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν. ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον, ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι, δυσέλπιστοι γὰρ εἰς κατόρθωσίν εἰσιν αἱ τῶν ἀρχομένων ψυχαί, ὅμως δ' εὐκατάληπτόν σοι γενήσεται διὰ τὴν σὴν προθυμίαν, καὶ τὴν ἐμὴν ἀπόδειξιν. ταχεῖα γὰρ εἰς μάθησιν ἐπιθυμία προσλαβοῦσα διδαχήν.

IN PRIMVM LIBRVM DIOPHANTI COMMENTARII.

QVÆCVNQVE ante primam quæstionem præmisit Diophantus, ea definitionum & principiorum locum obtinent. Sed velut ad altiora festinans, hæc mira breuitate perstrinxit, vt non tam ea explicare voluisse videatur, quàm indicare, tyronésque admonere, vt nonnisi horum cognitione iam probè instructi ad hosce libros euoluẽdos accedãt. Quod sanè non obscuris verbis professus est, definitione decima vndecimáq;, cùm ait eum qui hoc negotij suscipit in additione, subductione, & multiplicatione specierum iam exercitatum esse debere, necnon in æquationibus ritè præparandis apprimè versa-

tum. Sed & Xilander hîc mutus est, & istarum definitionum obscuritatem minimè dissimulans, vt laborem eas explicandi declinet, lectorem ad suam Algebram amandat. Scholiastes autem Græcus, more suo, multa, sed ea plerunque futilia, vel à scopo Diophanti prorsus aliena nobis obtrudit. Ego media incedens via, quæ obscuriora videntur breuiter enodanda suscepi, nec tamen inutilia, vel trita & passim obuia persequi statui, præsertim cùm omnia quæ his definitionibus continentur, in omnibus quotquot à quocunque authore extant de logistica, libris, reperiantur. Cæterùm est quod moneã in Græco sine vlla distinctione hasce definitiones haberi, quas ego distinguendas numeris putaui, vt sic facilius explicari, citariq; cõmodius possint.

DEFINITIO I.

ἈΛΛΑ καὶ πρὸς τοῖς δὲ γινώσκοντί σοι πάντας τοὺς ἀριθμοὺς συγκειμένους ἐκ μονάδων πλήθους τινός, φανερὸν καθέστηκεν εἰς ἄπειρον ἔχειν τὴν ὕπαρξιν. τυγχανόντων δὴ οὖν ἐν τούτοις, ὧν μὲν τετραγώνων οἵ εἰσιν ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς καλεῖται πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὧν δὲ κύβων οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐπὶ τὰς αὐτῶν πλευρὰς πολλαπλασιασθέντων, ὧν δὲ δυναμοδυνάμεων οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐφ' ἑαυτοὺς πολλαπλασιασθέντων, ὧν δὲ δυναμοκύβων οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐπὶ τοὺς ἀπὸ τῆς αὐτῆς αὐτοῖς πλευρᾶς κύβους πολλαπλασιασθέντων, ὧν δὲ κυβοκύβων οἵ εἰσιν ἐκ κύβων ἐφ' ἑαυτοὺς πολλαπλασιασθέντων, ἔκ τε τῆς τούτων ἤτοι συνθέσεως, ἢ ὑπεροχῆς, ἢ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ λόγου τοῦ πρὸς ἀλλήλους, ἢ καὶ ἑκάστου, ἢ καὶ ἑκάστων πρὸς τὰς ἰδίας πλευρὰς συμβαίνει πλέκεσθαι πλεῖστα προβλήματα ἀριθμητικά, λύεται δὲ βαδίζοντός σου τὴν ὑποδειχθησομένην ὁδόν.

VERUM etiam præter hæc intelligenri tibi omnes numeros compositos esse è quadam multitudine vnitatum, liquer eos augmentum in infinitum capere. Cùm ergo in his quidam sint quadrari, qui fiunt numero aliquo in se multiplicato, qui numerus latus quadrati dicirur; aliqui cubi qui existunr quadratis in sua multiplicatis latera; alij rursus quadratoquadrati, qui gignuntur quadraris in seipsos ductis; nonnulli quadrarocubi, quos quadrati in cubos ab eodem profectos latere ducti procreanr; quidam deniq. cubocubi qui cubis in seipsos ductis nascuntur: vsuuenit, vt ex horum vel compositione, vel quo præstant alij aliis, vel multiplicatione, vel ratione inter se, aut cuiuslibet, quorumlibet ve ad sua latera, plurimæ nectantur arithmeticæ quæstiones, quæ soluanrur tamen, si ea quam commonstrabimus via incedas.

IN DEFINITIONEM I.

QVAMVIS species, vel (vt alij vocant) potestates, quibus velut elementis vtitur logistica in infinitam multitudinẽ excrescant, nec earum certus sit & determinatus numerus, tamen Diophantus de quinque prioribus tantùm tractationem instituit, quæ sunt Quadratus, cubus, Quadratoquadratus. Quadratocubus &

cubocubus. ratus scilicet has sufficere ad implicatissimas quasque quæ hactenus excogitatæ sunt, quæstiones dissoluendas. Harum igitur hîc affert definitiones. Et Quadratum quidem cubúmque definit vt Euclides. Reliquas verò tres, per ipsam nominum impositionem. Nam quadratoquadratũ vocat, numerum qui fit ex quadrato in quadratum, idest in seipsum. Quadratocubum verò, qui fit ex quadrato in cubum ab eodem profectum latere. Denique cubocubum qui fit ex cubo in cubum, hoc est in seipsum. Vbi aduertendum à recentioribus omnibus quotque ante Diophantum editum logistices rudimenta tradidere, Quadratocubum vocari nunc supersolidum, nunc surdesolidum, nunc etiam Primum Relatum. Cubocubum verò, ab iisdem dici Quadratocubum, quia videlicet est quadrati cubus, vel cubi quadratus, quod adnotasse operæpretium duxi, ne quem in authoribus legendis nonnunum ambiguitas remoretur.

DEFINITIO II.

APPELLATVR igitur Quadratus, Dynamis, & est illius nota δ, superscriptũ habens υ sic δ^{υ}. Qui autẽ fit ex quadrato in suum latus cubus est, cuius nota est κ, superscriptum habens υ hoc pacto κ^{υ}. Qui autem fit ex quadrato in seipsũ multiplicato, quadratoquadratus est, cuius nota est geminum δ habens superscriptum υ, hac ratione $\delta\delta^{\upsilon}$. Qui fit quadrato in cubum qui ab eodem latere profectus est, ducto, quadratocubus nominatur, nota eius δκ superscriptum habens υ sic $\delta\kappa^{\upsilon}$. Qui ex cubo in se ducto nascitur, cubocubus vocatur, & est eius nota geminum κ superscriptũ habens υ, hoc pacto $\kappa\kappa^{\upsilon}$. Cui verò nulla harum proprietatum obtigit, sed constat multitudine vnitatum rationis experte, numerus vocatur, nota eius ς. Est & aliud signum immutabile definitorum, vnitas, cuius nota μ superscriptum habens ο sic μ^{o}.

ΚΑΛΕΙΤΑΙ οὖν ὁ μὲν τετράγωνος, δύναμις, καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ δ ἐπίσημον ἔχον υ, δ^{υ}. ὁ δὲ [ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ πλευρὰν πολλαπλασιασθέντος] κύβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον κ ἐπίσημον ἔχον υ, κ^{υ}. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, δυναμοδύναμις, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δέλτα δύο, ἐπίσημον υ, $\delta\delta^{\upsilon}$, δυναμοδύναμις. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς αὐτῆς αὐτῷ πλευρᾶς κύβον πολλαπλασιασθέντος, δυναμόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ δκ. ἐπίσημον ἔχοντα υ, $\delta\kappa^{\upsilon}$. ὁ δὲ ἐκ κύβου ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντος, κυβόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δύο κκ, ἐπίσημον ἔχοντα υ, $\kappa\kappa^{\upsilon}$. ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ἰδιωμάτων κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ς. ἔστι δὲ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ ἀμετάθετον τῶν ὡρισμένων ἡ μονάς, καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ μ, ἐπίσημον ἔχον τὸ ο, μ^{o}.

IN DEFINITIONEM II.

HÆC ad verbum exprimenda esse arbitratus sum potiùs quàm cum Xilandro nescio quid aliud cõminisci. Quamuis enim in reliqua versione nostra notis ab eodem Xilandro excogitatis libenter vsus sim, quas tradã infrà. Hîc tamen ab ipso Diophanto longiùs recedere nolui, quòd hac definitione notas explicet quibus passim li-

bris istis vtitur ad species omnes compendio designandas, & qui has ignoret ne quidẽ Græca Diophanti legere possit. Porrò quadratum Dynamin vocat, quæ vox potestatem sonat, quia videlicet quadratus est veluti potestas cuiuslibet lineæ, & passim ab Euclide, per id quod potest linea, quadratus illius designatur. Itali, Hispaniq; eadem ferè de causa Censum vocant, quasi dicas redditum, prouentúmque, quòd à latere seu radice, tanquam à feraci solo quadratus oriatur. Inde factum vt Gallorum nonnulli & Germanorum corrupto vocabulo zenzum appellarint. Numerum autem indeterminatum & ignotum, qui & aliarum omnium potestatum latus esse intelligitur, Numerum simpliciter Diophantus appellat. Alij passim Radicem, vel latus, vel rem dixerunt, Itali patrio vocabulo Cosam. Cæterùm nos in versione nostra his notis N. Q. C. QQ. QC. CC. designabimus Numerum, Quadratum, Cubum, Quadratoquadratum, Quadratocubum, Cubocubum. Nam quod ad vnitates certas & determinatas spectat, eis notam aliquam adscribere superuacaneum duxi, quòd hæ seipsis absque vlla ambiguitate sese satis indicent. Ecquis enim cùm audit numerum 6. non statim cogitat sex vnitates? Quid ergo necesse est sex vnitates dicere, cùm sufficiat dicere, sex? Demum legendum in Græco censeo, πλῆθος μονάδων ἄλογον, flagitante sententia, potius quàm ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, vt habetur in codice manu exarato, & per multitudinem vnitatum rationis expertem, intelligo numerum indefinitum & indeterminatum, seu potius ignotum, quémque statim opponit ἀριθμῷ seu vnitatibus certis & determinatis.

DEFINITIO III.

ΩΣΠΕΡ δὲ τῶν ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια παρωνύμως καλεῖται τοῖς ἀριθμοῖς, τῶν μὲν γ̄ τὸ τρίτον, τοῦ δὲ δ̄ τὸ τέταρτον. οὕτως καὶ τῶν νῦν ἐπονομασθέντων ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια κληθήσεται παρωνύμως τοῖς ἀριθμοῖς· τοῦ μὲν ἀριθμοῦ τὸ ἀριθμοστόν, τῆς δὲ δυνάμεως τὸ δυναμοστόν, τοῦ δὲ κύβου τὸ κυβοστόν, τῆς δυναμοδυνάμεως τὸ δυναμοδυναμοστόν· τοῦ δὲ δυναμοκύβου τὸ δκ^ον. τοῦ δὲ κυβοκύβου τὸ κυβοκυβοστόν. ἕξει δὲ ἕκαστον αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ σημεῖον γραμμὴν ἔχον διαστέλλουσαν τὸ εἶδος.

ENIMVERO sicut partes numeris cognomines, similẽ ipsis numeris denominationem sortiuntur (etenim à ternario triens, à quaternario quadrans dicitur) ita nunc quoque denominatis numeris partes cognomines, ipsis numeris similẽ habent denominationem, nam à numero pars numerica dicitur; à quadrato, quadratica; à cubo cubica: à quadratoquadrato quadratoquadratica; à quadratocubo, quadratocubica; à cubocubo, cubocubica. Habebit autem quælibet pars à sibi cognomine numero notam, & literam superscriptam quæ speciem à specie distinguat.

IN DEFINITIONEM III.

QVAM malè acceperint hanc definitionem Græcus Scholiastes, & Xilander, si vacat, videre poteris. Manifestum tamen est nil aliud velle Diophantum, quàm vt fractionibus Algebricis notæ specierum à quibus sumunt denominationem, adscribantur, docens ipsas fractiones non minus à qualibet specie denominari, quàm numerum quemlibet vnitatum integrum. Hoc autem huiusmodi similitudine explicat. Quemadmodum, inquit, fractio quælibet absoluta ab aliquo numero sumit denominationem, velut triens à ternario, à quaternario quadrans, & sic de aliis; ita & quælibet fractio Algebrica à specie cuius nota ei affixa est, denominationem mutuatur, verbi gratia $\frac{1}{2}$ N. dicetur semissis vnius Numeri, $\frac{1}{3}$ Q. dicetur triens vnius

Quadrati, $\frac{3}{4}$ C. dicetur dodrans vnius Cubi, & sic de aliis, vt superuacaneum sit in re manifesta diutius immorari. Porrò Xilandri coniecturam secutus, duobus in locis loco παρομοίως, reposui παρωνύμως.

DEFINITIO IV.

PROINDE cùm tibi singulas numerorum denominationes exposuerim ad eorum multiplicationes me confero, quæ tibi facilè patebunt, cùm per ipsam nominum impositionem, ferè iam ante declaratæ.

Ergo numerus in numerum multiplicatus, quadratum producit; in quadratum, cubum, in cubum, quadratoquadratum; in quadratoquadratum, quadratocubum; in quadratocubum, cubocubum. Quadratus verò in quadratū, gignit quadratoquadratum; in cubum, quadratocubum; in quadratoquadratum, cubocubū. Cubus autem in cubum ductus, cubocubum producit.

ΕΚΘΕΜΕΝΟΣ οὖν σοι τὴν ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν ἐπωνυμίαν, ἐπὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς αὐτῶν μεταβήσομαι. ἔσονται δέ σοι καταφανεῖς διὰ τὸ προδεδηλῶσθαι σχεδὸν ἀπὸ τῆς ὀνομασίας.

Ἀριθμὸς μὲν οὖν ἐπὶ ς πολλαπλασιασθεὶς, ποιεῖ δύναμιν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, κύβον· ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμοδύναμιν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δυναμόκυβον. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, κυβόκυβον. δύναμις δὲ ἐπὶ μὲν δύναμιν [ποιεῖ δυναμοδύναμιν.] ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμόκυβον. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, κυβόκυβον. κύβος δὲ ἐπὶ κύβον, κυβόκυβον.

IN DEFINITIONEM IV.

HIC specierum multiplicationes explicat, quarum aliquæ quidem ex definitione prima, & ipsa nominum impositione manifestæ sunt, reliquas verò demonstrare facile est, tali expedito theoremate.

Quadratus, Cubus, Quadratoquadratus, Quadratocubus, & Cubocubus vnà cum communi eorum latere sunt ab vnitate continuè proportionales.

Sit vnitas A, quodlibet latus B. cuius quadratus C. cubus D. quadratoquadratus E. quadratocubus F. & cubocubus G.

A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64.

Dico A B C D E F G, esse continuè proportionales. Quia enim [1] ex B in B, fit C. erit ex definitione multiplicationis A ad B, vt B ad C. similiter quia [2] ex B in C, fit D. erit eadem de causa A ad B, vt C ad D. Quare ipsi A B C D sunt continuè proportionales. Rursus [3] quia ex C in seipsum fit E, erit ex definitione multiplicationis A ad C, sicut C ad E. Quare cùm inter A & C cadat vnus medius proportionalis B, [4] cadit etiam vnus in eadem ratione inter C & E, sed in ratione A ad B, vel B ad C, ostensus est C ad D. Igitur D est ille medius, ac proinde est C ad D, vt D ad E. Rursus [5] quia ex C in D producitur F, erit A ad C, vt D ad F. Quare rursus cùm inter A C cadat medius proportionalis B, [6] cadit & vnus medius in eadem ratione inter D & F. Vnde cùm in illa ratione ostensus sit esse D ad E, erit E ille medius, & idcirco erit D ad E, vt E ad F. Denique [7] quia ex D in seipsum fit G, erit A ad D, vt D ad G. Vnde sicut inter A & D cadunt duo medij proportionales B C, [8] sic & inter D G cadent duo in eadem ratione. Sed in eadē ratione ostensi sunt esse D ad E, & E ad F. Igitur E F sunt illi medij, ac proindeest E ad F, vt F ad G. & omnes A B C D E F G. sunt continuè proportionales. Quod demonstrandū erat.

Definit 1. Definit. 1. Definit. 1. 8. octaui. Definit. 1. 8. octaui. Definit. 1. 8. octaui.

Hinc porro specierum multiplicatio demonstratur. Primo enim ex Numero B in seipsum fieri quadratum C, itémq; ex Numero B in quadratum C fieri cubum D,

A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64.

patet ex definitione prima. Secundò ex Numero B in cubum D, fieri quadratoquadratum E probatur. Quia enim per præcedens theorema ipsi A B C D E sunt con-
19. septimi. tinuè proportionales, erit A ad B, vt D ad E.[a] Quare qui sub extremis A E continetur, æquatur ei qui sub mediis B D. sed ex vnitate A in E fit ipsemet E. ergo idem E fiet ex B in D. quod erat propositum. Tertiò dico ex Numero B in suum quadratoquadratum E fieri quadratocubum F, quia enim est A ad B vt E ad F, numerus qui fit ex A in F, nempe ipse F æquatur ei qui fit ex B in E. Quod erat propositum. Quartò dico ex Numero B in suum quadratocubum F, fieri cubocubum G. Nam vt prius cùm sit A ad B vt F ad G. fiet idem G ex A in G, vel ex B in F. Quod erat intentum. Quintò ex quadrato C in seipsum, fieri quadratoquadratum E, patet ex definitione prima, sicut & ex eodem quadrato C in cubum D fieri quadratocubum E. Sextò ex quadrato C in quadratoquadratum E fieri cubocubum G sic probatur. Quia ob continuam proportionalitatem, vt A ad C, sic est E ad G, idem G fiet ex A in G, vel ex C in E. Quod erat propositum. Denique ex cubo D in seipsum, fieri cubocubum G patet ex definitione prima. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

DEFINITIO V.

ΠΑΣ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ὁμώνυμον αὐτῷ μόριον πολλαπλασιασθεὶς, μονάδα ποιεῖ.

OMNIS numerus in partem sibi cognominem multiplicatus, vnitatem producit.

IN DEFINITIONEM V.

HIC præclarè nugatur Scholiastes, cùm putat in hac definitione loqui Diophantum de fractionibus absolutis, & nulla speciei alicuius nota affectis, quasi docere velit ex $\frac{1}{3}$ in 3. vel ex $\frac{1}{4}$ in 4. fieri vnitatem, quod quid ad logisticam conferat, non video, sed sanè vulgò Arithmeticorũ notum est, atque ipsis lippis & tonsoribus, vt geometrica demonstratione, opus non fuerit ad id confirmandum. Cæterùm non id voluit Diophantus, sed potius fractiones Algebricas illas, in quibus vnitates per aliquam speciem diuisæ intelliguntur, ductas in speciem à quo denominantur, producere vnitates absolutas, vt si $\frac{1}{2N}$ ducatur in 4. N. fient 2. vnitates absolutæ, & si $\frac{2}{3Q}$ ducantur in 6. Q. fient 4. vnitates absolutæ, & si $\frac{1}{5C}$ ducantur in 10. C. fient 2. vnitates. Et hanc esse Diophanti mentem ex definitione octaua manifestè colligitur. Cùm enim ibi multiplicationes huiusmodi fractionum tradat, non docet quid producatur si fractio ducatur in speciem à qua denominatur, quia scilicet id ista definitione iam comprehenderat.

DEFINITIO VI.

ΤΗΣ οὖν μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης, καὶ ἑστώσης ἀεὶ τὸ πολλαπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἔσται.

ENIMVERÒ cùm vnitas immutabilis sit, sempérque maneat species quælibet in eam multiplicata, eandem generat speciem.

IN DEFINITIONEM VI.

NON melius accepit hanc definitionem Scholiastes, quàm præcedentem & sequentes duas, quod semel atque iterum monuisse sufficiat. Existimauit enim in istis quatuor definitionibus Diophantum loqui de numeris & fractionibus abso-

lutis, quod à scopo illius prorsus alienum est. Hîc itaque docet Diophantus, vnitates ductas in speciem quamlibet, ipsammet speciem producere, vt si 2. ducantur in 3. N. fient 6. N. Et si 4. ducantur in 5. Q. fient 20. Q. & sic de alijs. Causam autem assignare videtur, quòd vnitates absolutæ, vnitatis ipsius naturam sapiant. Quemadmodum ergo vnitas in quemlibet numerum ducta, producit ipsum eundem numerum, sic & vnitates in quamlibet speciem multiplicatæ, eandem speciem gignunt.

DEFINITIO VII.

At partes denominatæ si inter se multiplicetur, partes producunt ipsis numeris cognomines. Verbi gratia pars numerica in partem numericã ducta, quadraticam gignit; in quadraticam, cubicam; in cubicam, quadratoquadraticam; in hanc, quadratocubicam; in hanc cubocubicam, idque communicata denominatione continget. Pars verò quadratica, in partem numericam, partem cubicam facit; in quadraticam, quadratoquadraticã; in cubicam, quadratocubicam; in quadratoquadraticam, cubocubicam. Pars autem cubica in numericã, partem facit quadratoquadraticã; in quadraticam, quadratocubicam; in cubicam, cubocubicam. Sed pars quadratoquadratica in numericam, partem facit quadratocubicam; & in quadraticam, cubocubicam. Deniq; pars quadratocubica in numericam, partim gignit cubocubicam.

Τὰ δὲ ὁμώνυμα μόρια ἐφ' ἑαυτὰ πολλαπλασιαζόμενα, ποιήσει ὁμώνυμα μόρια τοῖς ἀριθμοῖς. οἷον τὸ μὲν ἀριθμοστὸν ἐπὶ τὸ ἀριθμοστὸν, δυναμοστὸν ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοστὸν, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ κυβοστὸν, δυναμοδυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδυναμοστὸν, δυναμοκυβοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοκυβοστὸν, κυβοκυβοστὸν, καὶ τούτῳ ὁμωνύμως συμβλήσεται· δυναμοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ἀριθμοστὸν, κ^{χ} ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοστὸν, $\delta\delta^{\chi}$. ἐπὶ δὲ κυβοστὸν, $\delta\kappa^{\chi}$. ἐπὶ δὲ $\delta\delta^{\chi}$, $\kappa\kappa^{\chi}$. τὸ δὲ κυβοστὸν, ἐπὶ μὲν ἀριθμοστὸν, ποιεῖ $\delta\delta^{\chi}$. ἐπὶ δὲ δ^{χ}, $\delta\kappa^{\chi}$. ἐπὶ δὲ κ^{χ}, $\kappa\kappa^{\chi}$. τὸ δὲ δυναμοδυναμοστὸν, ἐπὶ μὲν ἀριθμοστὸν, $\delta\kappa^{\chi}$ ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοστὸν, $\kappa\kappa^{\chi}$. τὸ δὲ δυναμοκυβοστὸν, ἐπὶ ἀριθμοστὸν, κυβοκυβοστόν.

IN DEFINITIONEM VII.

Hæc definitio à quarta pendet. Quemadmodum enim ibi numerorum integrorum à speciebus denominatorum multiplicationes docuit, ita & hîc fractionum ab iisdem speciebus denominatarũ multiplicationes tradit, quarũ eadem est prorsus ratio. Nam sicut verbi gratia 2. N. in 3. N. faciunt 6. Q. ita $\frac{1}{2}$ N. in $\frac{1}{3}$ N. facit $\frac{1}{6}$ Q. & sicut 3. N. in 4. Q. faciunt 12. C. sic $\frac{1}{3}$ N. in $\frac{1}{4}$ Q. faciunt $\frac{1}{12}$ C. & sic de alijs. Itaque quæ demonstrata sunt ad definitionem quartam, hîc etiam locum habent.

DEFINITIO VIII.

Rursus fractio numerica in quadratum ducta, nu-

Πάλιν δὲ τὸ μὲν ἀριθμοστὸν ἐπὶ μὲν δύναμιν, ἀριθ-

μὸν ποιεῖ. ἐπὶ δὲ κύβον, δύναμιν, ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, κύβον. ἐπὶ δυναμόκυβον, δυναμοδύναμιν. [ἐπὶ] κυβόκυβος, δυναμόκυβος. δυναμοστὸν δὲ ἐπὶ μορίῳ ἀριθμὸν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δύναμιν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, κύβος. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δυναμοδύναμιν. κυβοστὸν δὲ ἐπὶ μορίῳ ἀριθμὸν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβος, δύναμιν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, κύβος. δυναμοδυναμοστὸν δὲ ἐπὶ μορίῳ ϛ″, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δύναμιν. δυναμοκυβοστὸν δὲ ἐπὶ μορίῳ ϛ″, δυναμοδυναμοστόν. ἐπὶ δύναμιν, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, ἀριθμόν. τὸ δὲ κυβοκυβοστὸν ἐπὶ μορίῳ ἀριθμὸν, δυναμοκυβοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοδυναμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμοστόν.

merum gignit; in cubum, quadratum; in quadratoquadratum, cubum; in quadratocubum, quadratoquadratum; in cubocubũ, quadratocubum. Fractio verò quadratica in numerum ducta, Fractionem numericam producit; in cubum, numerum; in quadratoquadratum, quadratum; in quadratocubum, cubum; in cubocubum, quadratoquadratum. Fractio cubica ducta in numerum, fractionem quadraticam gignit; in quadratum, fractionem numericam; in quadratoquadratum, numerum; in quadratocubum, quadratum; in cubocucum, cubum. Fractio quadratoquadratica in numerũ ducta, producit fractionem cubicam; in quadratum, fractionem quadraticam; in cubum, fractionem numericam; in quadratocubum, numerũ; in cubocubum, quadratum. Fractio quadratocubica in numerum ducta, fractionem facit quadratoquadraticam; in quadratum, fractionem cubicam; in cubum, fractionem quadraticam; in quadratoquadratum, fractionem numericam; in cubocubum, numerum. Fractio cubocubica in numerum ducta, fractionem gignit quadratocubicam; in quadratum, fractionem quadratoquadraticam; in cubum fractionem cubicam; in quadratoquadratum, fractionem quadraticam; in quadratocubum, fractionem numericam.

IN DEFINITIONEM VIII.

TANGIT hîc aliud genus fractionum, quæ fiunt cùm numerus à specie inferiori denominatus diuisus intelligitur per numerum ab altiori specie denominatum, vt si vnitates per Numeros diuidantur, fit fractio Numerica, qualis est $\frac{1}{11}$. Et si vni-

tates per quadratos diuidantur, fit fractio quadratica, vt $\frac{2}{4 Q.}$, & sic de aliis. Differunt ergo re fractiones istæ ab iis de quibus actum est superiore definitione, quamuis vtrasque iisdem nominibus appellet Diophantus. Nam in illis speciei denominatio afficit Numeratorem, in istis denominatorem, verbi gratia si dicas $\frac{2}{3}$ N. intelligis 2. N. diuidi per 3. At si dicas $\frac{2}{3 N.}$ intelligis 2. diuidi per 3. N. vtramque tamen fractionem Diophantus ἀριθμοστὸν vocat, similiter $\frac{1}{Q.}$ & $\frac{1}{4 Q.}$ vocat δυναμοστὸν communi nomine, & sic de aliis. Ratio verò multiplicandi fractiones istas, tota pendet à ratione diuidendi species inter se. Porrò diuisio multiplicationi contraria est, quamobrem, vt monet Diophantus definitione decima, cognitis specierum multiplicationibus, cognoscuntur & diuisiones: sicut enim verbi gratia Numerus in Numerum ductus producit Quadratum, ita si Quadratus per Numerum diuidatur, orietur Numerus; & sicut ex Quadrato in Cubum fit Quadratocubus, ita si Quadratocubus per Cubum diuidatur, orietur Quadratus, & rursus si Quadratocubus per Quadratum diuidatur, orietur Cubus, & sic de aliis. Hinc patet si fractio numerica $\frac{2}{3 N.}$ ducatur in 2. Q. fieri numerum, nam fit seruata vtraque denominatione $\frac{4 Q.}{3 N.}$ quia verò diuidendo Quadratum per numerum, oritur numerus, hoc idem est atque $\frac{4}{3}$ N. Simili argumento rationē reddes omnium quæ hac definitione complectitur Diophantus,

DEFINITIO IX.

Minus per minus multiplicatum, producit Plus. At minus per plus multiplicatum, producit minus. Et defectus nota est litera ψ decurtata, & deorsum vergens, sic ↑.

Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα, ποιεῖ ὕπαρξιν. λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν, καὶ τῆς λεῖψεως σημεῖον ψ, ἐλλιπὲς κάτω νεῦον ↑.

IN DEFINITIONEM IX.

Ὕπαρξιν & λεῖψιν, abundantiam & defectum vertere poteramus. Placuit tamen à recentioribus omnibus vsitatis vocabulis dicere Plus & Minus. Et Diophantus quidem vt significet Plus nulla vtitur nota, sed coniunctione tantùm copulatiua. Nos verò in versione nostra, eos qui ante nos Latinè scripserunt, imitati, Plus hoc signo denotabimus +. Minus verò isto −. Ceterùm si cui mirum videatur quod Minus per Minus multiplicatum, efficiat Plus, & huius rei demonstrationem requirat, legat Petrum Nonium parte 2. suæ Algebræ, cap. 4.

DEFINITIO X.

Declaratis ergo multiplicationibus, manifestæ sunt etiam partitiones propositarum specierum. Æquum itaque est eum qui hoc negotij suscipit, in additione, subductione, & multiplicatione quæ speciebus accidunt, exercitatum esse, nimirum qua ratione species quæ adsunt, quæque desunt non eiusdem multitudinis, aliis adiicias speciebus quæ vel adsunt,

Καὶ τῶν πολλαπλασιασμῶν τούτων σαφηνισθέντων, φανεροί εἰσιν οἱ μερισμοὶ τῶν προκειμένων εἰδῶν. καλῶς οὖν ἔχει ἐναρχόμενον τῆς πραγματείας, συνθέσει, καὶ ἀφαιρέσει, καὶ πολλαπλασιασμοῖς τοῖς περὶ τὰ εἴδη γεγυμνάσθαι. καὶ πῶς εἴδη ὑπάρχοντα καὶ λείποντα, μὴ ὁμοπληθῆ, προσθήσεις ἑτέροις εἴδεσιν ἤτοι καὶ αὐτοῖς ὑπάρχουσιν,

ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχουσι καὶ λείπουσι. καὶ πῶς ἀπὸ ὑπαρχόντων εἰδῶν, καὶ ἑτέρων λειπόντων ἀφαιρήσεις ἕτερα ἤτοι ὑπάρχοντα, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχοντα καὶ λείποντα.

vel itidem adſunt atque deſunt. Et quomodo à ſpeciebus quæ adſunt, & aliis quæ deſunt, auferas alias quæ vel adſint, vel itidem adſint atque deſint.

IN DEFINITIONEM X.

ADDITIONEM, ſubductionem, multiplicationem, & diuiſionem ſpecierum, cùm diuerſimodè per Plus & Minus copulantur, non perſequitur Diophantus, ſed ſupponit in his iam exercitatum eum qui libros iſtos aggrediatur. Nec ego in re facili diutius immorabor, vide, ſi libet, authores omnes qui logiſticam ſcriptis mandarunt, vt Nicolaum Tartaleam, Petrum Nonium, Chriſtophorum Clauium, aliósque paſſim.

DEFINITIO XI.

ΜΕΤΑ δὲ ταῦτα ἐὰν ἀπὸ προβλήματός τινος γένηται ὕπαρξις εἴδεσι τοῖς αὐτοῖς μὴ ὁμοπληθῆ δὲ ἀπὸ ἑκατέρου τῶν μερῶν, δεήσει ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑνὸς εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται. ἐὰν δέ πως ἐν ὁποτέρῳ ἐνυπάρχῃ, ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐνελλείψῃ τινὰ εἴδη, δεήσει προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τὰ εἴδη ἐνυπάρχοντα γένηται. καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος καταλειφθῇ. πεφιλοτεχνήσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποστάσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ. ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται. νῦν δ' ἐπὶ τὰς προτάσεις χωρήσωμεν ὁδὸν πλείστην ἔχοντες τὴν ἐπ' αὐτοῖς εἴδεσι συνηθροισμένην ὕλην. πλείστων δ' ὄντων τῶν ἀριθμῶν,

DEINDE ſi in aliqua quæſtione tractanda eædem ſpecies adſint ex vtraque parte non æquali multitudine, auferenda ſunt ſimilia à ſimilibus, donec vna ſpecies vni ſpeciei æqualis remaneat. Quod ſi in vtraque parte, vel in alterutra deſint quædam ſpecies, quædam adſint, quæ deſunt vtrinque addenda ſunt, dum ſpecies eædem vtrinque inueniantur; rurſumque vtrimque auferenda ſimilia à ſimilibus, tantiſper dum ab vtraque parte vna ſpecies relinquatur. Atque hoc accuratè in ipſis quæſtionum poſitionibus, quoad detur, conabere efficere, vſque dum vna ſpecies vni ſpeciei æqualis deprehendatur. Poſterius autem tibi cõmõſtrabimus quomodo quæſtio explicetur, etiam cùm duæ ſpecies vni æquales relinquunrur. Nunc verò ad ipſas quæſtiones accedemus, cùm nobis via abundè pateat, ob materiã ab ipſis ſpeciebus collectam. Cùm autẽ plurimi ſint numeri,

& mole ingentes, atque ideo tardè comprehendantur ab iis qui huic studio incumbunt, nec valent memoria; statui quæ ex iis ita decerpi possunt, ita vt maximè in tractationis principio elementorum partes sustineant, primo loco proponere, & à simplicioribus ad perplexiora progredi. Sic enim incipientibus ea fient penetratu faciliora, & in memoria eorum hærebit deductio, pertractatione eorum libris tredecim inclusa.

καὶ μεγίστων τῷ ὄγκῳ, διὰ τοῦτο βραδέως βεβαιουμένων ὑπὸ τῶν παραλαμβανόντων αὐτὰ, καὶ ὄντων ἐν αὐτοῖς δυσμνημονεύτων, ἐδοκίμασα τὰ ἐν αὐτοῖς ἐπιδεχόμενα διαιρέσεις, καὶ μάλιστα τὰ ἐν ἀρχῇ ἔχοντα στοιχειωδῶς, ἀπὸ ἁπλουστέρων ἐπὶ σκολιώτερα διελεῖν, ὡς προσήκει. οὕτω γὰρ εὔοδα ταῦτα γενήσεται τοῖς ἀρχομένοις, καὶ ἡ ἀγωγὴ αὐτῶν μνημονευθήσεται, τῆς πραγματείας αὐτῶν ἐν τρισκαίδεκα βιβλίοις γεγενημένης.

IN DEFINITIONEM XI.

ÆQVATIO, est vnicum medium quo vtitur Logistica ad quæuis soluenda problemata, tali artificio ignotam quantitatem, notæ alicui comparando, vt tandem inter eas æqualitatem deprehendat, & sic in agnitionem ignotę perueniat. Vt autē docet hîc Diophantus, non quælibet æquatio statim apta est soluendæ propositę quæstioni, sed magna interdū indiget præparatione quò fiat simplicissima, ita vt si fieri potest vna tantum species, vni speciei, vel duæ, vni æquales reperiātur. Totum verò negotium præparationis æquationum in eo consistit, vt defectus communiter addantur, & similia à similibus auferantur, & si vtraque æquationis pars altioris gradus species contineat, fiat hypobibasmus, seu descensus quidam, vel depressio characterum, vt vocat Xilander, omnia diuidendo per infimæ speciei denominationem. Quæ omnia vt vnico exemplo confirmem, sint 2. C. + 3. N. æquales 9. N. − 4 Q. Quia ergo deficiunt ex altera parte 4. Q. addantur vtrimque 4. Q. fient 2. C. + 3. N. + 4. Q. æquales 9. N. quia verò similes species, nempe Numeri vtrimque reperiuntur, auferantur vtrimque 3. N. remanent igitur 2. C. + 4. Q. æquales 6 N. Denique quia species altioris gradus ex vtraq; parte repetiuntur, quæ omnes depressionem pati possunt, diuidatur vtraque pars per infimam speciem quæ hîc est 1. N. Fient ergo 2. Q. + 4. N. æquales 6 vnitatibus. Et tunc demum æquatio censebitur ritè præparata. Præterea Parabolismum addit Franciscus Vieta in libello aureo cui titulus, Isagoge in artem Analyticē, cuius præsertim vsus est in æquationibus compositis, qualis est illa quam exhibuimus, quiq; fit diuidendo singulas æquationis partes per vnitates altioris speciei, vt in dato exemplo diuidendo eam per numerum Quadratorum, qui est 2. fiunt 1. Q. + 2. N. æquales 3. sed hac methodo non vtitur Diophantus, qui æquationes compositas resoluit absque huiusmodi reductione numeri altioris speciei ad vnitatem, vt suo loco docebimus. Porrò hæc omnia tribus tantum nituntur principiis, nimirum.

Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent sunt æqualia.

Si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.

Si æqualia per eundem numerum diuidantur, fiunt æquales quotientes.

Hæc breuiter cum Diophanto attigisse sufficiat, qui plura desiderat, legat Vietam libro citato, vbi breuiter, sed accuratè more suo ista persequitur.

Cæterùm æquatione ritè præparata, quomodo ea resoluenda sit, vt ignota quantitas innotescat, non tradit Diophantus, & cùm hîc polliceatur se daturum regulas quomodo explicetur quæstio, cùm duæ species, vni æquales reperiuntur, in libris eius qui extant huiusmodi regulæ non continentur, ita vt videatur regulas omnes Alge-

bræ quas vocant, ſuppoſuiſſe, vt pote notas (nam iis paſſim vtitur in his libris) vel alio opere edito qui ad nos minimè peruenit, eas tradidiſſe. Equidem regulis ſimplicibus tantum (eùm ſcilicet vna ſpecies vni ſpeciei æquatur) in tribus prioribus libris vtitur: in ſequentibus verò ad compoſitas etiam nonnunquam deuoluitur. Simplices vnica regula comprehenduntur quæ talis eſt.

Facto hypobibaſmo ſi opus ſit, ita vt vnitates alicui ſpeciei æquales remaneāt diuidantur vnitates per numerum à ſpecie denominatū, orietur valor illius ſpeciei. Vt ſi 3. N. æquentur 12. vbi nullo eſt opus hypobibaſmo, diuide 12. per 3. fit 4. valor vnius Numeri. At ſi 2. Q. æquentur 10. N. facto hypobibaſmo 2. N. æquantur 10. vnde facta diuiſione, prodit 5. valor vnius Numeri. Quod ſi 2. C. æquentur 18. N. facto hypobibaſmo, 2. Q. æquantur 18. vnde diuidendo 18. per 2. fit 9. valor vnius quadrati, & extracta radice fit 3. valor Numeri. Et ſic de aliis. Huius regulæ fundamentum totum eſt Regula aurea proportionum, ſeu trium, in qua tertius terminus eſt vnitas, vnde ſola diuiſione opus eſt. Nam verbi gratia in vltimo exemplo, dico per regulam trium, ſi 2. Q. æquantur 18. cui numero æquatur 1. Q? vnde patet diuiſo 18. per 2. quotientem 9. eſſe valorem Quadrati. De compoſitis regulis agemus ad propoſitionem 33. libri huius, vbi earum fundamentū tangit Diophantus. Nam piget diutius immorari in re facili, & vulgo etiam Logiſtarum notiſſima.

QVÆSTIO I.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ. ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ρ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ μονάδες τεσσαράκοντα, δεήσει εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδων μ̄. συναμφότεροι ἄρα γίνονται ἀριθμοὶ δύο, μονάδες μ̄. δέδονται δὲ μονάδες ρ̄. μονάδες ἄρα ρ̄. ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσὶ μονάσι μ̄, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ρ̄ μονάδας μ̄, καὶ [ἀπὸ] τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ τῶν μ̄ μονάδων ὁμοίως μονάδας μ̄. λοιποὶ ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάσιν ξ̄. ἕκαστος ἄρα γίνεται ἀριθμὸς μονάδων λ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων τριάκοντα. ὁ δὲ μείζων μονάδων ο̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

PROPOSITVM numerum in duos numeros partiri, quorum datum ſit interuallum. Eſto datus numerus 100. interuallum verò 40. oportet inuenire numeros. Statuatur minor 1. N. Maior ergo erit 1. N. & 40. vnitates. Igitur vterq; ſimul erit 2. N. + 40. Dabantur autē eſſe 100. Proinde vnitates 100. æquales ſunt 2. N. + 40. Aufero ſimilia à ſimilibus, nimirum aufero 40. vnitates, & à 100. & à 2. N. + 40. relinquuntur 2. N. æquales vnitatibus 60. Ergo alter numerorum eſt 30. Ad poſitiones. Erit minor quidem vnitatum 30. maior verò vnitatū 70. & demonſtratio eſt manifeſta.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis eſt, & nihil continet quod lectorem morari debeat. Verba autē illa ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, quæ longa periphraſi vertit Xilander, & aliquando etiam perperam, vt ſuo loco monebimus, ego paſſim interpretatus ſum, Ad Po-

Ad Positiones: vel etiam retento Græco vocabulo. Ad Hypostases. Semper enim inuento valore numeri, propositionem his verbis absoluit Diophantus, quia videlicet vt propositæ quæstioois habeatur perfecta solutio, oportet valorem numeri ad positiones applicare, vt hoe loco, Cùm inuenerimus valorem Numeri esse 30. quia Mioor pars propositi oumeri posita erat 1 N. erit ea 30. Maior verò quæ posita erat 1 N. + 40. erit vtique 70. & sic numerus 100. diuisus est in duas partes 30. & 70. quarum ioteruallum 40. vt requirebatur. Poterant etiam positiones aliter institui hac arte. Ponatur maior pars 1 N. erit ergo minor 1 N. – 40. harum aggregatum est 2 N. – 40. quod æquari debet numero 100. Quare addeodo vtrimque 40. fiunt 2 N. æquales 140. vnde fit 1 N. 70. Ad hypostases Erit maior pars 70. Minor 30. vt priùs. Ex vtraque autem operatione elicitur huiusmodi Canon.

Dato numero diuidendo, adde vel adime datum interuallum, semißis summæ maiorem partem; semißis residui, minorem exhibebit.

Qui Canon à nobis synthetice demonstratus est proposit. 23. lib. 1. porismatum. Aliter etiam rursus poterant institui positiones. Statuatur interuallũ quæsitarum partium 2 N. Maior verò pars esto 50 + 1 N. minor 50 – 1 N. sic enim vtraque simul conficit 100. & interuallum ipsarum est 2 N. quod æquatur numero 40. Quare fit 1 N. 20. Ad positiones. Maior pars quæ posita erat 50 + 1 N erit vtique 70. Minor verò quæ posita erat 50 – 1 N. erit 30. & hinc rursus elicietur alius Canon.

Semißi dati numeri diuidendi, adde vel adime semissem dati interualli, summa & residuum quæsitas exhibebunt partes.

Porro ex vtroq; Canone manifestè colligitur, si solutio in integris contingere debeat, necesse esse vt Numerus diuidendus, & datum interuallũ, sint simul pares oumeri, vel simul impares, nam si alter sit par, alter impar; tam eorum summa, quàm quod restat minorem de maiori subtrahendo, erit impar oumerus. Quare nec summæ nec residui semissis in integris haberi poterit. Quod tangere voluit Scholiastes. Denique moneo eodem artificio datum quemlibet numerum diuidi in quotlibet partes, quarum interualla data sint. Verbi gratia. Numerus 100. diuidendus sit in tres partes, ita vt mediæ suprà minimam excessus sit 20. maximæ supra mediam excessus sit 24. Ponatur minima 1 N. erit ergo media 1 N + 20. maxima verò 1 N. + 44. Harum summa est 3 N. + 64. æqualis 100. Quare auferendo vtrimque 64. remanent 3 N. æquales 36. & fit 1 N. 12. Ad positiooes. Erit minima pars 12. Media 32. Maxima 56. Hinc quoque si placet eliciemus hunc Canonem.

Aufer à numero diuidendo summam interuallorum cuiuslibet partis supra minimã, residuum partire in numerum multitudinis partiũ, orietur minima pars.

Vnde constat, vt quæstio sit possibilis, summam interuallorum cuiuslibet partis suprà minimam, minorem esse debere numero diuidendo. Cæterùm duobus alijs modis institui possunt positiones, prout media vel maxima pars statuetur 1 N. & hinc rursus formari alij Canones, quæ omnia industriæ tuæ relinquo.

QVÆSTIO II.

PROPOSITVM numerum in duos partiri in ratione data. Constitutum sit numerum 60. partiri in duos numeros in ratione tripla. Statuatur minor 1 N. igitur maior erit 3 N. & est maior minoris triplus. Superest vt ambo simul æquentur vnita-

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ξ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τριπλασίονι. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμῶν τριῶν καὶ ἔστιν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος τριπλασίων. δεῖ λοιπὸν τοὺς δύο ἴσους εἶναι μονά-

σιν ξ. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες. ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες ἴσοι μονάσιν ξ. ὁ ἀριθμὸς ἄρα μονάδων ιε. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μονάδων ιε. ὁ δὲ μείζων μο με.

tibus 60. sed ambo compositi sunt 4 N. Proinde 4 N. æquales sunt vnitatibus 60. est ergo 1 N. vnitatum 15. Quamobrem minor est 15. maior autem 45.

IN QVAESTIONEM II.

ALITER etiam institui possunt positiones. Statuatur maior 1. N. Ergo minor ⅓ N. horum summa 1⅓ N. æqualis est 60. & fit 1. N. 45. Tantus ergo est maior, minor verò 15. vt prius. Ex vtraque operatione formatur hic Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum summam diuide datum numerum. Quotiens ductus sigillatim in sumptos numeros, exhibebit quæsitas dati numeri partes.

Minimos numeros sumendos esse ait Xilander. Sed necesse non est, nisi facilitatis gratia, quia minores numeri commodius tractantur.

Potest & hæc quæstio extendi ad diuisionem dati numeri in quotlibet partes, datas rationes seruantes, eritque eadem prorsus operatio, & idem Canon, vt superuacaneum sit id exemplis illustrare.

QVÆSTIO III.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ καὶ ὑπεροχῇ τοῖς δοθεῖσιν. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν π διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ἵνα ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος τριπλασίων ᾖ, καὶ ἔτι μονάσι τέτταρσιν ὑπερέχῃ. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός. ὁ μείζων ἄρα ἀριθμοὶ τρεῖς καὶ μονάδες τέσσαρες. καὶ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ὢν τριπλασίων, ἔτι καὶ μονάσι τέτταρσιν ὑπερέχει. λοιπὸν τοὺς δύο θέλω ἴσους εἶναι μονάσιν π. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες καὶ μονάδες δ, [ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες καὶ μονάδες δ] ἴσοι μονάσιν π, καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπαὶ ἄρα μονάδες οϛ ἴσαι ἀριθμοῖς τέσσαρσι, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιθ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς μο ιθ. ὁ δὲ μείζων μο ξα. προσληφθεισῶν τῶν δ μο. ὧν

PROPOSITVM numerum in duos partiri in data ratione, & data differentia. Constitutum sit numerum 80. in duos partiri, ita vt maior minoris triplus sit, & adhuc 4. vnitates superaddat. Statuatur minor 1 N. erit igitur maior 3 N. + 4. & sic maior minoris triplus est, & adhuc quatuor vnitates superaddit. Restat vt ambo simul æquentur vnitatibus 80. sed ambo simul iuncti faciunt 4 N. + 4. Igitur 4 N. + 4. æquales sunt vnitatibus 80. Aufero similia à similibus. Relinquuntur ergo vnitates 76. æquales 4 N. & fit 1 N. 19. Ad positiones. Erit igitur minor numerus 19. Maior autem 61. ad triplum minoris adiectis 4. quæ

de 80. subduxeram, vt triplorum numerorum inuenirem quantitatem. Postea verò eadem 4. adiicio maiori, vtriusque quantitate cognita.

ἀφεῖλον ἀπὸ τῶν π μ°. ἀφεῖλον γὰρ ὥστε εὑρεῖν πόσων μονάδων ἔσται ἕκαστος ἀριθμός. ὕστερον δὲ τῷ μείζονι ἀριθμῷ προστίθημι τὰς δ μ. μετὰ τὸ γνῶναι πόσων ἕκαστος.

IN QVAESTIONEM III.

IN Græco, vbi scriptum erat, ἐν λόγῳ καὶ ὑπεροχῇ τῆς δοθείσης, reposui, τοῖς δοθεῖσιν, flagitante sententia. Cæterum hîc etiam aliter institui potest operatio, si ponatur Maior 1 N. vnde auferendo 4. remanet 1 N. – 4. triplum minoris, Minor ergo est $\frac{1}{3}$ N. – 1 $\frac{1}{3}$ vtriusque summa fit 1 $\frac{1}{3}$ N – 1 $\frac{1}{3}$ æqualis 80. & defectum vtrimque adiiciendo 1 $\frac{1}{3}$ N. æquatur 81. $\frac{1}{3}$. Quare fit 1 N. 61. maior numerus. Minor verò 19. vt prius.

Verùm ex operatione Diophanti formabitur iste Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum summam diuide datum numerum dato interuallo multatum; quotientem si ducas in minorem sumptorum, fiet minor quæsitorum.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE duos numeros qui & datam rationem, & datum seruent interuallum. Mandatum sit maiorē minoris esse quincuplum, interuallum autem ipsorum esse vnitates 20. statuatur minor 1 N. Maior ergo erit 5 N. Superest 5 N. excedere 1 N. vnitatibus 20. At horum interuallum est 4 N. hoc igitur æquale est vnitatibus 20. & fit 1 N. 5. Eritque minor numerus vnitatum 5. Maior autē vnitatum 25. ita maiore minoris quincuplo existente, interuallum est 20.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ δοθέντι, καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ὅπως δοθῇ. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι πενταπλασίονα, τὴν δὲ ὑπεροχὴν αὐτοῖς ποιεῖν μονάδας κ. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ἑνός, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμῶν ε. λοιπὸν θέλω ἀριθμοὺς ε ὑπερέχειν ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδας κ. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστιν ἀριθμοὶ δ. ταῦτα ἴσα μονάσιν κ. [καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε] ἔσται ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς μ° ε. ὁ δὲ μείζων μονάδων κε. καὶ μένει ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ὢν πενταπλασίων, ἡ δὲ ὑπεροχὴ γίνεται μονάδων κ.

IN QVAESTIONEM IV.

QVADRVPLICITER institui potest operatio. Primò vt habetur apud Diophantum.

Secundò sic. Ponatur Maior 1 N. ergo minor $\frac{1}{5}$ N. Horum interuallum $\frac{4}{5}$ N. æquatur 20. & fit 1 N. 25. maior numerus. Ergo minor 5. vt prius. Ex vtraq; autem harum operationum iste Canon elicitur.

Sume duos numeros in ratione data, & per horum interuallum diuide datum interuallum, quotiens ductus in sumptos numeros, quæsitos exhibebit.

Tertiò sic operabere. Esto minor 1 N. ergo maior 1 N. + 20. qui cùm sit minoris quincuplus, erunt 5 N. æquales 1 N. + 20. & tandem 4 N. æquantur 20. vel 1 N. æquatur $\frac{1}{5}$ N. + 4. & tandem $\frac{4}{5}$ N. æquantur 4. & vtroque modo fit 1 N. 5. minor numerus. vnde maior est 25. vt prius.

Quartò, esto maior 1 N. ergo minor 1 N. − 20. qui cùm sit quinta pars maioris fiet $\frac{1}{5}$ N. æqualis 1 N. − 20. vel 1 N. æqualis 5 N. − 100. & vtraque æquatione resoluta, fit 1 N. 25. maior numerus, vnde minor est 5. vt prius. Hinc etiam alius Canon elici posset. Quod tibi considerandum relinquo.

QVÆSTIO V.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκατέρων τῶν διῃρημένων τὰ δοθέντα μὴ τὰ αὐτὰ μέρη συντεθέντα ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον δίδοσθαι ὥστε εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν γινομένων δύο ἀριθμῶν ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὰ δοθέντα μὴ τὰ [αὐτὰ] μέρη. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ τρίτον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἐπὶ τὸ αὐτὸ συντεθέντα ποιῇ μο λ̄. τάσσω τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται ϛϛ ε̄. τὸ ἄρα τοῦ πρώτου τρίτον ἔσται μονάδων λ̄ λεῖψει ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται μονάδων ϟ. λεῖψει ϛϛ τριῶν. λοιπὸν θέλω τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν μονάδας ρ̄, ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς δύο. καὶ μονάδας ϟ. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄. καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπὸν ἄρα μονάδες δέκα ἴσαι ἀριθμοῖς δυσίν. ὁ ϛ ἄρα ἔσται μονάδων ε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἀριθμοῦ ἑνός, ἔσται μονάδων ε̄. αὐτὸς ἄρα μονάδων κε̄. τὸ δὲ τοῦ πρώτου τρίτον μονάδων λ̄ λεῖψει ἀριθμοῦ ἑνὸς ἔσται μονάδων κε̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται μονάδων οε̄.

PROPOSITVM numerum partiri in duos numeros, vt horum vtriusque, non tamen eædem, datæ partes si coniungantur, datum conficiant numerum. Oportet autem talem hunc dari qui sit in medio duorum numerorum qui fiunt, si numeri ab initio propositi præscriptæ partes accipiantur. Imperatum sit partiri 100. in duos numeros, vt primi tertia pars, & secundi quinta pars si coniungantur, conficiant 30. Statuam secundi quintam partem 1 N. ipse igitur erit 5 N. Quare primi triens erit vnitatum 30 − 1 N. atque adeo ipse primus fiet vnitatum 90 − 3 N. Reliquum est vtrumque simul conficere vnitates 100. At ambo iuncti conficiunt 2 N. + 90. Hæc igitur æqualia sunt vnitatibus 100. Aufero similia à similibus. Restant igitur vnitates 10. æquales 2 N. ergo fit 1 N. 5. Ad positiones. Statueram secundi quintam partem 1 N. erit igitur hæc vnitates 5. atque ideo ipse secundus 25. At primi triens erat 30 − 1 N. est igitur 25. atque ipse primus 75.

Et primi quidem tertia, secundi verò quinta pars simul additæ conficiunt numerum 30. prout imperatum erat.

καὶ μένει τὸ γ^ο πρώτου τρίτον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον μονάδες λ. ὥσπερ κοινῇ συντεθέντα ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

IN QVAESTIONEM V.

HIc duas veluti conditiones apponit Diophantus. Prima est non sumendas esse easdem partes vtriusque segmenti. Quod necessarium est, non vt quæstio sit possibilis, sed vt sit alicuius momenti. Nam si eædem partes vtriusque segmenti petantur, hoc idem erit atque diuidendi numeri partem eandem sumere. Vt si postuletur duo segmenta de 100. fieri, vt vtriusque quinta pars numerum certum conficiat, patet non alium esse posse numerum illum quàm 20. qui est quinta pars ipsius 100. quia scilicet idem est sumere quintam partem totius numeri, atq; sumere quintam partem singulorum segmentorum illius. Itaque in huiusmodi casu, datus numerus quem debent conficere præscriptæ partes quæsitorum segmentorũ, semper idem erit, nimirum eadem pars totius diuidendi numeri vt dictum est. At segmenta ipsa duo quilibet numeri in quos secabitur diuidendus numerus, & sic infinitas solutiones recipiet quæstio; & absque vllo negotio secando propositum numerum in duos quoslibet, satisfactum erit proposito. Secunda conditio prorsus necessaria, est, Numerum quem conficere debent datæ partes quæsitorum segmentorum debere esse in medio partium earundem propositi numeri. Quod ne sola experientia cum Xilandro cognoscamus, hoc argumento probabimus. Sit A. propositus numerus secundus in duos, vt vnius pars ab B. denominata, & alterius pars à C denominata, si coniungantur, fiat D. sitque B. maior quàm C. & ipsius A. partes eædem sint E. F. dico D. necessariò cadere in E. & F. seu esse minorem quidem ipso E. maiorem verò ipso F.

E 33 ⅓.		F 20.
	A 100.	
B ⅓.		C ⅕.
	D 30.	

Quia enim vt dictum est suprà, si vtriusque segmenti ex A. sumeretur eadem pars B. esset partium summa æqualis ipsi E. patet si vnius segmenti sumatur pars B. alterius verò pars minor, puta C summam partium nimirum D. fore minorem ipso E. Rursus si vtriusque segmenti sumatur eadem pars C, erit summa partium æqualis F. Igitur si vnius quidem segmenti sumatur pars C, alterius verò maior pars, puta B. erit vtique summa partium D. maior quàm F. Quare constat propositum. In Græco autem vbi legebatur, ἐὰν τοῦ δὲ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὰ δοθέντα μὴ τὰ μέρη, legendum censui, ἐὰν δὲ ἐξ ἀρχῆς &c. μὴ τὰ αὐτὰ μέρη.

Porro quadruplex institui potest operatio, vt benè monet Xilander.

Prima est quæ habetur in textu Diophanti, ponendo ⅕ secundi segmenti 1. N.

Secunda fiet si ponatur triens primi segmenti 1 N. tunc enim erit ipsum primũ segmentum 3 N. at secundi quintans erit 30 − 1 N. atq; adeo ipse secundus fiet 150 − 5 N. vnde vtrumque segmentum faciet 150 − 2 N. æqualia 100. Additóque vtrimque defectu, & auferendo similia à similibus 2. N. æquantur 50. & fit 1 N. 25. primi triẽs. Reliqua patent.

Tertio, Ponatur primum segmentum 1 N. erit secundum 100 − 1 N. primi triens erit ⅓ N. secundi quintans 20 − ⅕ N. quorum summa 20 + $\frac{2}{15}$ N. æquatur 30. & tandem $\frac{2}{15}$ N. æquantur 10. fitque 1 N. 75. primum segmentum, secundum 25.

Quarto ponatur secundum segmentum 1 N. erit primum 100 − 1 N. secundi quintans fiet ⅕ N. Primi verò triens 33 ⅓ − ⅓ N. quorum summa 33 ⅓ − $\frac{2}{15}$ N. æquatur 30. & tandem $\frac{2}{15}$ N. æquatur 3 ⅓ & fit 1 N. 25. secundum segmentum, primũ autem est 75. vt prius. Et ex duabus operationibus vltimis quicquid dicat Xilander, Canon fiet non adeo perplexus.

Propositi numeri sume partes similes postulatis partibus, minorem aufer à dato numero quem conficere debent quæsitæ segmentorum partes, à maiori aufer datum numerum, residua sigillatim diuide per interuallum fractionum exprimentium partes postulatas, orientur quæsita segmenta.

Quomodo autem solui possit quæstio si Propositus numerus in plures secandus proponatur, ita vt segmentorum postulatæ partes datum conficiant numerum, non quilibet de vulgo logista doceat. Cùm enim huiusmodi quæstionum genus infinitas, immo infinities infinitas sæpe recipiat solutiones, totum artificium in segmentorum determinatione consistit, quod tradere non pigebit, si prius tyrones monuero ne operam ludant in re forte captum illorum adhuc superante, sed huius problematis omissa tractatione ad vlteriora progrediantur, donec in Logistica exercitatiores ardua quæque facilè comprehendant.

Sit igitur propositus numerus 100. diuidendus in quatuor numeros, ita vt primi $\frac{1}{2}$ secundi $\frac{1}{3}$, tertij $\frac{1}{4}$, quarti $\frac{1}{5}$, hæc omnia simul efficiant 27. Oportet autem præscriptum numerum (puta hîc 27.) cadere inter propositi ad diuidendum numeri maximam & minimam partium similium illis quæ postulantur: hoc est quia maxima pars est $\frac{1}{2}$, minima $\frac{1}{5}$. sumentes $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{5}$ de 100. nempe 50. & 20. Oportuit 27. maiorem fuisse quàm 20. minorem quàm 50. cuius rei ratio eadem est quæ supra in conditionis explicatione allata est. Itaque ponatur primum segmentum 1 N. igitur reliqua simul erunt 100. − 1 N. & cùm primi segmenti $\frac{1}{2}$ sit $\frac{1}{2}$ N. erunt $\frac{1}{3}$ secundi, $\frac{1}{4}$ tertij, & $\frac{1}{5}$ quarti simul 27 − $\frac{1}{2}$ N. Itaque iam oportet diuidere 100 − 1 N. in tres numeros, ita vt primi $\frac{1}{3}$ secundi $\frac{1}{4}$ tertij $\frac{1}{5}$ conficiant 27 − $\frac{1}{2}$ N. Quare ob appositam conditionem oportet 27 − $\frac{1}{2}$ N. cadere inter $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$ de 100 − 1 N. hoc est oportet 27 − $\frac{1}{2}$ N. esse minus quàm 33 $\frac{1}{3}$ − $\frac{1}{3}$ N. & maius quàm 20 − $\frac{1}{5}$ N. & quidē 27 − $\frac{1}{2}$ N. esse minus quàm 33 $\frac{1}{3}$ − $\frac{1}{3}$ N. luce clariùs est. Curandum ergo tantùm vt sit maius quàm 20 − $\frac{1}{5}$ N. Hoc autem si ponatur addendo vtrimque $\frac{1}{2}$ N. oportebit 27. esse maius quàm 20 + $\frac{3}{10}$ N. & ablatis vtrimque 20. oportebit 7. maius esse quàm $\frac{3}{10}$ N. Quare cùm diuidendo 7. per $\frac{3}{10}$. fiat quotiens 23 $\frac{1}{3}$. patet valorem Numeri necessariò minus esse debere quàm 23 $\frac{1}{3}$ Determinatum ergo est de primo segmento, nam statui potest quilibet numerus infrà 23 $\frac{1}{3}$. Ponatur ergo 10. erunt itaque reliqua simul 90. & cùm auferendo 5. semissem ipsius 10. de 27. supersint 22. iam diuidendus erit 90. in tres numeros, ita vt primi $\frac{1}{3}$ secundi $\frac{1}{4}$ tertij $\frac{1}{5}$ conficiant 22. statuatur primus seu secundum segmentum ipsius 100. 1 N. erunt duo reliqui 90 − 1 N. & cùm primi $\frac{1}{3}$ sit $\frac{1}{3}$ N. patet $\frac{1}{4}$ secundi & $\frac{1}{5}$ tertij conficere 22 − $\frac{1}{3}$ N. Hoc autem vt possibile sit, oportet 22 − $\frac{1}{3}$ N. cadere inter $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$ de 90 − 1 N. hoc est oportet 22 − $\frac{1}{3}$ N. esse minus quàm 22 $\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{4}$ N. & maius quā 18 − $\frac{1}{5}$ N. & primum quidem manifestum est. Secundum autem sic curabimus. Quia 22 − $\frac{1}{3}$ N. est maior quàm 18 − $\frac{1}{5}$ N. addito vtrimque $\frac{1}{3}$ N. manebit 22. maior quàm 18 + $\frac{2}{15}$ N. & ablatis vtrinque 18. manent 4. maiora quàm $\frac{2}{15}$ N. Quare cùm diuidendo 4. per $\frac{2}{15}$ fiat quotiens 30. patet valorem numeri minorem esse debere quàm 30. Itaque posito primo segmento 10. determinatum est etiam de secundo, nam debet esse infrà 30. Ponatur ergo quilibet numerus infrà 30. puta 24. Cùm ergo auferendo 10. & 24. de 100. supersint 66. erit hæc summa tertij & quarti. Cùm verò semissis primi sit 5. & triens secundi 8. sublatis his de 27. remanet 14. pro quadrāte tertij & quintante quarti. Diuidatur ergo per propositionem Diophanti numerus 66. in duos, vt vnius quadrans cum alterius quintante conficiat 14. inuenies alterum 16. alterum 50. Quamobrem soluta est quæstio, & sunt numeri 100. quatuor segmenta 10. 24. 16. 50. quæ satisfaciunt postulatis. Manifestum autem est quæstionem infinities infinitas recipere solutiones. Nam vt probatum est, potest primum segmentum poni quilibet numerus infrà 23 $\frac{1}{3}$ hi autem ob fractiones infiniti sunt. Deinde sumpto vno ex infinitis illis numeris puta 10. primo segmento manente 10. potest secundum segmentum infinities variari, cùm vt ostensum est poni possit quilibet numerus infrà 30. sed ista sufficiant.

QVÆSTIO VI.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ προτέρου μέρος δοθὲν τοῦ ἑτέρου μέρους δοθέντος ὑπερέχῃ δοθέντι ἀ-

PROPOPOSITVM numerum partiri in duos numeros, vt prioris data pars, posterioris datam partem superet

dato numero. Hunc autem minorem esse oportet, eo qui fit si propositi ab initio numeri pars illa capiatur, quæ alteram excedit. Constitutum sit ergo partiri 100. in duos numeros, vt prioris quadrans, posterioris sextantem 20. vnitatibus superet. Pono sextantem posterioris 1. N. ipse ergo erit 6. N. Quadrans autem prioris erit 1. N. + 20. Ipse itaque 4. N. + 80. Cæterùm volo duorum summam esse 160. sed vtriusque summa est 10. N. + 80. hæc igitur æquantur vnitatibus 100. Aufero similia à similibus, relinquũtur 10. N. æquales 20. & fit 1. N. vnitatum 2. Ad hypostases. Statueram sextantem posterioris 1. N. Ipse ergo erit 12. At prioris quadrans fuit 1. N. + 20. erit igitur 22. & ipse prior 88. manetque hoc, huius quadrantem sextante illius maiorem esse 20. vnitatibus. Ipsi autem coniuncti numeri, propositum restituunt numerum.

ἀριθμῶν. δεῖ δὴ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐλάσσονα εἶναι τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ, ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὸ δοθὲν μέρος ἐν ᾧ ἐστιν ἡ ὑπεροχή. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου τέταρτον τοῦ τοῦ δευτέρου ἕκτου ὑπερέχῃ μο. κ̄. τάσσω τὸ τοῦ δευτέρου ἕκτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται ἀριθμῶν ϛ̄. τὸ ἄρα τοῦ πρώτου τέταρτον ἔσται ἀριθμοῦ ἑνός, καὶ μο. κ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ἀριθμῶν τεσσάρων καὶ μονάδων π̄. λοιπὸν θέλω τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν μονάδας ρ̄. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς δέκα, μονάδας π̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπὸν ἀριθμοὶ δέκα ἴσοι μονάσιν κ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο. β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ τοῦ δευτέρου ἕκτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται μονάδων δώδεκα. τὸ δὲ τοῦ πρώτου τέταρτον, ἀριθμοῦ ἑνὸς καὶ μονάδων κ̄. ἔσται μονάδων κβ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται μο. πη̄. καὶ μένει τὸ τοῦ πρώτου τέταρτον τοῦ τοῦ δευτέρου ἕκτου ὑπερέχον μονάδας κ̄. οἵτινες κοινῇ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

IN QVAESTIONEM VI.

CONDITIONIS appositæ ratio in promptu est. Impossibile est enim vt pars aliqua minoris numeri, sit æqualis vel maior eadem parte maioris numeri. Quare cùm diuidendus est 100. in duos huiusmodi numeros, vt prioris quadrans superet sextantem posterioris numero 20. Impossibile est 20. non esse minorem quadrante de 100. Cùm 20. sit minor quadrante vnius segmenti de 100.

Cæterum vt bene monet Xilanderr sex diuersis operationibus solui poterat quæstio,

Prima est qaæ habetur in textu Diophanti, ponendo scilicet sextantem posterioris segmenti 1 N.

Secunda huic respondens est. si ponatur prioris quadrans 1 N. ipse prior 4 N. vnde fit sextans posterioris 1 N. – 20. ipse posterior 6 N. – 120. qui priori additus summam facit 10 N. – 120. æqualem 100. vnde fit 1. N. 22. prioris quadrans suntque ipsi numeri vt prius 88. & 12.

Tertia operatio est. Pono primum 1 N. ergo ¼ N. – 20. est sextans secundi, ipse

secundus 1 $\frac{1}{2}$ N. − 120. qui primo additus facit 2 $\frac{1}{2}$ N. − 120. æqualia 100. & fit 1 N. 88. primus scilicet.

Quarta huic respondens est. Pono secundum 1 N. ergo $\frac{1}{6}$ N. + 20. est quadrans primi. ipse igitur primus est $\frac{2}{3}$ N. + 80. qui secundo additus facit 1 $\frac{2}{3}$ N. + 80. æqualia 100. & fit 1 N. 12. secundus numerus.

Quinta operatio est. Pono primum 1 N. ergo secundus est 100 − 1 N. Primi quadrans $\frac{1}{4}$ N. secundi sextans 16 $\frac{2}{3}$ − $\frac{1}{6}$ N. cui addendo 20. fiunt 36 $\frac{2}{3}$ − $\frac{1}{6}$ N. æqualia $\frac{1}{4}$ N. & tandem $\frac{5}{12}$ N. æquantur 36 $\frac{2}{3}$ vnde fit 1 N. 88. vt prius.

Sexta huic respondens est. Pono secundum 1 N. ergo primus est 100 − 1 N. secundi sextans est $\frac{1}{6}$ N. primi quadrans 25 − $\frac{1}{4}$ N. Quare $\frac{1}{6}$ N. + 20. æquantur 25 − $\frac{1}{4}$ N. & tandem 5. æquantur $\frac{5}{12}$ N vnde fit 1 N. 12. vt supra.

Ex duabus autem vltimis elicietur huiusmodi Canon.

Propositi numeri sume partes similes postulatis, & minori adijce datum interuallum, aufer idem interuallum à maiore, summam & residuum partire seorsim per aggregatum fractionum exprimentium partes postulatas, orientur quæsiti numeri.

QVÆSTIO VII.

ΑΠΟ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμούς, καὶ ποιεῖν τοὺς λοιποὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν τὸν ρ̄, καὶ τὸν κ̄. καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια. τετάχθω ὁ ζητούμενος, ἀριθμοῦ ἑνός. κἂν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω μονάδας ρ̄. λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς, λεῖψει μονάδων [ρ̄ κἂν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀφέλω μονάδας κ̄. λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς λεῖψει μονάδων] κ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. τρὶς δὲ ἄρα τὰ ἐλάσσονα γίνεται ἀριθμοὶ γ̄. λεῖψει μονάδων τ̄ ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ λεῖψει μονάδων κ̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις. γίνονται ἀριθμοὶ γ̄ ἴσοι ἀριθμῷ ἑνὶ καὶ μονάσι σπ̄. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάσι σπ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων ρμ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ἀριθμοῦ ἑνός. ἔσται ἄρα μονάδων ρμ̄. κἂν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ρ̄ λοιπαὶ

AB eodem numero auferre duos datos numeros, vt residui eam seruent quæ dabitur rationem. Iubeamur ab eodem numero auferre 100. & 20. vt maius residuum, minoris sit triplum. Statuatur quæsitus numerus 1 N. ab eo si auferam 100. residuum est 1 N. − 100. & si ab eodem auferam 20. relinquitur 1 N. − 20. Oportet autem residuum maius minoris esse triplum; Ter igitur minus residuum æquatur maiori. Arqui ter minus residuum, fit 3 N. − 300. Hoc ergo æquatur 1 N. − 20. Defectus communis vtrinque addatur, fiunt 3 N. æquales 1 N. + 280. Auferantur à similibus similia; relinquuntur 2 N. æquales vnitatibus 280. & fit 1 N. vnitatum 140. Ad positiones. Numerum quæsitum statueram 1 N. Erit igitur vnitatum 140. & si ab eo abstulero 100. supersunt

40. si autem abstulero 20. restant 120. Et maius residuum minoris est triplum.

μονάδες μ̅. ἐὰν δὲ τῶν κ̅ λοιπαὶ μονάδες ρκ̅. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM VII.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ex ea elicitur huiusmodi Canon.

Ducito maiorem datorũ numerorum in denominatorem rationis postulatæ, à producto aufer minorem. Residuum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

Aliter etiam cum Francisco Vieta institui poterat operatio. Ponatur 1 N. defectus quo 100. deficit à quæsito numero. Erit ergo quæsitus numerus 1 N. + 100. Quia verò defectus quo 20. deficit ab eodem quæsito numero, triplus est defectus quo 100. ab eodem deficit, erit ipsius 20. defectus 3 N. adeo quæsitus numerus rursus æquabitur 3 N. + 20. Quamobrem æquales sunt 1 N. + 100. & 3 N. + 20. vnde fit 1 N. 40. & quæsitus numerus est 140. vt prius. Hinc etiam elicietur alius Canon, nimirum.

Datorum numerorum internallum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur defectus maioris numeri à quæsito numero, quo ei addito, fiet quæsitus numerus.

QVÆSTIO VIII.

DVOBVS datis numeris eũdem adiicere numerum, vt compositi ad inuicem datam habeant rationem. Oportet autem datam rationem minorem esse ea quam habet maior datorum numerorum ad minorem. Iubeamur ad 100. & ad 20. eundem numerũ adiicere, vt maius compositum, minoris sit triplũ. Ponatur addendus vtrique numero 1 N. is si ad 100. addatur, fiet 1 N. + 100. si verò ad 20. adiiciatur, fiet 1 N. + 20. & oportet compositum maius minoris esse triplum. Ter igitur minus compositum æquabitur maiori. Ter autem minus compositum, fit 3 N. + 60. Hoc ergo æquale est 1 N. + 100. Auferantur similia à similibus, supersunt 2 N. æquales vnitati-

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τοὺς γενομένους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον· δεῖ δὴ τὸν δεδομένον λόγον ἐλάττονα εἶναι τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάττονα. ἐπιτετάχθω δὴ τῷ ρ̅ καὶ τῷ κ̅ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια. τετάχθω ὁ προστιθέμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ϛ^{ος} ἑνός. κἂν μὲν τῷ ρ̅ προστεθῇ, ἔσται ἀριθμοῦ ἑνός, μονάδων ρ̅, ἐὰν δὲ τῷ κ̅, γίνεται ἀριθμοῦ ἑνός, μ^ο κ̅. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἔσται τοῖς μείζοσι. τρὶς δὲ τὰ ἐλάττονα γίνεται ἀριθμοὶ τρεῖς μονάδες ξ̅. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσιν ρ̅. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάσιν

μ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ κ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν προστιθέμενον ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς ἑνός, ἔσται μονάδων κ̄. κἂν μὲν τῷ ρ̄ προστεθῇ, γίνονται μονάδες ρκ̄. ἐὰν δὲ τῷ κ̄. γίνονται μονάδες μ̄. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

bus 40. & fit 1 N. vnitatum 20. Ad positiones. Statueram adiiciendum vtrique numero 1 N. erit ergo vnitatum 20. & si ad 100. addatur fiunt vnitates 120. At si ad 20. adiiciatur, fiunt vnitates 40. & est maius compositum minoris triplum.

IN QVAESTIONEM VIII.

CONDITIO apposita nil aliud dicit, quàm quod ostendimus propositione prima libri primi porismatum. Reliqua omnia sunt dilucida, & ex operatione Diophanti formabitur iste Canon.

Aufer à maiore datorum numerorum, productum ex minore in denominatorem rationis postulatæ, residuum diuide per eundem denominatorem vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

QVÆSTIO IX.

ΑΠΟ δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τοὺς λοιποὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. δεῖ δὴ τὸν δεδομένον λόγον, μείζονα εἶναι τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάττονα. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ κ̄ καὶ τοῦ ρ̄ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων ἑξαπλάσια. τετάχθω ὁ ἀφαιρούμενος ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ἀριθμὸς εἷς, κἂν μὲν ἀπὸ τοῦ ρ̄ ἀφαιρεθῇ, λοιπαὶ μονάδες ρ̄ λείψει ς ἑνός. ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν κ̄. λοιπαὶ μονάδες κ̄. λείψει ς ἑνός. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι ἑξαπλάσια. ἑξάκις ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσιν. ἑξάκις δὲ τὰ ἐλάσσονα ποιεῖ μ̄ ρκ̄ λείψει ςς ς̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄ λείψει ς ἑνός. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, λοιποὶ ἀριθμοὶ ε̄

ADATIS duobus numeris auferre eundem numerum, vt residui ad inuicem datam habeant rationem. Oportet autem datam rationem maiorem esse ea quam habet maior datorum numerorũ ad minorem. Imperatum sit à 20. & à 100. auferri eundem numerum, vt maius residuum minoris sit sescuplum. Statuatur numerus ab vtroque numero auferendus 1 N. Et si quidem à 100. auferatur, reliquæ sunt vnitates 100 - 1 N. si autem à 20. detrahatur, restant vnitates 20 - 1 N. Et oportet residuum maius, minoris esse sescuplum. Sexies igitur minus residuũ æquatur maiori. Sexies autem minus residuum fit 120 - 6 N. hoc æquale est 100 - 1 N. Adiiciatur communis defectus, & auferantur similia à similibus, relinquuntur 5 N. æquales vnitati-

bus 20. & fit 1 N. vnitatum 4. Ad Positiones. Statueram auferendum ab vtroque numero 1 N. erit is vnitatum 4. Qui quidem si à 100. auferatur, supersunt vnitates 96. si autem à 20. detrahatur, relinquuntur vnitates 16. Et est residuum maius minoris sescuplum.

ἴσοι μονάσιν κ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων δ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ἀφαιρούμενον ἀφ᾽ ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ἀριθμὸν ἕνα, ἔσται μονάδων δ̄. κἂν μὲν ἀπὸ τῶν ρ̄ ἀφαιρεθῇ λοιπαὶ μονάδες ϟϛ̄. ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν κ̄. λοιπαὶ μονάδες ιϛ̄. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων ὄντα ἑξαπλάσια.

IN QVAESTIONEN IX.

CONDITIONIS hic appositæ est eadem ratio, quæ suprà. Canon sic formabitur.

Ducito denominatorem rationis in minorem datorum numerorum, à producto aufer maiorem, residuum diuide per ipsum denominatorẽ vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

Aliter cum Francisco Vieta licebit operari. Ponamus 1 N. excessum ipsius 20 suprà quæsitum numerum, erit ergo 6 N. excessus ipsius 100. supra eundem. Quare quæsitus numerus erit tam 20 − 1 N. quàm 100 − 6. N. Hæc igitur æquantur inter se. Et fit 1 N. 16. excessus ipsius 20. supra quæsitum numerum, quo ablato remanet 4. quæsitus numerus. Et hinc etiam elicietur alius Canon.

Datorum numerorum interuallum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur excessus minoris numeri suprà quæsitum numerum, quo ablato remanet quæsitus numerus.

QVÆSTIO X.

DVOBVS datis numeris, eundem numerum minori quidem ex ipsis addere, detrahere autem à maiori, vt compositum ad residuum datam habeat rationem Imperatum sit ipsi quidem 20. addere, at verò à 100. auferre eundem numerum, vt compositum residui sit quadruplum. Ponatur addendus & adimendus vtrique numero 1 N. & si ad 20. addatur, fiet 1 N. + 20. si verò à 100. detrahatur, fiet 100 − 1 N. & oportet maius minoris esse quadruplum. Quater igitur mi-

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς τῷ μὲν ἐλάσσονι αὐτῶν προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ μείζονος ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸν γινόμενον πρὸς τὸν λοιπὸν λόγον ἔχειν δεδομένον. ἐπιτετάχθω τῷ μὲν κ̄ προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ ρ̄ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τετραπλάσια. τετάχθω ὁ προστιθέμενος καὶ ἀφαιρούμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς̄ ἑνός, κἂν μὲν τῷ κ̄ προστεθῇ, γίνεται ς̄ ἑνὸς μ° κ̄. ἐὰν δὲ τῶν ρ̄ ἀφαιρεθῇ, γίνεται μ° ρ̄ λείψει ς̄ ἑνός. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων εἶναι τετραπλάσια. τετράκις ἄρα τὰ

ἐλάττονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. τετράκις δὲ τὰ ἐλάσσονα γίνεται μονάδες υ̅ λείψει ἀριθμῶν δ̅. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσιν κ̅. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, λοιποὶ ἀριθμοὶ ε̅ ἴσοι μονάσι τπ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων ος̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν προστιθέμενον καὶ ἀφαιρούμενον ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ς̅ ἕνα. ἔσται μ̊ ος̅. κἂν μὲν τῷ κ̅ μ̊ ος̅ προστεθῶσι, γίνονται μ̊ ϟς̅, ἐὰν δὲ τοῦ ρ̅ ἀφαιρεθῶσι, λοιπαὶ μονάδες κδ̅, καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων ὄντα τετραπλάσια.

nus æquabitur maiori. Sed quater minus fit vnitates 400 − 4 N. hoc ergo æquatur 1 N. + 20. Communis addatur defectus, & auferantur à similibus similia, supersunt 5 N. æquales vnitatibus 380. & fit 1 N. 76. Ad positiones. Statueram addendum & adimendum vtrique numero 1 N. is ergo erit 76. & si ad 20. addantur 76. fiunt 96. si verò à 100. auferantur, supersunt 24. & patet maius minoris esse quadruplum.

IN QVAESTIONEM X.

ADVERTE hîc triplicem casum dari posse. Vel enim datis duobus numeris, idem tertius quæsitus maiori est adimendus, & addendus minori. Vel contrà est addendus maiori, & adimendus minori. Et ex prima consideratione, rursus duplex casus oritur. Vel enim poscimus rationem collecti ad residuum, vel residui ad collectum, ita vt collectum nunc sit maius extremum proportionis, nunc verò minus.

Primus Casus est is, in quem incidit operatio Diophanti, cùm petat auferri eundem numerum à maiori 100. & addi minori 20. vt summa residui sit quadrupla. In quo casu nil refert quæ proportio postuletur, siue nimirum maior proportione datorum numerorum, siue minor; etenim numerus minor 20. quantumlibet augeri potest, & maior 100. quantumlibet minui, vnde quæcumque proportio postuletur, poterit summa esse maius extremum, & residuum minus extremum. Sed in hoc casu hic formabitur Canon.

Ducito denominatorem rationis postulatæ in maiorem datorum numerorum, à producto aufer minorem; & residuum partire per ipsum denominatorem vnitate auctum, orietur quæsitus numerus.

Aliter etiam positiones fieri poterant. Excessus numeri 100. suprà quæsitum, esto 1. N. erit ergo quæsitus 100 − 1 N. & quia supradictus excessus ponitur subquadruplus compositi ex numero 20. & ex quæsito numero, erit compositum illud 4 N. Quare auferendo 20. remanet 4 N. − 20 quæsitus numerus. Proinde 100 − 1 N. æquantur 4 N. − 20. & fit 1 N. 24. excessus ipsius 100. suprà quæsitum numerū, quare detracto 24. de 100. relinquitur quæsitus 76. Hinc rursus fiet hic Canon.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, orietur excessus maioris datorum numerorum, suprà quæsitum; eoque detracto remanebit quæsitus numerus.

Secundus casus est, cùm quæsitus numerus addendus quidem est, vt prius minori datorum, & à maiore detrahendus, sed residuum fit maius extremum proportionis postulatę. Tunc autem oportet rationē postulatam minorem esse ratione datorum numerorū. Quod sic ostenditur. Sint A. B. dati numeri A. maior, & B. minor: & sit G. quæsitus numerus qui additus ad B. faciat D. detractus ab A. relinquat C. ita vt C. sit maior

A 100. B 20.
C 96. D 24.
G 4.

ior quàm D. dico rationem A. ad B. maiorem esse ratione C. ad D. Nam ratio A. ad D. maioris inæqualitatis, maior est ratione B. ad D. minoris inæqualitatis, cùm maiorem habeat denominatorem. Igitur & permutando ratio A. ad B. maior est ratione C. ad D. Quod erat propositum. 27. quinti.

Hîc etiam licet duplicem operationem instituere, & duplicem Canonem formare, nimirum.

Ducito denominatorem rationis postulatæ in minorem datorum numerorum, productum aufer à maiore, & residuum diuide per ipsum denominatorem vnitate auctum, orietur quæsitus numerus. vel.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, orietur summa quæsiti numeri & minoris datorum, vnde si auferatur minor datorum, remanet quæsitus.

Tertius Casus est cùm quæsitus numerus addendus est maiori datorum, & à minore detrahendus, vbi necesse est summam maiorē esse residuo, & oportet postulatam rationem, maiorem esse ratione datorum numerorum. Quod simili prorsus argumento ostendetur, illius quo supra contrarium ostensum est. Sed & duplex instituetur operatio, & duplex Canon formabitur, nimirum.

Ducito denominatorem rationis postulatæ in minorem datorum numerorum, à producto aufer maiorem, & residuum diuide per denominatorem ipsum vnitate auctum, orietur quæsitus numerus. vel.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, quotiens erit excessus minoris datorum numerorum suprà quæsitum, quo detracto relinquetur quæsitus.

QVÆSTIO XI.

DVOS datos numeros, alterum quidem addere, alterum verò detrahere ab eodem numero, vt geniti ad inuicem datam habeant rationem. Constitutum sit ipsum quidem 20. addere, sed ipsum 100. auferre ab eodem numero, vt maior genitorum, minoris triplus sit. Esto quæsitus 1 N. & si huic adiiciamus vnitates 20. fit 1 N. + 20. si autem ab eodem auferantur vnitates 100. superest 1 N. − 100. & oportet maiorem minoris esse triplum. Ter igitur minor æquatur maiori. Sed minor ter fit 3 N. − 300. Igitur 3 N. − 300. æquantur 1 N. + 20. Communis addatur defectus, & similia à similibus au-

ΔΥΟ δοθέντας ἀριθμούς, ὃν μὲν προσθεῖναι, ὃν δὲ ἕτερον ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ποιεῖν τοὺς γενομένους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. Ἐπιτετάχθω τὸν μὲν κ προσθεῖναι, τὸν δὲ ρ ἀφῃρεῖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια. ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ ἑνός. κἂν μὲν τούτῳ προστεθῶσι μ° κ. γίνεται ϛ ἑνὸς μ° κ. ἐὰν δὲ ἀπὸ τούτου ἀφαιρεθῇ μ° ρ. λοιπός, ἀριθμὸς εἷς λεῖψει μ° ρ. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια, τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι, ἀλλὰ τρὶς τὰ ἐλάττονα γίνεται ϛ τρεῖς λεῖψει μ° τ. ἀριθμοὶ ἄρα τρεῖς λεῖψει μ° τ. ἴσα ἐστὶ ϛ ἑνὶ μ° κ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων

ὅμοια, μονάδες τκ̄ ἄρα ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσὶν, καὶ γίνεται ὁ ς̄ μο ρξ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων μο ρπ. ὁ δὲ ἐλάττων ξ. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

ferantur, supersunt vnitates 320. æquales 2 N. & fit 1 N. 160. Ad positiones. Est maior vnitatũ 180. minor 60. & patet maiorem minoris esse triplum.

IN QVAESTIONEM XI.

OPERATIO Diophanti facilis est, vnde Canon vniuersalis elicitur, quamuis eum Xilander ad proportionem multiplicem malè restringat.

Multiplica detrahendum per denominatorem rationis, producto adiice addendum, summam diuide per denominatorem ipsum vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

Aliter etiam licet operari. Ponatur defectus ipsius 100. à quæsito numero 1 N. ergo ipse quæsitus numerus est 1 N. + 100. At 3 N. erit summa quæsiti numeri & ipsius 20. Quare ablato 20. remanet quæsitus 3 N. − 20. Proinde 1 N. + 100. æquantur 3 N. − 20. & fit 1 N. 60. defectus ipsius 10. à quæsito, quare quæsitus est 160. vt prius. Hinc etiam elicietur alius Canon.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, quotiens erit defectus detrahendi numeri à quæsito, quo restituto fiet quæsitus.

QVÆSTIO XII.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς δίς. ὅπως ὁ εἷς ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὁ δὲ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς δίς, ὅπως ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ᾖ διπλασίων. ὁ δὲ μείζων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως [τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως] ᾖ τριπλασίων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ς̄ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ἔσται ςς̄ δύο. ὁ ἐλάττων ἄρα τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως, μονάδων ρ̄. λεῖψει ἀριθμῶν δύο. καὶ ἐπεὶ δεῖ αὐτοῦ τρι-

PROPOSITVM numerum diuidere bis in duos numeros, ita vt vnus è prima diuisione ad vnũ è secunda diuisione datam habeat rationem. Ac reliquus ex secunda diuisione ad reliquum è prima rationem item habeat datam. Iniunctum sit nobis numerum 100. diuidere bis in duos numeros, ita vt maior è prima diuisione, minoris è secunda diuisione sit duplus; maior verò è secunda diuisione minoris è prima diuisione sit triplus. Ponatur minor è secunda diuisione 1 N. Maior igitur è prima diuisione erit 2 N. Minor itaque è prima diuisione erit vnitatum 100 − 2 N. & quia huius triplus est

maior è secunda diuisione, erit vtique 300 - 6 N. Superest igitur vt ambo secundæ diuisionis coniuncti efficiant 100. At coniuncti faciunt 300 - 5 N. Hoc ergò æquatur 100. & fit 1 N. vnitarum 40. Ad positiones. Posueram maiorem è prima diuisione 2 N. erit ergo vnitatum 80. Minorem verò eiusdem diuisionis statueram 100 - 2 N. erit igitur 20. At posueram maiorem è secunda diuisione 300 - 6 N. erit ergo 60. Minor denique è secunda diuisione qui positus fuerat 1 N. erit 40. & euidens est demonstratio.

πλασίων ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως, ἔσται μονάδων τ. λείψει ἀριθμῶν ς. λοιπὸν ἄρα καὶ τοὺς τῆς δευτέρας διαιρέσεως συντεθέντας ποιεῖν μο ρ. ἀλλὰ συντεθέντες ποιοῦσι μονάδας τ. λείψει ἀριθμῶν ε. ταῦτα ἴσα μονάσι ρ. καὶ γίνεται ὁ ς μονάδων μ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν μείζονα τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ςς δύο. ἔσται μονάδων π. τὸν δὲ ἐλάσσονα τῆς αὐτῆς διαιρέσεως μονάδων ρ. λείψει ςς δύο. ἔσται μο κ. τὸν δὲ μείζονα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως μο τ. λείψει ςς ς. ἔσται μο ξ. τὸν δὲ ἐλάσσονα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ς ἑνός. ἔσται μο μ. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

IN QVAESTIONEM XII.

BENE monet Xilander quadruplicem institui posse operationem, eò quod quælibet pars cuiuslibet diuisionis poni potest 1 N. Sed ego præterea ex ipsa Diophanti operatione aio formari posse huiusmodi Canonem.

Ducito sigillatim denominatorem rationis vtriusque vnitate multatum, in datum numerum, producta diuide seorsim per numerum qui fit ex mutua denominatorum multiplicatione vnitate multatum, orientur minores partes vtriusque diuisionis. Item.

Ducito sigillatim denominatorem rationis vtriusque vnitate auctum, in datum numerum producta diuide seorsim per eandem qui suprà numerum, orientur partes maiores.

Cæterùm in similibus quæstionib9, si pars vna prioris diuisionis sit maior vna parte posterioris, necessariò altera posterioris pars est maior altera prioris, quin etiam & eodem interuallo maior est, vt constat ex prop. quarta libri primi porism. Quo fundamento qui niti velit, aliter etiam operationem instituet hac arte. Sit minor pars primæ diuisionis 1 N. Ergo maior secundæ erit 3. N. & cùm harum partium interuallum sit 2 N. oportet & reliquas eodem distare interuallo, sed quia reliqua primæ diuisionis est dupla reliquæ secundæ, illarum interuallum æquale est ipsi minori parti secundæ diuisionis, quare hæc pars est 2 N. quæ maiori nimirum 3 N. addita efficit 5 N. æquales 100. vnde fit 1 N. 20. minor pars primæ diuisionis &c.

QVÆSTIO XIII.

PROPOSITVM numerum diuidere ter in duos numeros, vt vnus è prima diuisione ad vnum è secunda, datam habeat rationem. Reliquus autem

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς τρίς, ὅπως ὁ εἷς τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὁ

δὲ λοιπὸς τοῦ ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως [πρὸς ἕνα τοῦ ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως] λόγον [ἔχῃ δεδομένον] καὶ ἔτι ὁ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς τρὶς, ὅπως ὁ μείζων τοῦ ἐκ τῆς πρώτης τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας ᾖ τριπλασίων. ὁ δὲ μείζων τοῦ ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐκ τῆς τρίτης ᾖ διπλασίων. καὶ ἔτι ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς πρώτης ᾖ τετραπλασίων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως ς^{ου} ἑνός. ὁ ἄρα μείζων τοῦ ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ἔσται ςς δύο. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ διαίρεσίς ἐστι μ° ρ̄. ὁ ἄρα ἐλάττων τοῦ ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ἔσται μ° ρ̄. λεῖψει ςς δύο. καὶ ἐπεί ἐστιν αὐτοῦ τριπλασίων ὁ μείζων τοῦ ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως, ἔσται μ° τ̄. λεῖψει ςς ς̄. ὁ ἄρα ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ἔσται ςς ς̄. λεῖψει μ° σ̄. καὶ ἐπεί ἐστι αὐτοῦ τετραπλασίων ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως, ἔσται ςς κδ̄. λεῖψει μ° ω̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν τρίτην διαίρεσιν συντεθεῖσαν ποιεῖν μονάδας ρ̄. ἀλλὰ συντεθεῖσα ποιεῖ ςς^{οὺς} κε̄. λεῖψει μ° ω̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° λς̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων τοῦ ἐκ τῆς τρίτος διαιρέσεως μ° λς̄. ὁ δὲ μείζων ξδ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ις̄. ὁ δὲ μείζων πδ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως κη̄. ὁ δὲ μείζων οβ̄. καὶ δῆλον ὅτι ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

è secunda diuisione, ad vnum è tertia datam habeat rationem. Et rursus reliquus è tertia diuisione ad reliquum è prima datam etiam habeat rationem. Iniunctum sit numerum 100. diuidere ter in duos numeros, vt maior è prima diuisione, minoris è secunda sit triplus; at maior è secunda diuisione, minoris è tertia sit duplus; & adhuc maior è tertia diuisione, minoris è prima sit quadruplus. Ponatur minor è tertia diuisione 1 N. Maior igitur è secunda diuisione erit 2 N. Et quia totus numerus qui diuiditur est 100. erit minor è secunda diuisione 100 − 2 N. Et quoniam huius triplus est maior è prima diuisione, erit is 300 − 6 N. Igitur minor ex eadem diuisione erit 6 N. − 200. Et quia illius quadruplus est maior è tertia diuisione, erit is 24 N. − 800. Superest vt tertiæ diuisionis vtraque pars simul efficiat 100. sed vtraque simul est 25 N. − 800. Hoc igitur æquatur 100. Et fit 1 N. vnitatum 36. Ad positiones. Erit minor è tertia diuisione 36. maior autem 64. At minor è prima diuisione 16. maior 84. Deniq; minor è secunda diuisione erit 28. maior 72. Et manifestũ est hos satisfacere proposito.

IN QVAESTIONEM XIII.

SEXTVPLICITER institui posse operationem benè monet Xilander. Ego verò & Canonem fabricor satis ingeniosum.

Sume tres dominatores eo quo proponuntur ordine, & ducito quemlibet vnitate multatum in eum qui ab ipso tertius est, productum vnitate auctum ducito in datum numerum, & productum diuide per solidum sub denominatoribus contentum vnitate auctum, habebis minores partes singularum diuisionum. vel.

Ducito quemlibet denominatorem vnitate multatum in eum qui ab ipso tertius est, productum vnitate auctum ducito in reliquum denominatorem, & productum ducito in datum numerum, productumque diuide per solidum de quo suprà, habebis maiores partes singularum diuisionum.

Propositis autem tribus numeris, tertius à quolibet dicitur ille qui tertius ab eo numeratur, si cùm perueneris ad vltimum; recurras ad primum. Vt hisce propositis 3. 2. 4. Tertius ab ipso 3. est 4. At tertius ab ipso 2. est 3. denique tertius ab ipso 4. est 2.

QVÆSTIO XIV.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione ad eorumdem summam datam habeat rationem. Oportet autem multitudinem vnitatum quæ statuetur pro altero numerorum maiorem esse denominatore rationis datæ. Mandatum sit productum ex multiplicatione, ad summam habere rationem triplam. Ponatur alter numerorum 1 N. alter (vt addita conditio præcipit) maior quàm 3. nempe 12. & est productus eorum multiplicatione 12 N. summa verò illorum 1 N. + 12. superest vt 12 N. sint tripli ad 1 N. + 12. Ter igitur minor æquabitur maiori, & fit 1 N. vnitatum 4. Erit ergo alter illorum 4. alter verò 12. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς τὸν ἐκ τῆς συνθέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. δεῖ δὴ τὸ ὑποτιθέμενον πλῆθος τῶν μονάδων ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν μεῖζον εἶναι τοῦ ὁμωνύμου τῷ δεδομένῳ λόγου. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς τὸν ἐκ τῆς συνθέσεως λόγον ἔχειν τριπλασίονα. τετάχθω ὁ μὲν εἷς αὐτῶν ἀριθμοῦ ἑνός. ὁ δὲ ἕτερος κατὰ τὸν προσδιορισμὸν πλείων μονάδων γ. ἔστω μονάδες ιβ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπ' αὐτῶν ϛϛ ιβ. ἡ δὲ σύνθεσις αὐτῶν ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδων ιβ. λοιπόν ἐστιν ἀριθμοὺς ιβ. τριπλασίονας εἶναι ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδων ιβ. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων δ. ἔσται ὁ μὲν αὐτῶν μο δ. ὁ δὲ μο ιβ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XIIII.

CONDITIO apposita sic demonstrari potest. Sint duo Numeri A B. B C. quorum mutuo ductu fiat G. & sit G ad totum A C. in ratione cuius denominator D, ita vt ex D in A C. fiat G. dico D minorem esse quolibet ipsorum A B. B C. Quia enim idem G fit ex A B. in B C. & ex D in A C.[1] erit A B ad A C. vt D ad B C. sed A B. est minor quàm A C. pars quàm totum, ergo & D est minor quàm B C. & eodem argumento probabitur idem D minor quàm A B. igitur patet propositum.

G 18.
A... B...... C
D 2.

19. septimi.

Porrò aduerte Canonem à Xilandro traditum nimis particularem esse, cùm iubeat sumere pro altero quæsitorum numerorum, ipsum denominatorem rationis vnitate auctum. Nos itaque ex ipsa Diophanti operatione elicimus hunc legitimum Canonem.

Statue pro altero quæsitorum, quemlibet numerum maiorem denominatore rationis, eumque ducito in ipsum denominatorem, productum diuide per interuallum sumpti numeri & eiusdem denominatoris, orietur alter quæsitorum.

Sed & operatio Diophanti, & hic Canon eatenus locum habent; quatenus productum est maius extremum proportionis. Nam si summa debet esse maior producto, sic erit proponenda quæstio.

Inueniantur duo numeri quorum summa ad productum eorum multiplicatione, datam habeat rationem.

Mandatum sit summæ ad productum rationem esse triplam. Ponatur numerorum alter 1 N. alter quilibet numerus puta 2. erit ergo summa 2. + 1 N. productum 2 N. Quare cùm illa sit huius tripla, 6 N. æquabuntur 2 + 1 N. & fert 1 N. $\frac{2}{5}$ sunt igitur quæsiti numeri 2. & $\frac{2}{5}$ & satisfaciunt postulatis.

Conditio hîc non apponitur, quia potest alter quæsitorum esse maior denominatore rationis, dum is tantus sit, vt eo ducto in denominatorem rationis productus superet vnitatem. Et hinc formatur Canon huiusmodi.

Sume quemlibet numerum pro altero quæsitorum, eumque ducito in denominatorem rationis, & per productum vnitate multatum diuide sumptum numerum, orietur alter quæsitorum.

Cæterum ipsam quæstionem decimamquartam soluit infinitè Diophantus quæstione 41. lib. 4.

QVÆSTIO XV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος παρ' ἑκατέρου λαβὼν τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν, λόγον ἔχῃ [δεδομένον] πρὸς τὸν ὑπολειφθέντα. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον παρὰ τοῦ δευτέρου λαβόντα μονάδας λ. γίνεσθαι αὐτοῦ διπλασίονα, τὸν δὲ δεύτερον παρὰ τοῦ πρώτου λαβόντα μονάδας ν. γίνεσθαι αὐτοῦ τριπλασίονα. τετάχθω ὁ δεύτερος ςοῦ ἑνὸς καὶ ὧν δίδωσι μονάδων λ. ὁ ἄρα πρῶτος ςς δύο λεῖψει μο λ. ἵνα λαβὼν παρὰ τοῦ δευτέρου τὰς λ. μο. γένηται

INVENIRE duos numeros, vt vterque ab altero imperatum numerum accipiens, ad residuum datam habeat rationem. Postuletur itaque vt prior acceptis à posteriore 30. vnitatibus, fit residui duplus. Posterior autem acceptis à priore vnitatibus 50. fit triplus ad residuum. Ponatur posterior 1 N. & præterea 30. vnitatum quas dat priori; erit ergo prior 2 N. − 30. vt acceptis 30. vnitatibus à posteriore, fit residui

duplus. Restat vt posterior acceptis à priore 50. vnitatibus, fit triplus ad residuum. Prior autem si det 50. vnitates, relinquitur 2 N. − 80. At posterior acceptis 50. fit 1 N + 80. superest vt 1 N. + 80. sit triplus ad 2 N. − 80. Ter igitur minor æquatur maiori. & fit 1 N. vnitatũ 64. Erit ergo prior 98. posterior 94. & satisfaciat quæstioni.

διπλασίων αὐτοῦ. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν δεύτερον παρὰ τοῦ πρώτου λαβόντα μο ν̅ γίνεσθαι αὐτοῦ τριπλασίονα. ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος μονάδας ν̅. λοιποὺς ἔχει ςς δύο λεῖψει μο π̅. λαβὼν δὲ αὖ ὁ δεύτερος τὰς ν̅ μο γίνεται ς ἑνὸς μο π̅. λοιπόν ἐστι ς ἕνα μο π̅. τριπλασίονα εἶναι ςς δύο λεῖψει μο π̅. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάττονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. καὶ γίνεται ὁ ς μο ξδ̅. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδων ϟη̅. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων ϟδ̅. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XV.

Hîc formo huiusmodi Canonem.

Summam duorum numerorum inuicem præstandorum, ducito sigillatim in vtrumque denominatorem vnitate auctum, producta diuide per planum sub denominatoribus vnitate multatum, orientur defectus præstandorum numerorum à veris.

Vt in exemplo Diophanti summa ipsorum 30. & 50. est 80. qua sigillatim ducta in 3. & in 4. fiunt 240. & 320. quæ si diuidas per 5. productum ex 2. in 3. vnitate multatum, fiunt 48. & 64. defectus ipsorum 50. & 30. à quæsitis. Quare addendo 48. ad 50. & 64. ad 30. fiunt quæsiti numeri 98. & 94.

QVÆSTIO XVI.

INVENIRE tres numeros vt bini simul sumpti faciant imperatos numeros. Oportet autem vt summæ trium imperatorum semissis maior sit quolibet ipsorum. Imperetur itaque primum & secundum simul additos efficere 20. secundum & tertium conficere 30. At tertium cum primo facere 40. Ponatur summa trium 1 N. & quoniam primus & secundus efficiunt 20. si ab 1 N. auferam 20. habebo tertium, nempe 1 N. − 20. Ob hæc eadem erit primus 1 N. − 30. At secundus 1 N. − 40. Reliquum

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τοὺς ἐπιταχθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν ἐπιταττομένων τριῶν τὸ ἥμισυ μεῖζον εἶναι ἑκάστου αὐτῶν. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον μετὰ τοῦ δευτέρου συντεθέντας ποιεῖν μο κ. τὸν δὲ δεύτερον μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖν λ. τὸν δὲ τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου ποιεῖν μο μ̅. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ς ἑνός. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος ποιοῦσι μο κ̅. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ς ἑνὸς ἀφέλω μο κ̅. ἕξω τὸν τρίτον ς ἑνὸς λεῖψει μο κ̅. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔσται ς ἑνὸς λεῖψει μο λ̅. ὁ δὲ δεύτερος ς ἑνὸς λεῖψει μο μ. λοιπόν ἐστι τὸν

τρεῖς συντεθέντας ἀριθμοὺς γίνεσθαι ἴσους ςῷ ἑνί. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες, ποιοῦσιν ςς^οὺς τρεῖς λεῖψει μ° ϙ. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° με. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° ιε. ὁ δὲ δεύτερος μ° ε. ὁ δὲ τρίτος μ° κε. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

est vt tres simul additi æquentur 1 N. Atqui tres simul additi faciunt 3. N. − 90. hoc ergo æquatur 1 N. & fit 1 N. vnitatum 45. Ad positiones. Erit primus quidem 15. secundus vero 5. Tertius 25. & euidens est demonstratio.

IN QVAESTIONEM XVI.

CONDITIONIS appositæ ratio est, quia cùm tres numeri bini & bini sumuntur, aggregatum summarum quas bini & bini conficiunt, continet bis summam trium numerorum, quod euidens est, quia quilibet trium numerorum bis sumitur. Oportet autem summam trium numerorum maiorem esse summa duorum ex illis. Hinc etiam euidens fit causa Canonis à Xilandro traditi, qui tamen & ab operatione Diophanti elicitur.

Aggregati summarum quas bini & bini conficiunt tres numeri, cape dimidium; hinc aufer sigillatim dictas summas, restabunt quæsiti numeri.

Eodem ferè artificio soluetur quæstio si quærantur quotlibet numeri multitudine impari, dentúrque summæ primi cum secundo, secundi cum tertio, tertij cum quarto, quarti cum quinto: & sic deinceps. Ac demum vltimi cum primo. Verbi gratia. Quærantur quinque numeri vt primus cum secundo faciat 8. secundus cum tertio faciat 9. tertius cum quarto faciat 10. quartus cum quinto faciat 14. denique quintus cum primo faciat 11. Pone summam quinque numerorum 1 N. Cùm ergo primus & secundus sint 8. & tertius & quartus 10. erit quintus 1 N. − 18. Rursus quia secundus & tertius sunt 9. quartus & quintus 14. erit primus, 1 N. − 23. Rursus quia tertius & quartus sunt 10. quintus & primus 11. erit secundus 1 N. − 21. Item quia quartus & quintus sunt 14. primus & secundus 8. erit tertius 1 N. − 22. Deniq; quia quintus & primus sunt 11. at secundus & tertius 9. erit quartus 1 N. − 20. Horum summa 5 N. − 104. æqualis est 1 N. & fit 1 N. 26. summa quinque numerorum, vnde si auferas sigillatim summam quatuor quorumlibet, nempe ipsos 23. 21. 22. 20. 18. remanent quæsiti numeri 3. 5. 4. 6. 8. Quod si artificium supra allati Canonis libeat imitari. Sume aggregatum summarum datarum 8. 9. 10. 14. 11. nempe 52. huius semissis 26. est summa quinque quæsitorum numerorum, vnde vt prius si auferas quatuor quosque remanebit quintus. Præterea in tractatu nostro de iucundis quæstionibus quæ per numeros absoluuntur, alium tradidimus Canonem, hoc vtique non deteriorem, quem, si vacat, videre poteris in praxi vigesima secunda.

Verùm si multitudo quæsitorum numerorum fuerit par, qui eodem modo bini sumantur, & vltimus iungatur primo, nec operatio similis nec traditus Canon locum habebunt vt euidēs est, cuius rei ratio est, quia in hoc casu quæstio non vnam recipit solutionē, sed infinitas dummodo possibilis proponatur. vt si quærantur sex numeri, ita vt primus cum secundo faciat 13. secundus cum tertio faciat 15. tertius cum quarto faciat 19. quartus cum quinto faciat 11. quintus cum sexto faciat 10. Poterunt esse quæsiti numeri 8. 5. 10. 9. 2. 8. Itemque hi 7. 6. 9. 10. 1. 9. imò & quemcumque sumas pro primo qui cadat inter 6. & 13. satisfacies quæstioni. Itaque huiusmodi quæstiones hac arte resoluo. Ponatur in dato exemplo primus 1 N. ergo secundus est 13 − 1 N. vnde tertius fit 2 + 1 N. Quare quartus erit 17 − 1 N. igitur quintus fiet 1 N. − 6. Ac denique sextus 16 − 1 N. Restat vt & sextus cum primo faciat 16. Quare cùm 16 − 1 N. & 1 N. verè conficiant 16. nulla restat ad æquationem via; ita vt vna species, alteri speciei æqualis reperiatur. Quamobrem cùm inuenti numeri in terminis Algebricis omnes propositi partes impleant, manifestum est quæ-

ſtionẽ infinitè ſolutā eſſe, hoc eſt quemlibet numerū ſumi poſſe pro valore Numeri, modo poſſit poſitionibus ritè applicari. Etenim non quolibet numero pro valore Numeri ſumpto, aptè reſolui poterūt hypoſtaſes, quod accidit quia in aliis reperiuntur vnitates cum defectu Numerorū, in aliis Numeri cum defectu vnitatū. Quare determinandum de valore Numeri, & præſcribendi ſunt termini inter quos cadere debeat. Hoc autem ſic præſtabitur. Sume hypoſtaſim illam in qua eſt minimus vnitatum numerus cum maximo defectu Numerorum, itemque illam in qua eſt minimus Numerorū numerus cum maximo defectu vnitatum, ſunt hæ 13 − 1 N. & 1 N. − 6. Diuide ergo vtrobique vnitates per multitudinem Numerorum, fient 13. & 6. quæſiti termini. Igitur neceſſe eſt valorem Numeri maiorẽ eſſe quàm 6. minorem quàm 13. Quicunque autem ponatur inter 6. & 13. ſatisfiet poſtulatis. Modus iſte præſcribendi terminos inter quos cadere debet valor numeri, in quæſtionibus quæ infinitè ſoluuntur, à nemine ante nos (quod ſciam) traditus eſt, cùm ſit facilis, & ad ardua problemata ſoluenda neceſſarius vt iam monui in libello iucundarum quæſtionum quæ per numeros abſoluuntur, & fuſius docebo ad quadrageſimam primam quarti.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE quatuor numeros, vt terni iuncti faciant poſtulatos numeros. Oportet autem eorum qui poſtulantur numerorum ſummæ trientem maiorem eſſe quolibet ipſorū. Statutum ſit primum & duos deinceps ſimul iunctos facere 20. ſecundum & duos deinceps facere 22. tertium & duos deinceps facere 24. Denique quartum & duos deinceps facere 27. Ponatur quatuor numerorum ſumma 1 N. Igitur ſi ab 1 N. abſtulero tres primos, nempe 20. reliquum habebo quartum, nimirum 1 N − 20. eadem de cauſa primus erit 1 N. − 22. ſecundus 1 N − 24. tertius 1 N. − 27. Supereſt vt quatuor ſimul additi ſint æquales 1 N. ſed quatuor ſimul additi efficiunt 4 N. − 93. Hoc ergo æquatur 1 N. & fit 1 N. vnitatum 31. Ad poſitiones. Erit primus quidem 9. ſecundus

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως συνὼ τρεῖς συντεθέμενοι ποιῶσι τοὺς ἐπιταχθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν τεσσάρων τὸ τρίτον μεῖζον εἶναι ἑκάστου αὐτῶν. ἐπιτετάχθω δὴ τοὺς μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας ποιεῖν μονάδας κ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς ποιεῖν μονάδας κβ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς ποιεῖν μονάδας κδ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τετάρτου τρεῖς ποιεῖν μονάδας κζ. τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ς^{οι} ἑνός, καὶ ἐὰν ἄρα ἀπὸ ς^{οῦ} ἑνὸς ἀφέλω τοὺς πρώτους τρεῖς, τουτέστι μονάδας κ. λοιπὸν ἔξω τὸν τέταρτον ς^{οῦ} ἑνός, λείψει μ° κ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ μὲν πρῶτος [γίνεται] ς^{οῦ} ἑνὸς λείψει μ° κβ. ὁ δὲ δεύτερος ς^{οῦ} ἑνὸς λείψει μ° κδ. ὁ δὲ τρίτος ς^{οῦ} ἑνὸς λείψει μ° κζ. λοιπόν ἐστι τοὺς τέσσαρας συντεθέντας ἀριθμοὺς ἴσους γίνεσθαι ἀριθμῷ ἑνί. ἀλλ' οἱ τέσσαρες συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς τέσσαρας λείψει μ° ϟγ. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνί, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° λα. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° θ. ὁ δὲ δεύτερος μ°

ζ. ὁ δὲ τρίτος μ°. δ. ὁ δὲ τέταρτος μ°. ια. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

verò 7. tertius 4. quartus 11. & hi satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XVII.

CONDITIO hîc apponitur eadem de causa, qua factum est vt præcedenti apponeretur, quia videlicet cùm quatuor numeri, terni sumuntur, quoties fieri potest diuersis modis, omnes sumuntur ter. Hinc autem patet quæstionem huiusmodi proponi posse de quotlibet numeris qui sumantur omnes, vno minus, quoties fieri potest diuersis modis, & erit eadem operationis ratio; sed & Canon vniuersalissimus formabitur.

Aggregatum summarum datarum diuidatur per numerum multitudinis numerorum vnitate multatum. Quotiens erit summa numerorum quæsitorum, à qua si auferantur sigillatim datæ summæ, fient quæsiti numeri.

QVÆSTIO XVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι τῷ ἐπιταχθέντι ἀριθμῷ. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον καὶ τὸν δεύτερον τοῦ τρίτου ὑπερέχειν μονάδας κ. τὸν δὲ δεύτερον καὶ τὸν τρίτον τοῦ πρώτου ὑπερέχειν μονάδας λ. τὸν δὲ τρίτον καὶ τὸν πρῶτον τοῦ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς, ςς^οι β. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερέχουσι μονάδας κ. κοινοῦ προστεθέντος τοῦ τρίτου, οἱ τρεῖς, δίς ἐστι ὁ τρίτος καὶ ἡ ὑπεροχὴ μονάδες κ. εἰσὶν ἄρα ἀπὸ τελῶν, τουτέστιν ἀριθμῶν [δύο] ἀφῃρήσθω μονάδας κ. ἕξω δὶς τὸν τρίτον, ἀριθμῶν δύο λεῖψει μ° κ. ἅπαξ ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ς^ου ἑνὸς λεῖψει μ° ι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔσται ς^ου ἑνός, λεῖψει μ° ιε. ὁ δεύτερος ς^ου ἑνὸς λεῖψει μ° κ. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς εἶναι ἴσους ἀριθμοῖς δυσίν. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσιν ςς^ους τρεῖς λεῖψει μ° με. ταῦτα ἴσα ςς^οις δυσί, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° με. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδες

INVENIRE tres numeros vt bini iuncti superent reliquum imperato numero. Iniunctum sit primum & secundum superare tertium vnitatibus 20. secundum & tertium superare primum vnitatibus 30. Tertium verò & primum superare secundum vnitatibus 40. Ponatur summa trium 2 N. & quoniam primus & secundus superant tertium vnitatibus 20. Adiecto vtrimque communi tertio; trium summa erit bis tertius, & interuallum 20. Si igitur à summa trium, hoc est à 2 N. abstulero 20. habebo bis tertium, scilicet 2 N. - 20. simplex ergo tertius est 1 N. - 10. Ob hæc eadem erit & primus 1 N. - 15. secundus verò 1 N. - 20. superest vt tres simul æquentur 2 N. sed tres simul efficiunt 3 N. - 45. Hoc ergo æquatur 2 N. & fit 1 N. 45. Ad positiones. Erit pri-

mus 30. secundus 25. tertius 35. & hi satisfaciunt quæstioni.

λ. ὁ δὲ δεύτερος μ° κε. ὁ δὲ τρίτος μ° λε. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVIII.

ADIECTO *vtrimque communi tertio* &c. Res à Scholiaste obscuratur potius quàm illustretur. Quod autem ait Diophantus tale est. Sint tres numeri A. B C. ita vt ambo A B. simul superent tertium C. interuallo D. infert Diophantus. Ergo tres A B C. simul continẽt bis ipsum C. & semel ipsum D. Quia enim A B. simul æquantur ipsis C D. simul, si vtrimque addatur ipse C. erunt tres A B C. simul, æquales ipsi D. & duplo ipsius C. Quod erat propositum. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiusmodi Canon.

A 5. B 4. C 5.
D 2.

A semisse aggregati excessuum aufer sigillatim semissem cuiuslibet excessus, residua erunt quæsiti numeri. vel quod idem est.

Ab aggregato excessuum aufer sigillatim ipsos excessus, residuorum semisses erunt quæsiti numeri.

Hinc autem manifestè colligitur Aggregatum ipsum excessuum æquale esse summæ quæsitorum numerorum. Quod tamen etiam aliter demonstrabitur hac arte. Sint tres numeri A B C. ita vt ambo A B. superent C. excessu D. Ambo B C. superent A excessu E. denique ambo A C. superent B. excessu F. dico summam ipsorum A B C. æquari summæ ipsorum D E F. Quoniam enim per mox demonstrata tres A B C. continẽt bis ipsum C. & semel ipsum D. itemque tres A B C. continent bis ipsum A & semel ipsum E, ac denique tres A B C. continẽnt bis ipsũ B & semel ipsum F. Patet summam ipsorum A B C. ter, continere bis ipsos A B C. & semel ipsos D E F. Quare si vtrimque auferantur ipsi A B C. bis, remanent iidem A B C. semel, æquales ipsis D E F. semel. Quod erat ostendendum.

A 30. B 25. C 35.
D 20. E 30. F 40.

QVÆSTIO XIX.

Aliter.

QVANDOQVIDEM primus & secundus superant tertium vnitatibus 20. esto tertius 1 N. Igitur primus & secundus iuncti erunt 1 N. + 20. Rursus quoniam secundus & tertius superant primum vnitatibus 30. Pono secundum tot vnitatum, quantus est semissis numerorum 20. & 30. nimirum vnitatum 25. Et quia primus & secundus iuncti sunt 1 N. + 20. quorum secundus est vnitatum 25. reliquus erit primus 1 N. − 5. Superest vt tertius & primus iuncti secundo superaddant v-

Ἄλλως.

ΕΠΕΙ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερέχουσι μονάδας κ. ἔστω ὁ τρίτος ς^ος ἑνός. συναμφότερος ἄρα ὅτε πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ἔσται ς^ων ἑνὸς μ° κ. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου ὑπερέχουσι μονάδας λ. τάσσω τὸν δεύτερον τοσούτων μονάδων. ὅσων ἐστὶν ὁ ἥμισυς τῶν κ, καὶ λ. τουτέστι μονάδων κε. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερός ἐστιν ς^ων ἑνὸς μ° κ. ὧν ὁ δεύτερός ἐστι μονάδων κε. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ἀριθμοῦ ἑνὸς λείψει μ° ε. λοιπὸν δὲ καὶ τὸν τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου, τοῦ δευτέρου ὑπερέχειν μο-

νάδας μ̄. ἀλλὰ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου ἐστὶν ἀριθμοὶ δύο λείψει μονάδων ε̄. ἴσοι ἄρα εἰσὶν μονάσιν ξε̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις· ἀριθμοὶ ἄρα δύο ἴσοι μονάσιν ο̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο λε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν πρῶτον ς ἑνὸς λείψει μο ε̄. ἔσται μο λ̄. τὸν δὲ δεύτερον μονάδων κε̄. τὸν δὲ τρίτον ς ἑνός, ἔσται μο λε̄.

nitates 40. sed primus cum tertio est 2 N – 5. hoc ergo æquatur vnitatibus 65. Communis addatur defectus. Igitur 2. N. æquantur 70. & fit 1 N. 35. Ad positiones. Statueram primum 1 N – 5. erit ergo 30. secundum autem posueram 25. At tertium 1 N. Quamobrem erit 35.

IN QVAESTIONEM XIX.

Hic Diophantus vsurpat huiusmodi Theorema.

Datis tribus numeris, ita vt duo quolibet simul reliquo sint maiores, summa duorum excessuum quibus bini reliquum superant, dupla est vnius ex tribus datis numeris, illius scilicet ad quem reliquorum excessus non est relatus.

Quod sic demonstratur. Sint tres dati A B C. & iidem excessus qui prius D E F.

A 30. B 25. C 35.
D 30. E 30. F 40.

dico summam excessuum D E. esse duplum ipsius B. & sic de aliis. Quia enim ambo A B æquantur ambobus C D. itémque ambo B C. æquantur ambobus A E. erunt ipsi A C. semel & B. bis æquales ipsis A C D E. Quare auferendo vtrimque ipsos A C. remanet B bis æqualis ipsis D E. Quod erat propositum. Eodem argumento ostendemus summam duorum E F esse duplam ipsius C. & summam amborum D F esse duplam ipsius A. Igitur ex omni parte constat propositum. Hinc autem elicitur huiusmodi Canon.

Summæ duorum quorumlibet excessuũ cape semissem, habebis quæsitos numeros.

Cæterùm placet in artis specimen ex supradicto Theoremate aliud etiam non iniucundum adducere, nimirum.

Datis tribus numeris, ita vt duo quilibet simul reliquo sint maiores, duorum excessuum differentia dupla est differentiæ duorum datorum numerorum, inter quos vicißim facta est excessuum comparatio.

A 30. B 25. C 35.
D 20. E 30. F 40.
G 10. K 5.

Sint dati qui prius A B C. & iidem excessus D E F. & duorum D E. differentia sit G. cuius semissis K. dico K esse differentiam ipsorum A C. Quia enim vt ostensum est amborum D E summa dupla est ipsius B [a] sunt D B E. arithmeticè proportionales. (3. 2. poris.) Quare duorum D B. idem est interuallum, quod duorum B E. Cùm ergo extremorum differentia componatur ex differentiis extremorum & medij, patet G duplum esse differentiæ D ad B vel B. ad E. Quamobrem K est differentia D & B. Itaque (4. 2. poris.) quoniam ambo A B. æquantur ambobus C D. ex hypothesi [a] erit in arithmetica medietate A ad C. vt D ad B. Quare cùm ostensum sit K esse differentiam ipsorum D B. erit idem K differentia ipsorum A C. Quod erat ostendendum. Eodem modo ostendemus semissem differentiæ ipsorum E F. esse differentiam ipsorum A B. itemque semissem differentiæ ipsorum D F. esse differentiam ipsorum B C. Igitur ex omni parte constat propositum.

Quod si lubeat theorematis huius opẽ implorare, licebit rursus alia operatione ab vtraq; Diophanti longè diuersa problema istud absoluere. Ponatur A 1 N. Cùm ergo E sit minor quàm F numero 10. erit A minor quàm B, semisse ipsius 10. Quare B erit 1 N. – 5. Rursus quia E maior est quàm D numero 10. erit & C maior quàm A semisse ipsius 10. Erit igitur C. 1 N + 5. Iam ergo cùm tres quæsiti numeri sint

1 N.

1 N. 1 N − 5. 1 N. + 5. triplici via licet ad æquationem peruenire. Nam primi & ſecundi ſumma 2 N − 5. æquatur ſummæ tertij & interualli D, nimirum 1 N. + 25. Rurſus ſecundi & tertij ſumma nimirū 2 N. æquatur ſummæ primi & interualli E, nimirum 1 N + 30. Denique primi & tertij ſumma 2 N. + 5. æquatur ſummæ ſecundi & interualli F. nimirū 1 N. + 35 & has tres æquationes ſi reſoluas ſigillatim, fiet ſemper 1 N. 30. primus ſcilicet numerus. Poſſet etiā poni 1 N. pro ſecundo, vel pro tertio, & vtroq; modo triplici via ad æquationem peruениri, vt manifeſtū eſt.

QVÆSTIO XX.

INVENIRE quatuor numeros, vt terni iuncti reliquum ſuperent numero imperato. Oportet autem ſemiſſe ſummæ quatuor interuallorū minorem eſſe quemlibet ipſorum. Poſtuletur itaq; vt primus & duo deinceps coniuncti quarto ſuperaddant vnitates 20. ſecundus & duo deinceps primo ſuperaddāt vnitates 30. tertius & duo deinceps ſimiliter ſecūdo ſuperaddant vnitates 40. & adhuc quartus & duo deinceps coniuncti tertio ſuperaddāt vnitates 50. Ponatur quatuor numerorū ſumma 2 N. & quandoquidē primus & duo deinceps quarto ſuperaddunt vnitates 20. & quo tres primi ſuperant quartum, eo quatuor ſimul ſuperant duplum quarti, ſunt autem quatuor ſimul 2 N. igitur 2 N. ſuperant duplum quarti vnitatibus 20. Quamobrem duplum quarti eſt 2 N. − 20. Ergo ipſe quartus eſt 1 N. − 10. eadem de cauſa, erit & primus 1 N. − 15. ſecūdus 1 N. − 20. & tertius 1 N. − 25. ſupereſt vt quatuor ſimul æquales ſint 2 N. ſed quatuor ſimul faciunt 4 N. − 70. Hoc ergo æquatur 2 N. & fit 1 N. 35. Ad poſitiones. Erit primus 20. ſecundus

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως οἱ τρεῖς λαμβανόμενοι τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσιν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν. δεῖ δὴ τὸν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς τῶν τεσσάρων τοῦ ἡμίσεος ἐλάττονα εἶναι ἑκάστου αὐτῶν. ἐπιτετάχθω δὴ τοὺς μὲν ἀπὸ πρώτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας τοῦ τετάρτου ὑπερέχειν μονάδας κ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς τοῦ πρώτου ὑπερέχειν μονάδας λ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς ὁμοίως τοῦ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ. καὶ ἔτι τοὺς ἀπὸ τετάρτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας τοῦ τρίτου ὑπερέχειν μονάδας ν. τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ δύο, καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς τοῦ τετάρτου ὑπερέχουσι μονάδας κ. ὃν δὲ ὑπερέχουσιν οἱ πρῶτοι τρεῖς τοῦ τετάρτου, τούτῳ ὑπερέχουσι καὶ οἱ τέσσαρες τοῦ τετάρτου δίς, καὶ εἰσὶν οἱ τέσσαρες ςς^οἱ β. ἀριθμοὶ ἄρα δύο, δὶς τοῦ τετάρτου ὑπερέχουσι μονάδας κ. ὁ ἄρα διπλασίων τοῦ τετάρτου ἔσται ςς^οἱ β λείψει μ^ο κ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ς^ο ἑνὸς λείψει μ^ο ι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔσται ς^ο ἑνὸς λείψει μονάδων ιε. ὁ δὲ δεύτερος ς^ο ἑνὸς λείψει μ^ο κ. καὶ ἔτι ὁ τρίτος ς^ο ἑνὸς λείψει μ^ο κε. λοιπόν ἐστι τοὺς τέσσαρας ἴσους εἶναι ἀριθμοῖς δυσίν. ἀλλ' οἱ τέσσαρές εἰσιν ςς^οἱ δ λείψει μ^ο ο. ταῦτα ἴσα ςς^οἱς β. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο λε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^ο κ. ὁ δὲ δεύτερος

μο ιε. ὁ δὲ τρίτος μο ι. ὁ δὲ τέταρτος μο κε. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

15. tertius 10. quartus 25. & quæstioni satisfaciunt.

IN QVAESTIONEM XX.

CONDITIONIS adiectæ ratio est, quia vt mox ostendetur, excessuum summa dupla est summæ ipsorum quatuor numerorum. Quare semissis summæ excessuum qui æqualis est summæ numerorum debet esse maior tribus quibuslibet, ac proinde multò magis, maior est excessu trium super reliquum. Quod autem summa excessuum, sit dupla summæ numerorum, sic ostendo. Sint quatuor numeri A B C D. & excessus trium quorumlibet super reliquum sint E F G H. Dico summam ipsorum E F G H duplum esse summæ ipsorum A B C D. Quia enim A B C. simul excedunt D numero E. erunt A B C. simul æquales ipsis D E. & addendo vtrimq; ipsum D. erit summa ipsorum A B C D. æqualis ipsi D bis, & ipsi E semel. Eodem modo ostendemus summam eorundem A B C D æquari ipsi A bis & F semel, itemque ipsi B bis & G semel, ac denique ipsi C bis & H semel. Ergo sumendo quater ipsos A B C D, erit quadruplum hoc æquale ipsis A B C D bis, & ipsis E F G H semel. Quare auferendo vtrimque ipsos A B C D bis, remanent adhuc A B C D bis æquales ipsis E F G H semel. Quod erat propositum.

A 20. B 15. C 10. D 25.
E 20. F 30. G 40. H 50.

Cæterùm patet demonstrationis medium congruenti modo applicari posse cuilibet Numerorum multitudini propositæ, vnde fiet regula generalis.

Si fuerint quotlibet numeri, quorum omnium vno dempto super reliquum excessus dentur, erit excessuum summa summæ numerorum multiplex secundum numerum multitudinis numerorum binario multatum.

Ita si fuerint quinque numeri, erit excessuum summa summæ numerorum tripla, & si fuerint sex numeri, erit excessuum summa, numerorum summæ quadrupla; & sic in infinitũ. Atque ex his & ex ipsa Diophanti operatione elicietur Canon generalis ad huiusmodi quæstiones soluendas proposita qualibet multitudine numerorũ.

Summam excessuum diuide per numerum multitudinis numerorum binario multatum, à quotiente aufer sigillatim ipsos excessus, residuorum semisses erunt quæsiti numeri.

QVÆSTIO XXI.

Ἄλλως.

ΕΠΕΙ οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς τοῦ τετάρτου ὑπερέχουσι μο κ. τετάχθω ὁ τέταρτος ς ἑνός, οἱ τρεῖς ἄρα ἔσονται ς ἑνὸς μο κ. πάλιν ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς τοῦ πρώτου ὑπερέχουσι μο λ. τετάχθω συναμφότερος ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μο τοσούτων, ὅσων ἐστὶν ὁ ἥμισυς τῶν δύο ὑπεροχῶν. λέγω δὴ τῶν κ. καὶ τῶν λ. τουτέστι μο κε. καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς εἰσὶν ς ἑνὸς μο κ. ὧν ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μο κε. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ς ἑνὸς λείψει μο ε. καὶ

Aliter.

QVONIAM tres à primo superant quartum vnitatibus 20. Ponatur quartus 1 N. Tres ergo reliqui erunt 1 N. + 20. Rursus quia tres à secundo superant primum vnitatibus 30. Ponantur secundus & tertius simul tot vnitatum, quot continet semissis duorum interuallorum, duorum scilicet 20. & 30. hoc est vnitatum 25. Et quoniam tres à primo sunt 1 N. + 20. quorum secundus & tertius sunt 25. relinquitur pri-

mus 1 N. − 5. Et quia tres à secundo superant primum vnitatibus 30. At tres à tertio superant secundum vnitatibus 40. erunt vtique tertius & quartus simul 35. Igitur relinquitur pro tertio 35 − 1 N. Sunt autem secundus & tertius simul 25. quorum tertius est 35 − 1 N. relinquitur ergo secundus 1 N. − 10. Supereſt vt tres à quarto superent tertium vnitatibus 50. sed tres illi simul sunt 3 N. − 15. Tertius autem est 35. − 1 N. Oportet itaque 3 N. − 15. superare 35 − 1 N. vnitatibus 50. Quamobrem 85 − 1 N. æquantur 3 N. − 15. & fit 1 N. vnitatum 25. Ad positiones. Statuetá primũ 1 N. − 5. erit ergo 20. secundus verò similiter 15. tertius 10. quartus 25.

ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς ὑπερέχουσι τοῦ πρώτου μο λ. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς ὑπερέχουσι τοῦ δευτέρου μο μ. συναμφότερος ἄρα ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ἔσται μο λε. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται μο λε. λείψει ϛ ἑνός. ἔστι δὲ καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μο κε. ὧν ὁ τρίτος μο λε λείψει ϛ ἑνὸς [λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ϛ ἑνὸς] λείψει μο ι. λοιπόν ἐστι τοὺς ἀπὸ τοῦ τετάρτου τρεῖς τοῦ τρίτου ὑπερέχειν μο ν. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι ἀριθμοὺς τρεῖς λείψει μο ιε. ὁ δὲ τρίτος μο λε. λείψει ϛ ἑνός. δεῖ δὴ καὶ ϛοὺς τρεῖς λείψει μο ιε. ὑπερέχειν μονάδας λε λείψει ϛ ἑνός, μο ν. ὥστε μονάδες πε λείψει ϛ ἑνὸς ἴσαι εἰσὶν ϛοῖς τρισὶ λείψει μο ιε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο κε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα ὁ πρῶτον ϛ ἑνὸς λείψει μο ε. ἔσται μο κ. ὁ δὲ δεύτερος ὁμοίως μο ιε. ὁ δὲ τρίτος μο ι. ὁ δὲ τέταρτος μο κε.

IN QVAESTIONEM XXI.

Hic supponit Diophantus, hoc theorema.

Datis quatuor numeris, ita vt tres quilibet reliquo sint maiores, summa duorum excessuum, quibus tres reliquum superant, dupla est summæ duorum ad quos excessuum relatio facta non est.

A 20. B 15. C 10. D 25.
E 20. F 30. G. 40. H 50.

Sint numeri & excessus qui suprà. Dico summam excessuũ E F. duplam esse summæ ipsorum B C. & sic de aliis. Etenim quia tres A B C. æquantur duobus D E. itemque tres B C D. æquantur duobus A F. erunt A D. semel & B C. bis æquales ipsis A D E F. Quare auferendo vtrimque ipsos A D. remanent B C. bis æquales ipsis E F. Quod erat propositum.

Hinc etiam patet hoc Theorema ad quotlibet numeros congruenter extendi. semper enim eodem modo ostendetur summam duorum excessuum duplam esse summæ omnium ad quos non est facta excessuum relatio. Ita si fuerint quinque numeri, duorum excessuum summa erit dupla summæ trium numerorum ad quos non fiet excessuum relatio, & sic in infinitum. Sed & eadem ratione ad quotlibet numeros extendemus Theorema quod attulimus ad quæstionem decimam nonam, & illud sic proponemus.

Datis quotlibet numeris, ita vt omnes simul vno dempto sint semper reliquo maiores; duorum excessuum differentia dupla est differentiæ duorum numerorum, inter quos vicißim facta est excessuum comparatio.

M 25.
A 20.B 25.C 10.D 25.
E 20.F 30.G 40.H 50.
K 10. L 5.

Sint quatuor numeri A B C D. & excessus trium quorumlibet super reliquum sint E F G H. & ipsorum E F. interuallum K cuius semissis L. Dico L esse interuallum ipsorum A D. Nam sumpta M summa reliquorum B C. inter quos non sit excessuũ relatio, erit per iam ostensa, summa duorum E F dupla ipsius M.[1] Quare E M F. erunt in arithmetica medietate. Atq. adeo cùm extremorum E F differentia sit K, eius semissis L erit differentia ipsorum E M. Itaque quia tres A B C. seu duo A M. æquantur duobus D E ex hypothesi,[2] erunt in arithmetica medietate A ad D. vt E ad M. Quare & ipsorum A D. interuallũ erit L. Quod demonstrandum erat. Eademque est ratio si plures fuerunt numeri, vt patet. Quamobrem ex omni parte constat propositum. Licebit ergo & huius theorematis auxilio alia operatione, eaque sane multiplici soluere huiusmodi quæstiones, vt docuimus ad decimam nonam. Sed de his hactenus.

quinta 1. porism.

quarta 2. porism.

QVÆSTIO XXII.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος τῶν ἄκρων προσλαβὼν τὸν μέσον πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἄκρων λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ᾖ τριπλασίων. ὁ δὲ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου ᾖ τετραπλασίων. τετάχθω ὁ τρίτος ϛ^ος ἑνός, καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ἐστὶ τριπλασίων τετάχθωσαν οἱ δύο, ἀριθμοὶ τρεῖς. οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶν ϛϛ^οὶ δ̄. οὗτοι ἴσοι μονάσιν ρ̄ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° κε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔταξα τὸν τρίτον ϛ^ος ἑνός. ἔσται μ° κε̄. τὸν δὲ πρῶτον καὶ δεύτερον ϛϛ τριῶν, ἔσονται μ° οε̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου εἰσὶ τετραπλασίονες. τετάχθω ὁ πρῶτος ϛ^ος ἑνός, ἔσται ἄρα ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ϛϛ τεσσάρων. οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶν ϛϛ^οὶ ε̄. ἀλλὰ καὶ μ° ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ος μ° κ̄. ἔσται ἄρα ὁ πρῶτος μ° κ̄. ὁ δὲ τρίτος μ° κε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ β ἔσται μ° νε̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

PROPOSITVM numerum in tres numetos partiri, vt vteruis extremorũ adsumpto medio ad reliquum extremum datá habeat rationem. Statutum sit numerum 100. diuidere in tres numeros, vt primus & secũdus tertij triplum constituant. At secũdus & tertius quadruplum primi. Ponatur tertius 1 N. & quia primus & secundus faciũt triplũ tertij, erunt vtique ambo 3 N. Tres ergo numeti simul erunt 4 N. æquales sane numero 100. & fit 1 N. 25. Ad positiones. Posueram tertiũ 1 N. erit ergo 25. Statuetam autem primum & secundũ simul 3 N. erunt ergo 75. Rursus quia secundus & tertius constituunt quadruplum ptimi. Ponatur ptimus 1 N. erũt igitur secundus & terrius 4 N. Tres ergo simul sũt 5 N. sed & vnitates 100. fit igitur 1 N. 20. est ergo ptimus 20. tertius verò 25. Residuum igitur est secundus, nimirum 55. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XXII.

Ex operatione Diophanti eliciemus huiusmodi Canonem.

Datum numerum diuide sigillatim per denominatorem vtriusque rationis postulatæ vnitate auctum, orientur extremi quæsitorum.

Porrò quamuis operatio Diophanti per duas positiones sit elegans, potest tamen solui quæstio per vnicam tantum positionem, etiam sine auxilio regulæ quantitatis, quicquid dicat Xilander. Quod ita fiet. Ponatur primus 1 N. ergo secundus & tertius simul erunt 4 N. & trium summa 5 N. quæ si diuidatur in duas partes, quarum altera alterius sit tripla, habebimus hinc tertium, inde summam primi & secundi. Diuidemus autem 5 N. in duas partes seruantes proportionem triplam per Canonem secundæ huius, eruntque 1 $\frac{1}{4}$ N & 3 $\frac{3}{4}$ N. est ergo primus 1 N. tertius 1 $\frac{1}{4}$ N. Et siue à summa secundi & tertij quæ est 4 N. auferatur tertius, siue à summa primi & secundi quæ est 3 $\frac{3}{4}$ N. auferatur primus, remanet secundus 2 $\frac{3}{4}$ N. Omnes autem simul faciunt 5 N. Igitur 5 N. æquantur 100. & fit 1 N. 20. Ad hypostases, erit primus 20. secundus 55. tertius 25. & constat.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE ttes numeros, quorum maximus medium excedat minimi data parte; medius minimum superet maximi data parte. At minimus dato numero superet datam medij partem. Oportet autem medium tanta parte maximi præstare minimo, vt denominatore partis illius ducto in id quo medius excedit minimum, maior in eo existat Numerorum multitudo, quàm in medio. Constitutum sit maximum medio præstare, triente minimi. Medium autem minimo superaddere trientem maximi. Minimum denique superare trientem medij 10. vnitatibus. Ponatur itaque minimus 1 N. & 10. vnitatum quibus præstare debet triente medij. Erit ergo medius 3 N. vt contineat minimus trientem medij & vnitates 10. vel sic. Ponatur medius 3N. & quia volo minimum superare trientem medij decem vnitatibus, erit minimus 1 N. + 10. Restat vt medius minimum superet maximi triente, sed quo medius minimum su-

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τοῦ τοῦ μέσου δοθέντος μέρους. δεῖ δὴ τὸν μέσον τοῦ ἐλαχίστου, τοσούτῳ μέρει τοῦ μεγίστου ὑπερέχειν, ὥστε τὸν ὁμώνυμον τοῦ τοιούτου μέρους ἐπὶ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάχιστον πολλαπλασιαζόμενον, ποιεῖν ἐν αὐτῷ πλῆθος ἀριθμῶν πλεῖον, ἢ ἐν τῷ μέσῳ. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου τρίτῳ [τὸν δὲ μέσον τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ τοῦ μεγίστου τρίτῳ] τὸν δὲ ἐλάχιστον ὑπερέχειν μονάδας ι τοῦ τοῦ μέσου τρίτου μέρους. τετάχθω δὴ ὁ ἐλάσσων ςος ἑνός, καὶ ὧν ὑπερέχει τοῦ μέσου τρίτου μονάδων ι. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ἀριθμῶν τριῶν, ἵνα ἔχῃ ὁ ἐλάχιστος τὸ τρίτον τοῦ μέσου καὶ μονάδας ι. ἢ καὶ οὕτως. τετάχθω ὁ μέσος ἀριθμοὶ τρεῖς, καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἐλάχιστον ὑπερέχειν τοῦ τρίτου μέρους τοῦ μέσου μο ι. ἔσται ςος ἑνός, καὶ μο ι. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν μέσον τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ τοῦ πρώτου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ μέσος τοῦ

ἐλαχίστου ὑπερέχει ςς^οῖς δυσὶ λείψει μ° ῑ. ταῦτα ἄρα τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ μεγίστου, αὐτὸς ἄρα ὁ μέγιστος ἔσται ςς ϛ̄ λείψει μ° λ̄. δεήσει ἄρα καὶ τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχει ςς^οῖς τρισὶ λείψει μ° λ̄. ταῦτα ἄρα τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ ἐλαχίστου, ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσται ἀριθμῶν θ̄ λείψει μ° ϙ. ἀλλὰ καὶ ἀριθμοῦ ἑνὸς μ° ῑ εὑρέθη. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° ιβ̄ καὶ ἥμισυ. ἔσται ἄρα ὁ μὲν τρίτος μ° κβ̄ καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέσος λζ. καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέγιστος μ° με̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

perat est 2 N. − 10. hoc ergo est triens maximi, ipse igitur maximus est 6 N. − 30. Oportet itaque & maximum medio præstare, triente minimi, sed quo maximus medium excedit est 3 N. − 30. hoc ergo est triens minimi, minimus ergo est 9 N. − 90. sed & repertus est 1 N. + 10. Quamobrem fit 1 N. 12 ½. erit igitur tertius 22 ½. Medius 37 ½. Maximus 45. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OPORTET *autem medium* &c. Refertur hæc conditio ad Algebricos numeros nota N. affectos, & eius necessitas ita demonstrari potest. Quia Diophantus ponit pro medio certam Numerorum multitudinē, erit & minimus certa Numerorum multitudo + certis vnitatibus, quia videlicet minimus est certa pars medij + certis vnitatibus. Quare medius excedet minimum certa multitudine Numerorum − certis vnitatibus, cùm enim in medio nullæ sint vnitates absolutæ, non poterunt ab eo subtrahi vnitates quæ sunt in minimo, nisi per signum −. Cùm ergo excessus iste medij supra minimum sit certa pars maximi, vt habeatur maximus, ducetur hic excessus in denominatorem partis, fietque maximus constans ex multitudine Numerorum − certis vnitatibus. Necesse est autem vt hæc Numerorum multitudo existens in maximo, sit maior Numerorum multitudine existente in medio, alioquin si ponatur minor vel æqualis, cùm præterea adiunctum habeat defectum vnitatum, sequetur maximum minorem esse medio. Quod est absurdum. Quæ omnia ex ipsamet Diophanti operatione manifesta sunt. Sed (quod pace Diophanti dictum velim) hæc conditio, parum congruenter assignata videtur. Etenim cùm quæstioni apponitur conditio, id fit vt per eam agnoscamus vtrum possibilis sit quæstio, necne, ne videlicet oleum operamque perdamus circa impossibilem frustra operantes, ac proinde talis esse debet conditio, vt ante ipsam operationem naturam quæstionis nobis aperiat. Quod sane non præstat hæc Diophanti conditio, cùm per eam non nisi iam prouecta operatione, de statu quæstionis iudicium fieri possit. Itaque solitum authoris acumen hîc desidero. Certè non erat difficile legitimam conditionem præscribere, hoc modo.

Oportet denominatorem partis medij minorem esse numero, qui fit ex eodem denominatore vnitate multato in denominatorem partis maximi.

Canonem hîc si formare libet, necesse erit eum perplexiorem fieri, hoc scilicet modo.

Duc inter se denominatores partium maximi & minimi, & productum vnitate auctum ducito in datum numerum, productúmque diuide per solidum sub tribus denominatoribus multatum vnitate & numero qui fit ex denominatore partis minimi in summam aliorum duorum denominatorum. Quotienti adde datum numerum, fiet minimus quæsitorum. Et eundem quotientem ducito in denominatorem partis medij, fiet ipse medius.

Verbi gratia debeat maximus superare medium quarta parte minimi. Medius minimum sexta parte maximi. minimus quintam partem medij, numero 12. ducito inter se 4. & 6. producto 24 adde 1. fit 25. quem ducito in 12. fit 300. quem diuide per solidum sub denominatoribus 5. 6. 4. multatum vnitate & producto ex 4. in summam aliorum, hoc est diuide 300. per 75. fit 4. cui si addas 12. fit minimus quæsitorum 16. & si ducas 4. in denominatorem 5. fiet 20. medius vnde facile est reperire maximum 24. cùm sit sextuplus ad interuallum medij & minimi.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres numeros vt maximus medium superet, minimi data parte. Medius minimum excedat, maximi data parte. Minimus dato numero superet datam medij partem. Oportet autem maximi talem partem dari, vt adiecta minimo, numeros pauciores conficiat iis qui pro medio numero ab initio ponebantur. Ponatur rursus minimus 1 N. & 10. vnitates quibus superat medij trientem; erit ergo medius 3 N. vt scilicet minimus superet 10. vnitatibus trientem medij. Rursus quia volo maximum medio præstare triente minimi, si addidero medio minimi trientem habebo maximum, nimirum $3\frac{1}{3}$ N. + $3\frac{1}{3}$. Restat vt medius æqualis sit minimo, & maximi trienti. Sed minimus cum triente maximi est $2\frac{1}{9}$ N. + $11\frac{1}{9}$. Hoc igitur æquatur medio seu 3 N. Aufero similia à similibus. Ergo $\frac{8}{9}$ N. æquantur $11\frac{1}{9}$. Omnia nouies. Igitur 8 N. æquantur 100. & fit 1 N. $12\frac{1}{2}$ & eadem est quæ suprà demonstratio.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ δὲ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τοῦ τοῦ μέσου δοθέντος μέρους. δεῖ δὴ τὸ διδόμενον τοῦ μεγίστου μέρους τηλικοῦτον δίδοσθαι, ὥστε τὸ προστιθέμενον τῷ ἐλαχίστῳ ποιεῖν τοὺς ἐν αὐτῷ ἀριθμοὺς ἐλάσσονας τῶν ἐξ ἀρχῆς λαμβανομένων τοῦ μέσου. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς^ο ἑνὸς, καὶ ὧν ὑπερέχει τοῦ μέσου τρίτου μέρους μονάδων ι. ἔσται ἄρα ὁ μέσος ςς^οι τρεῖς, ἵνα ὑπερέχῃ ὁ ἐλάχιστος μονάδας ι τοῦ τοῦ μέσου τρίτου μέρους. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει, ἐὰν προσθῶ τῷ μέσῳ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος, ἕξω τὸν μέγιστον ςς̄ γ̄. α^γ μ^ο γ̄ α^γ. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν μέσον ἴσον εἶναι τῷ ἐλαχίστῳ, καὶ τῷ τοῦ μεγίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ ἐλάχιστος μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ μεγίστου ἀριθμοί εἰσι β̄ α^θ. καὶ μονάδες ια̅ α^θ. ταῦτα ἴσα τοῖς τοῦ μέσου ἀριθμοῖς τρισίν. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀριθμοῦ ἄρα η^θ. ἴσα ἐστὶ μονάσιν ια̅ α^θ. πάντα ἐννεάκις. ςς^οι ὀκτὼ ἴσοι μονάσιν ἑκατόν. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο ιβ̄ καὶ ἥμισυ. καὶ ἡ αὐτὴ δεῖξις τῇ ἐπάνω.

IN QVAESTIONEM XXIV.

Est eadem prorsus quæstio cum præcedente, sed alia operatio. Conditio adiecta eiusdem est naturæ cum ea quæ præcedenti apponitur, & eius necessitas simili ratiocinatione potest deprehendi, sed eodem vitio laborat atque præcedens, nec per eam determinari quicquam potest de quæstione proposita, antequam peracta operatione ad æquationem peruentum sit. Quare melius præscribetur sic.

Oportet denominatorem partis medij maiorem esse numero qui fit si eiusdem denominatoris aucti parte vnitatis à parte minimi denominata, sumatur pars à parte maximi denominata, vnitate aucta.

Canon etiam ab hac operatione formari posset, sed intricatus. Quare cum huiusmodi Canones vix vsui esse possint ob eorum perplexitatem, illis supersedere satius erit.

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς, ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθέν. ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι ἑαυτοῦ τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ τέταρτον. καὶ ἔτι τὸν τρίτον τῷ πρώτῳ τὸ πέμπτον, καὶ γενέσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν. τετάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμῶν τινῶν τρίτον ἐχόντων μέρος, ἐπεὶ τρίτον δίδωσιν. ἔστω δὴ ἀριθμῶν τριῶν. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων τινῶν τέταρτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τέταρτον δίδωσιν. ἔστω δὴ μονάδων τεσσάρων, καὶ μένει ὁ δεύτερος δοὺς α λαβὼν ς̄ ἑνὸς μ̊ τριῶν. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν πρῶτον δόντα α λαβόντα γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̊ γ. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ τρίτον ς̄ ἕνα, λαβὼν δὲ μονάδας τρεῖς λεῖψει ἀριθμοῦ ἑνὸς [γίνεται ς̄ ἑνὸς] μ̊ γ. μονάδες ἄρα τρεῖς λεῖψει ς̄ ἑνὸς πέμπτον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἐστὶ μ̊ ιε λεῖψει ςς̄ ε. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον δοθέντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον, λαβόντα δὲ

INVENIRE tres numeros, quorum si quisque proximè ipsum sequenti sui partem quæ mandatur dederit, inter eos qui dederunt & acceperunt fiat æqualitas. Sarutum sit vt primus secundo det sui trientem; secundus tertio, sui quadrantem; Tertius primo sui quintantem, & post mutuam hanc contributionem fiant æquales. Ponatur primus quotlibet numerorum qui trientem habeant, quandoquidem daturus est trienrem, esto itaque 3. N. Statuatur secundus quotlibet vnitarum quæ quadrantem habeant, quia daturus est quadrantem; esto itaque vnitatum 4. & erit secundus datis & acceptis quæ imperata sunt 1 N. + 3. Restat vt & primus vbi dederit acceperitque, fiat 1 N. + 3. sed dans sui trientem 1 N. accipiens autem 3 - 1 N. fit 1 N. + 3. Igitur 3 - 1 N. est quinta pars tertij. ipse ergo tertius est 15 - 5 N. Oporter ergo & tertium dantem quidem sui quintantem, accipientem verò à se-

cundo quadrantem illius, nempe vnitatem, fieri 1 N. + 3. sed dans sui quintantem, nimirum 3 − 1 N. relinquitur 12 − 4 N. Accipiens autem à secundo quadrantem, puta vnitatem, fit 13 − 4 N. Hoc ergo æquatur 1 N. + 3. & fit 1 N. 2. Ad positione. Erit primus 6. secundus 4. tertius 5. & constat propositum.

παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεσθαι ςοῦ ἑνὸς μ° τριῶν. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον μονάδας τρεῖς λεῖψει ςοῦ ἑνός, λοιπός ἐστι μονάδων ιβ̄ λεῖψει ςς δ̄. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεται μ° ιγ̄ λεῖψει ςς δ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° ς̄. ὁ δὲ δεύτερος μ° δ̄. ὁ δὲ τρίτος μ° ε̄. καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXV.

HÆC quæstio infinitas recipit solutiones, vt patet, cùm posito primo 3 N. poni possit pro secundo quilibet vnitatum numerus. Eodemque modo si ponas secundum 4 N. poni poterit tertius quilibet vnitatum numerus. Et si ponatur tertius 5 N. ponetur primus ad libitum quilibet vnitatum numerus.

Quod si determinare velis huiusmodi quæstiones ad vnicam solutionem, præscribendus est numerus in quo fieri debet æqualitas, vt si proponatur quæstio hoc modo. Sint inueniendi tres numeri, ita vt primus impertiendo sui triente secundum, secundus sui quadrante tertium. Tertius sui quintantę primum, post hanc mutuam contributionem quilibet trium numerorum inueniatur esse 10. Tunc autem sic erit operandum. Esto primus 3 N. qui dando sui trientem secundo, remanebit 2 N. Quare cùm accipiendo quintantem tertij, debeat esse 10. Erit quintans tertij 10 − 2 N. ac proinde ipse tertius 50 − 10 N. qui dando sui quintantem remanet 40 − 8 N. vnde cùm accipiendo quadrantem secundi, debeat esse 10. erit vtique quadrans secundi 8 N. − 30. ac proinde ipse secundus 32 N − 120. superest vt secundus dando sui quadrantem, & accipiendo trientem primi, fiat etiam 10. fit autem 25 N. − 90. Igitur 25 N. − 90. æquantur 10. & fit 1 N. 4. Ad positiones. Erit primus 12. secundus 8. tertius 10. Ab hac quæstione parum differunt decima octaua & decima nona secundi vt fusius eo loco docebimus, ita vt videantur hinc eò translatæ.

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE quatuor numeros quorum quilibet proximè sequenti se, det sui partem quæ imperabitur, ita vt dantes & accipientes fiant æquales. Imperatum sit primum secundo dare sui trientem; secundum tertio dare sui quadrantem; tertium quarto, sui quintantem; Quartum primo, sui sextantem, vt post hanc mutuam contributionem fiant æquales. Ponatur primus aliquot nume-

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθέν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ τέταρτον. τὸν δὲ τρίτον τῷ τετάρτῳ τὸ πέμπτον. καὶ ἔτι τὸν τέταρτον τῷ πρώτῳ τὸ ἕκτον, καὶ γίνεσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ἀ-

ἀριθμῶν τινῶν τρίτον μέρος ἐχόντων ἐπεὶ τρίτον δίδωσιν. ἔστω ἀριθμῶν τριῶν. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων τινῶν τέταρτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τέταρτον δίδωσιν, ἔστω μο δ. ὁ ἄρα δεύτερος δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ πρώτου τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἕνα γίνεται ς ἑνὸς μο γ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν πρῶτον δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἕνα, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τετάρτου τὸ ἕκτον γίνεσθαι ἀριθμοῦ ἑνὸς μο γ. ἀλλὰ δοὺς μὲν ς ἕνα λοιποὺς ἔχει ἀριθμοὺς δύο. δεήσει ἄρα τὸ τοῦ τετάρτου ἕκτον λαβόντα αὐτὸν γίνεσθαι ς ἑνὸς μο γ. μονάδες ἄρα τρεῖς λεῖψει ς ἑνὸς ἕκτον μέρος εἰσὶ τοῦ τετάρτου. αὐτὸς ἄρα ὁ τέταρτος ἔσται μο ιη λεῖψει ςς ς. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν τέταρτον δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ ἕκτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τρίτου τὸ πέμπτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μο γ. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ ἕκτον μονάδας τρεῖς λεῖψει ς ἑνός, λοιπός ἐστι μο ιε λεῖψει ςς ε. δεήσει ἄρα αὐτὸν καὶ λαβόντα τὸ τοῦ τρίτου πέμπτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μο γ. ἀλλὰ ἂν λάβῃ ἀριθμοὺς ς λεῖψει μο ιβ γίνεται ς ἑνὸς μο γ. οἵτε ἀριθμοὶ ς λεῖψει μο ιβ πέμπτον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἔσται ςς λ λεῖψει μο ξ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον δόντα μὲν τὸ ἑαυτοῦ πέμπτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μο γ. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον ἀριθμοὺς ς λεῖψει μο ιβ. λοιποὺς ἔχει ἀριθμοὺς κδ λεῖψει μο μη. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον, γίνεται ςς κδ λεῖψει μο μζ. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ν εἰκοστοτρίτων.

rotum trientem habentium, quoniam trientem daturus eſt ſitque 3 N. ſecundus autem ponatur aliquot vnitatum quadrantem habentium, quandoquidem quadrantem daturus eſt, ſitque 4. ſecundus igitur dans ſui quadrantem, nempe 1. & accipiens primi trientem, puta 1 N. fit 1 N. + 3. Oportet ergo & primum cùm dederit ſui trientem 1 N. & acceperit ſextantem quarti fieri 1 N. + 3. ſed cùm dedit 1 N. relinquitur 2 N. oportet igitur hoc adſcito, ſextantem quarti fieri 1 N + 3. Quamobrem 3 - 1 N. eſt ſextans quarti, atque ipſe quartus eſt 18 - 6 N. Reſtat vt & quartus dato ſui ſextante, & accepto quintante tertij, fiat 1 N. + 3. ſed dato ſui ſextante, nempe 3 - 1 N. remanet 15 - 5 N. Oportet igitur hunc adſumentem quintantem tertij fieri 1 N. + 3. ſed ſi adſumat 6 N. - 12. fit 1 N. + 3. Igitur 6 N - 12. eſt quintans tertij. Ipſe ergo tertius eſt 30 N - 60. Oportet ergo & tertium dato ſui quintante, accepto vero quadrante ſecundi fieri 1 N. + 3. ſed dato ſui quintante, puta 6 N. - 12. remanet 24 N - 48. Accepto autem ſecundi quadrante fit 24 N. - 47. Hoc ergo æquale eſt 1 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{50}{23}$

Ad positiones erit primus $\frac{150}{23}$. secundus $\frac{92}{23}$. tertius $\frac{120}{23}$. quartus $\frac{114}{23}$. Abiiciatur denominator partium. Erit itaque primus 150. secundus 92. tertius 120. quartus 114. & satisfaciunt quæstioni.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρν [εἰκοστοτρίτων.] ὁ δὲ δεύτερος ϟβ [εἰκοστοτρίτων.] ὁ δὲ τρίτος ρκ [εἰκοστοτρίτων] ὁ δὲ τέταρτος ριδ [εἰκοστοτρίτων] περιῃρήσθω τὸ μόριον. ἔσται δηλαδὴ ὁ μὲν πρῶτος μ° ρν. ὁ δὲ δεύτερος ϟβ. ὁ δὲ τρίτος ρκ. ὁ δὲ τέταρτος ριδ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXVI.

EADEM ratio est huius quæstionis, quæ & præcedentis. Quæstio infinitas recipit solutiones, & si determinanda sit ad vnicam, præscribendus est numerus in quo fieri debet æqualitas, tuncque operabimur vt in præcedente traditum est. Quod autem denominatores abiici iubet Diophantus, vt solutio in integris habeantur, id fit quia si inuenti semel numeri quæstioni satisfacientes, per eundem multiplicentur vel diuidantur, producta itidem & quotientes quæstionem soluent, cuius rei ratio est quam attingit Xilander, quia scilicet quæsiti numeri, partes proportionales vicissim dant & accipiunt, quæ autem partium cognominum eadem totorum inter se, ac vicissim est ratio. Vnde etiam colligi potest alius modus soluendi huiusmodi quæstiones, cùm numerus præscribitur in quo fiat æqualitas. Nam si quæstio prius soluatur per operationem Diophanti, & numerus in quo fit æqualitas diuidatur per eum qui præscribitur, & per quotientem diuidantur item inuenti numeri per operatioοem Diophanti, habebuntur quæsiti numeri. Verbi gratia, si quærantur quatuor numeri dantes & accipientes easdem partes quas requirit Diophantus, ita vt facta contributione quilibet reperiatur 59 $\frac{1}{2}$ solues prius quæstionem cum Diophanto, & inuenies numeros 150. 92. 120. 114. Et oumerus in quo fit æqualitas erit 119. Hunc ergo si diuidas per numerum præscriptum 59. $\frac{1}{2}$ erit quotiens 2. per quem si diuidas sigillatim inuentos oumeros, fient 75. 46. 60. 57. quæsiti numeri. Posset etiam tam hæc quàm præcedẽs paulò aliter proponi, requirendo scilicet vt facta mutua contributione fiant numeri diuersi non æquales. Verbi gratia, sint inueniendi quatuor numeri, vt primus dando sui trientem & accipiendo sextantem quarti fiat 6. Secundus dando sui quadrantem, & accipiendo trientem primi fiat 7. Tertius dando sui quintandem, & accipiendo quadrantem secundi fiat 14. Quartus dando sui sextantem, & recipiendo quintantẽ tertij, fiat 23. Et tunc imitabimur artificium operatioοis quæ ad præcedentẽ tradita est, hoc modo. Ponatur primus 3 N. cum ergo multatus suo triente & auctus sextante quarti faciat 6. erit 6 – 2 N. sextans quarti, & ipse quartus 36 – 12 N. vnde ablato sextante, manent 30. – 10 N. quæ cùm quintaote tertij debent facere 23. Igitur quintans tertij est 10 N. – 7. Ideoque ipse tertius est 50 N. – 35. qui multatus quintante manet 40 N – 28. debetque tunc cum quadrante secundi facere 14. Quare 42 – 40 N. est quadrans secundi, & ipse secundus 168 – 160 N. vnde ablato quadrante manent 126 – 120 N. quæ cum triente primi debent facere 7. sed faciunt 126 – 119 N. hoc ergo æquatur 7. & fit 1 N. 1. Ad positiones primus est 3. secundus 8. tertius 15. quartus 24.

QVÆSTIO XXVII.

INVENIRE tres numeros vt quilibet à reliquis duobus coniunctis partem imperatam accipiat, & fiant æquales. Statutum sit primum à reliquis

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λάβῃ μέρος τὸ ἐπιταχθέν, καὶ γίνωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον παρὰ τῶν λοιπῶν

δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. δεῖ δὲ δεύτερον παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τέταρτον. δεῖ δὲ τρίτον παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ πέμπτον, καὶ γίνεσθαι ἴσους. τετάχθω ὁ πρῶτος ς ἑνός, οἱ δὲ λοιποὶ δύο μονάδων τινῶν τοῦ προχείρου ἕνεκεν τρίτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τρίτον διδόασιν. ἔστωσαν μ° γ. οἱ ἄρα τρεῖς ἔσονται ς ἑνὸς μ° γ. καὶ δὴ ὁ πρῶτος λαβὼν παρὰ τῶν λοιπῶν δύο τὸ τρίτον, γίνεται ς ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δεήσει ἄρα καὶ τὸν δεύτερον παρὰ τῶν δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μονάδος μιᾶς, πάντα τετράκις. τετράκις ἄρα ὁ δεύτερος προσλαβὼν τοὺς δύο, τρεῖς ἐστὶ ὁ δεύτερος προσλαβὼν τοὺς τρεῖς. τρεῖς ἄρα ὁ δεύτερος προσλαβὼν τοὺς τρεῖς γίνεται ἀριθμοὶ δ μονάδες δ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τούτων ἀφέλω τοὺς τρεῖς. λοιποὶ ἀριθμοὶ τρεῖς μονὰς μία τρεῖς ἐστὶ ὁ δεύτερος. [αὐτὸς ἄρα ὁ δεύτερος] ἔσται ς ἑνός, μονάδος τρίτου. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον παρὰ τῶν δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ πέμπτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα ὁμοίως πεντάκις, καὶ συνάγεται διὰ τῶν ὁμοίων ὁ τρίτος ς ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους γενέσθαι ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιγ δωδεκάτων. καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ μορίου. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° ιγ. ὁ δὲ δεύτερος μ° ιζ. ὁ δὲ τρίτος μ° ιθ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

duobus coniunctis ſumere trientem. Secundum à reliquis duobus coniunctis accipere quadrantem. Tertium à reliquis duobus cõiunctis ſumere quintantem, & omnes fieri æquales. Ponatur primus 1 N. reliqui verò duo compendij gratia, quia trientem dare debent, ſtatuantur vnitatum quotlibet, trientem habentium, ſintque 3. Tres ergo numeri ſimul erunt 1 N. + 3. & ſanè primus ſumens à reliquis duobus trientem, fit 1 N. + 1. Oportet ergo & ſecundum à duobus reliquis coniunctis ſumpto quadrante fieri 1 N. + 1. Sumantur omnia quater. Quater igitur ſecundus adſcitis duobus reliquis, eſt ter ſecundus adſciſcens ipſos tres numeros. Ter ergo ſecundus adiunctis tribus numeris fit 4 N. + 4. Si igitur inde abſtulero tres numeros, relinquuntur 3 N. + 1 quod eſt ter ſecũdus, ipſe ergo ſecundus eſt 1 N. + $\frac{1}{3}$ Oportet itaque & tertium ſumpto reliquorum duorũ quintante fieri 1 N. + 1. Omnia ſimiliter ſumantur quinquies, & eadem ratione inuenietur tertius 1 N. + $\frac{1}{2}$. Supereſt vt tres ſimul iuncti ſint æquales 1 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{13}{12}$ & omiſſa denominatione partis, fit primus 13. ſecundus 17. tertius 19. & implent poſtulata.

IN

IN QVAESTIONEM XXVII.

SVMANTVR *omnia quater* &c. Hæc si obscuriora videantur, sic poterunt elucidari. Quia oportet secundum sumpto quadrante reliquorum fieri 1 N + 1. sumendo huius quadruplum patet 4 N + 4. continere quater secundum, & semel reliquos. Quare si inde auferatur semel summa trium numerorum, nempe 1 N + 3. patet residuum 3 N + 1. continere ter secundum. Quare fiet ipse secundus 1 N. + ⅓ Similiter quia 1 N. + 1. continet semel tertium, & quintantem reliquorum, si sumatur huius quintuplum, patet 5 N. + 5. continere quinquies tertium, & semel reliquos. Quare si auferatur inde summa omnium, nimirum 1 N. + 3. residuum 4 N. + 2. erit tertij quadruplum, erit ergo tertius 1 N. + ½ cætera patent.

Hæc etiam quæstio infinitas solutiones recipit, & inuentis semel numeris quæstionem soluentibus, quotquot sumentur in iisdem rationibus, ij satisfacient proposito, vt satis indicat Diophantus cùm denominatorem abiicit. Quod si præscribatur numerus in quo fiat æqualitas, iam determinabitur quæstio ad vnicam solutionem. Verbi gratia. Sit propositum inuenire tres numeros vt primus cum ⅔ reliquorum faciat 40. Itemque secundus cum ¾ reliquorum, & rursus tertius cum ⅘ reliquorum faciat etiam 40. Ponatur primus 1 N. ergo ⅔ reliquorum erunt 40 − 1 N. Quare ipsa summa secundi & tertij fiet 60 − 1 ½ N. & summa omnium 60 − ½ N. Itaque cùm 40. contineat secundum & ¾ reliquorum, huius quadruplum 160. continebit quater secundum, & ter reliquos, auferatur ergo hinc triplum summæ omnium, puta 180 − 1 ½ N. remanebit secundus 1 ½ N. − 20. Similiter quia 40. continet tertium, & ⅘ reliquorum, huius quintuplum, nempe 200. continet quinquies tertium, & quater reliquos, auferatur hinc quadruplum summæ omnium, nimirum 240 − 2 N. remanet tertius 2 N. − 40. Superest vt huic addendo ⅘ tam primi, quàm secundi nempe ⅘ N. & ⁶⁄₅ N. − 16. fiat 40. fiunt autem 4 N. − 56. æqualia 40. & fit 1 N. 24. Ad hypostases. Est primus 24. secundus 16. tertius 8.

Eodem artificio soluetur quæstio, si singuli numeri cum certa parte aliorum diuersos conficiant numeros, vt si primus cum ½ aliorum faciat 32. secundus cum ⅓ aliorum faciat 28. tertius cum ¼ aliorum faciat 31. Ponatur enim primus 1 N. ergo semissis aliorum est 32 − 1 N. summaque ipsorum 64 − 2 N. & summa omnium 64 − 1 N. Cùm ergo 28. contineat secundum & ⅓ reliquorum, huius triplum 84. continet ter secundum & semel reliquos, quare si hinc auferatur summa omnium 64 − 1 N. residuum 20 + 1 N. erit duplum secundi, ac proinde ipse secundus est 10 + ½ N. Similiter quia 31. continet tertium & ¼ reliquorum, huius quadruplum 124. continet quater tertium & semel reliquos. Quare si inde auferatur summa omnium 64 − 1 N. residuum 60 + 1 N. est triplum tertij: ergo ipse tertius est 20 − ⅓ N. superest, vt huic addendo ¼ tam primi quàm secundi nempe ¼ N. & 2 ½ + ⅛ N. fiat 31. fit autem 22 ½ + ¹⁷⁄₂₄ hoc ergo æquatur 31. & fit 1 N. 12. Ad positiones. Primus est 12. secundus 16. tertius 24.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE quatuor numeros, vt quilibet à tribus reliquis coniunctis accipiat partem imperatam, & fiant æquales. Imperatum sit primum à reliquis tribus coniunctis sumere trientem. Secundum à reliquis tribus coniunctis sumere quadrantem. Tertium similiter sumere quintantem. Quartum verò, capere sextantẽ, & omnes fieri æquales.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος παρὰ τῶν λοιπῶν τελῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνῃ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, καὶ γίνωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον παρὰ τῶν λοιπῶν τελῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον παρὰ τῶν λοιπῶν τελῶν ὡς ἑνὸς τὸ τέταρτον τὸν τρίτον ὁμοίως τὸ πέμπτον. τὸν δὲ τέταρτον τὸ ἕκτον. καὶ γίνεσθαι ἴσους.

τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ος ἑνός. ἐπεὶ δὲ λοιποὶ τρεῖς μονάδων τινῶν τρίτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τρίτον διδόασιν. ἔστωσαν μ° γ. ὁ ἄρα πρῶτος παρὰ τῶν λοιπῶν τρίτων ὡς ἑνὸς λαμβάνων τὸ τρίτον γίνεται ς^ος ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δεήσει ἄρα καὶ τὸν δεύτερον παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς^ος ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα πάλιν ὁμοίως τετράκις. καὶ συνάγεται διὰ τῶν αὐτῶν ὁ μὲν δεύτερος ς^ος ἑνὸς μονάδος τρίτου. ὁ δὲ τρίτος ς^ος ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. ὁ δὲ τέταρτος ς^ος ἑνὸς μονάδος τριῶν πέμπτων. λοιπόν ἐστι τοὺς τέσσαρας συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι ς^ῷ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς μ° μζ ἐν μορίῳ ἐνενηκοστῷ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° μζ. ὁ δὲ δεύτερος μ° οζ. ὁ δὲ τρίτος μ° ϟβ. ὁ δὲ τέταρτος μ° ρα. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Ponatur primus 1 N. reliqui verò tres, quandoquidem trientem dare debent, statuantur vnitatum quotlibet trientem habentium, putà 3. Primus igitur à tribus reliquis coniunctis sumpto triente fit 1 N. + 1. Oportet ergo & secundum sumpto à reliquis tribus quadrante fieri 1 N. + 1. Rursus omnia vt in præcedenti quater sumantur, & iisdem de caussis inuenietur secundus 1 N. + $\frac{1}{3}$. Tertius verò 1 N. + $\frac{1}{2}$. At quartus 1 N. + $\frac{3}{5}$. Restat vt quatuor numeri simul iuncti æquentur 1 N. + 3. & fit tandem 1 N. $\frac{47}{90}$. Erit ergo primus 47. secundus 77. tertius 92. quartus 101. & hi satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

EADEM omnia quæ ad præcedentẽ dicta sunt, hîc etiam locum habent. Vnde apparet simili prorsus artificio extendi posse quæstionem ad quinque, ad sex vel ad plures numeros, siue ea determinetur ad vnicam solutionem, siue non; & siue singuli numeri cum certa parte reliquorum æquales faciant numeros, siue diuersos. Itaque de his satis.

QVÆSTIO XXIX.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσευρεῖν ἕνα ἀριθμόν, ὃς ἑκάτερον πολλαπλασιάσας ποιῇ ὃν μὲν τετράγωνον, ὃν δὲ πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοί, ὅ τε σ, καὶ ὁ ε. καὶ ἔστω ὁ ζητούμενος ς^ος εἷς, κἂν μὲν ἐπὶ τὰς σ μονάδας πολλαπλασιασθῇ ποιεῖ ςς^οὺς σ. ἐὰν δὲ ἐπὶ τὰς ε μονάδας, ποιεῖ ςς^οὺς ε. δεῖ δὲ τούτων τὸν μὲν εἶναι τετράγωνον, τὸν δὲ πλευρὰν αὐτοῦ. ἐὰν τοίνυν τοὺς ε. ἀριθμοὺς τετραγωνίσω,

DVOBVS datis numeris, inuenire aliquem numerum qui in vtrumque ductus, hunc quidem quadratũ efficiat, illum verò latus eiusdẽ quadrati. Sint dati duo numeri 200. & 5. & ponatur is qui quæritur 1 N. qui si ducatur in 200. facit 200 N. At si ducatur in 5. facit 5 N. Oporret autem horum alrerum quadratum esse, alterum latus eius; si ergo quadrauero 5 N.

fient 25 Q. æquales vtique 200 N. omnia per numerum diuidantur. Igitur 25 N. æquantur 200. & fit 1 N. 8. Ac is quæstioni satisfacit.

γίνονται δυνάμεις κε̄ ἴσαι ἀριθμοῖς σ̄. πάντα παρὰ ἀριθμόν. ἀριθμοὶ ἄρα κε̄ ἴσοι μονάσι σ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο η̄. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

IN QAESTIONEM XXIX.

DVPLEX casus hîc considerari potest, prout tertius quæsitus ductus in vtrumque datorum, productum ex maiore facit quadratum, & ex minore latus quadrati. Vel contrà productum ex minore facit quadratum, & ex maiore latus. In priorem casum incidit æquatio Diophanti. In posteriorem ista. Ponatur 5 N. quadratus, & eius latus 200 N. ergo 5 N. æquantur 40000. Q. & fit 1 N. $\frac{1}{8000}$ qui quæstioni satisfacit. Pro vtroque autem casu fiet vnus Canon vniuersalior eo quem affert Xilander.

Alterum datorum numerorum diuide per quadratum alterius, orietur quæsitus numerus.

Porro quod ait Xilander, siquidem in numeris non surdis & integris quæstio consistat, duos propositos numeros semper esse quadratorum similes, falsissimum est si per propositos numeros, datos ab initio intelligat, vt ex ipso Diophanti exemplo manifestum fit, nam 200. & 5. non sunt plani similes. Si autem intelligat tertium quæsitum, & alterum datorum, id verum est. Semper enim tertius quæsitus & is in quem ille ductus quadratum facit, sunt quadratorum similes. Sed si hoc voluit Xilander obscurè locutus est, & malè ad integros numeros id restrinxit. Quicumque enim sumantur Numeri, idem euenire necesse est, [2] cùm ponatur ex eorum mutuo ductu produci quadratum. 2. octaui.

Quòd autem ait Diophantus, πάντα παρὰ ἀριθμόν, depressionem specierum intelligit, quam alibi vocat ὑποβιβασμόν, de qua definitione vndecima actū est. Cùm enim 5 N. sint æquales 25 Q. si vtraque æquationis pars per 1 N. diuidatur, fiunt 5. æquales 25 N. quia scilicet Æquales numeri per eundem numerum diuisi, æquales dant quotientes.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE duos numeros, vt summa ipsorum, & productus ex eorum multiplicatione datos efficiant numeros. Oportet autem inueniendorum numerorũ summæ semissis quadratum, quadrato superare productũ multiplicationis. Est autem hoc Plasmaticum. Constitutum sit summum efficere 20. at productum multiplicationis 96. Ponatur interuallum ipsorum 2 N. Et quoniam summa ipsorum est 20. si hanc bifariã secuero, erit pars quælibet diuisionis, seu semissis summæ 10.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιεῖ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν εὑρισκομένων τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συναμφοτέρου τετράγωνον, τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν ποιεῖν μονάδας ϟς̄. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, ἀριθμῶν β̄. καὶ ἐπεὶ τὸ σύνθεμα αὐτῶν ἐστι μο κ̄. ἐὰν τοῦτο τέμω δίχα. ἔσται ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως. ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ συνθέματος μο ῑ,

κἂν τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς τουτέστι ς ἕνα, ἑνὶ μὲν τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως προσθῶ, τῷ δὲ λοιπῷ ἀφέλω, μένει πάλιν τὸ σύνθεμα μο κ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. τετάχθω οὖν ὁ μείζων ς ἑνὸς καὶ μο ι. τῶν ἡμίσεων τοῦ συνθέματος. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μο ι. λεῖψει ς ἑνός. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα μο κ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ςς β. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μονάδας ϟϛ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστι μονάδες ρ λεῖψει δυνάμεως μιᾶς. ταῦτα ἴσα μονάσι ϟϛ. καὶ γίνεται ὁ ς μο β. ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων μο ιβ. ὁ δὲ ἐλάσσων μο η. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Et si semissem interualli, puta 1 N. vni parti adiecero, & detraxero ab altera, manebit rursus vtriusque summa 20. & interuallum 2 N. Ponatur ergo maior 1 N. + 10. erit minor 10 − 1 N. & manet summa 20. interuallum 2 N. Restat vt productus multiplicationis sit 96. sed productus ille est 100 − 1 Q. Hoc ergo æquatur 96. & fit 1 N. 2. Est igitur maior 12. minor 8. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM XXX.

DVO indicat conditio apposita. Primum an absolutè possibilis sit quæstio necne, secundum an per numeros rationales solui possit, vel per surdos tantum. Primo enim cùm constet per secundã secundi porismatum Quadratum semissis summæ duorum numerorum æquari producto multiplicationis eorundem, & quadrato semissis interualli ipsorum, fieri non potest vt productum multiplicationis sit maius quadrato semissis summæ, sed oportet æquale esse, vel minus. Æquale quidem si æquales sint numeri, nam semissis summæ æqualium numerorum, idem est atque alter ipsorum, ac proinde productum multiplicationis æquatur quadrato eiusdem semissis. Minus verò, si sint inæquales numeri, quia tunc, vt dictum est, productum multiplicationis vnà cum quadrato semissis interualli æquatur quadrato semissis summæ. Quare oportet, vt à quadrato semissis summæ auferendo productum, supersit quadratus semissis interualli. Vnde constat Diophantum per conditionem appositam supponere quæsitos numeros esse inæquales. Deinde patet vt solutio contingat rationalis, oportere vt detracto producto à quadrato semissis summæ, residuum sit quadratus numerus. Nam cùm hoc residuum sit quadratus semissis interualli, si residuum illud non sit quadratus numerus, erit interuallum irrationale, ac proinde & ipsi numeri. Verbi gratia, si diuidendus sit 20. in duos numeros, quorum productum sit 98. operando cum Diophanto inueniemus tandem 1 Q. æqualem 2. Quare semissis interualli erit ℞ 2. atque ipsi numeri 10 − ℞ 2. & 10 + ℞ 2. Porro tam ex conditione apposita, quàm ex ipsa operatione eliciturifte Canon.

A quadrato semissis summæ, aufer productum multiplicationis, residui radix quadrata, addita & adempta eidem semissi summæ, quæsitos exhibebit numeros.

Aliter etiam proponi poterat conditio, nimirum.

Oportet numerorum summæ quadratum, quadrato numero superare quadruplum producti.

Nam vt ostensum est quinta secundi porismatum. Quadratus, summæ duorum numerorum, æqualis est quadruplo plani sub ipsis numeris, vnà cum quadrato interualli ipsorum. Vnde etiam alius Canon formabitur, nimirum.

Aufer quadruplum producti à quadrato summæ, residui radicem quadratam adde & adime ipsi summæ, semissis aggregati & residui quæsitos exhibebit numeros.

Sed & notatu dignum est ad hanc quæstionem, illam etiam posse reduci.

Dato medio trium proportionaliũ, & aggregato extremorũ, extremos inuenire.

Vt dato medio 8. & summa extremorum 20. sint inueniendi ipsi extremi. [a] Quia in tribus proportionalibus, planus sub extremis æquatur quadrato medij, cùm medij quadratus sit 64. patet eo reduci propositam quæstionem, vt diuidatur 20. in duos numeros, quorum mutuò ductu fiat 64. Quod idem est cum Diophantæo problemate, & per illud, vel per eius Canones inuenientur extremi quæsiti 4. & 16. Quod autem attinet ad verba illa, ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικὸν, quę nos retento Gręco vocabulo vertimus, *Est autem hoc plasmaticum*, Xilander verò Diophanti mentem minimè assecutus, malè interpretatur, *Hoc autem est effictum aliunde*. Nos ea explicabimus infra quæstione trigesima tertia. 20. septimi

QVÆSTIO XXXI.

INVENIRE duos numeros, vt & summa ipsorum, & summa quadratorum ab ipsis ortorum datos conficiant numeros. Oportet autem duplum summæ quadratorum, quadrato superare quadratum summæ numerorum. * Et hoc quoque Plasmaticum est. * Imperatum sit summam numerorum esse 20. & summam quadratorum ab ipsis ortorum esse 208. Ponatur itaque interuallum ipsorum 2 N. & esto maior 1 N. + 10. vnitates, quot scilicet continet semissis summæ, minor autem sit 10 − 1 N. & manet rursus eorum summa 20. Interuallum verò 2 N. Superest vt summa quadratorum ab ipsis, sit 208. Atqui summa quadratorum facit 2 Q. + 200. Hoc igitur æquale est vnitatibus 208. & fit 1 N. 2. Ad positiones. Erit maior 12. minor 8. & satisfaciunt postulatis.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τοὺς δὶς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου αὐτῶν τετραγώνου ὑπερέχειν τετραγώνῳ. * ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν. * ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὴν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας σῆ. τετάχθω δὴ ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς β̄. καὶ ἔστω ὁ μείζων ς ἑνὸς καὶ μο ῑ. τῶν ἡμίσεων πάλιν τοῦ συνθέματος, ὁ δὲ ἐλάσσων μο ῑ. λεῖψει ς ἑνός. καὶ μένει πάλιν τὸ σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. λοιπόν ἐστι καὶ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας σῆ. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις δύο μονάδας σ̄. ταῦτα ἴσα μονάσι σῆ. καὶ γίνεται ὁ ς μο β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μείζων μο ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μο η̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXXI.

HIC etiam conditio indicat an possibilis sit quæstio, & an per numeros rationales solui possit, idémq; prorsus dicit quid septima secundi porismatũ, nimirũ. Quadratus sũmæ duorũ numerorũ & quadratus interualli eorũ æquãtur duplo aggregati quadratorũ. Quare vt quæstio sit possibilis, necesse est duplũ aggregati quadratorũ, esse maius quadrato sũmę, nisi propositi numeri sint ęquales, tũc n. duplũ quadratorũ

4. secundi. æquabitur quadrato summæ. Quia quadratus summæ æquatur quadratis numerorum & duplo producti, at cùm numeri sunt æquales, duplum producti æquatur ipsis quadratis. Quare in hoc casu quadratus summæ æquatur duplo quadratorum. Vt verò solutio sit rationalis necesse est duplum quadratorum excedere quadratum summæ, quadrato numero, cùm enim hic excessus sit quadratus interualli numerorum, vt docuimus, si huiusmodi excessus non sit quadratus, erit interuallum numerorum irrationale, ac proinde & ipsi numeri. Cæterùm ex hac conditione sic explicata pendet Canon à Xilandro traditus, nimirum.

A duplo aggregati quadratorum, aufer quadratum summæ numerorum, residui latus quadratum adde & adime ipsi summæ numerorum, semissis aggregati & residui quæsitos exhibebit numeros.

Poterat etiam aliter proponi conditio, & quidem magis appositè ad operationem Diophanti.

Oportet summam quadratorum superare duplum quadrati semissis summæ numerorum duplo quadrati numeri.

Quia enim per sextam secundi porismatum constat summam quadratorum duplam esse quadratorum qui fiunt à semisse summæ laterum, & à semisse interualli eorundem, patet si à summa quadratorum, auferatur duplum quadrati à semisse summæ numerorum, residuum æquari duplo quadrati semissis interualli numerorum. Itaque ex hac etiam conditione sic explicata, & ex ipsamet Diophanti operatione elicietur alter Canon.

A summa quadratorum aufer duplum quadrati semissis summæ numerorum, residui semissis latus quadratum additum vel ademptum ipsi semissi numerorum, quæsitos dabit numeros.

Verba autem illa, ἔτι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν, hîc, vt arbitror, subreptitia sunt, vt ad trigesimam tertiam fusius docebo, nolui tamen ea de textu tollere, ne audax plus æquo vel temerarius alicui forte viderer, sed ea asteriscis includere satis habui.

QVÆSTIO XXXII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας π. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς β. ἔσται ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ς ἑνὸς μ ι. [ὁ δὲ ἐλάσσων μ ι] λείψει ς ἑνός. καὶ μένει πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ςς β. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μ π. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστιν ςς μ. ταῦτα ἴσα μονάσιν π. καὶ συνάγεται πάλιν ὁ μὲν μείζων

INVENIRE duos numeros, vt & summa ipsorum, & interuallum quadratorũ ab ipsis ortorum, datos faciant numeros. Constitutum sit summam numerorum esse 20. Interuallum verò quadratorum ab ipsis ortorum esse 80. Ponatur interuallum ipsorum 2 N. erit similiter maior 1 N. + 10. Minor autem 10 − 1 N. & manet rursus summa ipsorum 20. interuallum verò 2 N. superest vt interuallum quadratorum ab ipsis ortorum sit 80. sed interuallum quadratorum ab ipsis est 40 N. Hoc ergo æquatur 80. & fit rursus maior 12.

Minor 8. & soluunt quæstionem.

μο ιβ. ὁ δὲ ἐλάττων μο η. καὶ πάλιν ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXII.

Hic nulla opus est conditione vt solutio contingat rationalis, semper enim, dum quæstio sit possibilis, eam per numeros rationales solui continget. Verùm vt sit possibilis sanè aliqua limitatione indiget, quicquid dicat Scholiastes, quam ego ita concipio.

Oportet excessum quadrati super quadratum minorem esse quadrato summæ numerorum.

Cuius necessitas euidens est, quia[a] Quadratus summæ æquatur ipsis quadratis numerorum, & duplo producti, quare nisi pars ponatur æqualis toti, vel etiam maior, impossibile est interuallum quadratorum esse æquale vel maius quadrato summæ numerorum. Itaque in exemplo Diophanti posita summa numerorum 20. cùm eius quadratus sit 400. poterit interuallum quadratorum præscribi quilibet numerus minor quàm 400. æqualis autem vel maior nequaquam. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiusmodi Canon. 4. secundi.

Diuide interuallum quadratorum per duplum summæ numerorum, quotiens additus vel ademptus semissi summæ, dabit quæsitos numeros.

Hoc autem idem fere est quod demonstratum est prop. tertia secundi porismatum, nimirum.

Diuide interuallum quadratorum per summam numerorum, orietur interuallum numerorum.

Data porro summa numerorum & eorum interuallo soluitur quæstio per Canonem primæ huius. Potest etiam aliter institui operatio, & tamen ad æquationem simplicem deuenietur. Esto alter numerorum 1 N. alter 20. – 1 N. horum quadrati sunt 1 Q. & 1 Q. + 400. – 40 N. quorum interuallum est 400 – 40 N. hoc ergo æquatur 80. & fit 1 N. 8. Hinc etiam elicietur Canon alius, priore non deterior.

Quadrato summæ adde vel adime interuallum quadratorum, summam & residuum diuide seorsim per duplum summæ numerorum, orientur quæsiti numeri.

QVÆSTIO XXXIII.

INVENIRE duos numeros vt interuallum ipsorum, & productum multiplicatione faciant datos numeros. Oportet autem quadruplum producti multiplicationis cum quadrato interualli iunctum, facere quadratum. Et hoc quoque Plasmaticum est. Statutum sit interuallum esse 4. productum verò multiplicationis 96. Ponatur summa ipsorum 2 N. habemus autem & interuallum 4. erit itaque maior 1 N. + 2. Minor 1 N – 2. & manet summa

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τὸν τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ποιεῖν τετράγωνον. ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μονάδας δ. τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν μονάδας ϟϛ. τετάχθω τὸ σύνθεμα αὐτῶν ςς β. ἔχομεν δὲ καὶ τὴν ὑπεροχὴν μο δ. ἔσται ὁμοίως ὁ μείζων ς ἑνὸς μο β. ὁ δὲ ἐλάσσων ς ἑνὸς λείψει μο β. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα

αὐτῶν ἀριθμοὶ β̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ μονάδες δ̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας ϟϛ̄. ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν ἐστι δυ α̅. ⋔ μο δ̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ϟϛ̄. καὶ γίνεται πάλιν ὁ μὲν μείζων μο ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάττων μο η̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

ipsorum 2 N. interuallum 4. Restat vt productum multiplicatione sit 96. est autem huiusmodi productum 1 Q. + 4. Hoc ergo æquatur 96. & fit rursus maior 12. minor 8. & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

Hîc apposita conditio non est ad ostendendum an quæstio sit possibilis, sed tantùm an per numeros rationales solui possit. Etenim non potest absolutè proponi huiusmodi quæstio impossibilis, quodcumque enim præscribatur numerorum interuallum, & qualecumque statuatur productum multiplicationis eorum, soluetur quæstio. Sed vt solutio contingat rationalis, necesse est vt quadruplo producti adjdendo quadratum interualli, quadratus fiat, quia scilicet, [a] quadruplum producti cum quadrato interualli æquatur quadrato summæ numerorum. Hinc autem elicitur Canon à Xilandro traditus.

5, 2. peris.

Quadrato interualli adde quadruplum producti, aggregati latus est summa numerorum, cui si addas & adimas interuallum, semissis summa & residui quæsitos dat numeros.

Poterat etiam aliter proponi conditio, & quidem magis appositè ad operationem Diophanti.

Oportet quadratum semissis interualli additum producto, conficere quadratum.

2. 2. peris.

[a] Quia scilicet quadratus interualli cum producto, quadratum efficit semissis summæ. Vnde etiam & ex ipsamet operatione Diophanti alium elicimus Canonem.

Adde producto quadratum semissis interualli, aggregati latus est semissis summæ numerorum, cui addendo & adimendo semissem interualli, fient quæsiti numeri.

Est etiam notatu dignum non differre quæstionem istam ab illa. *Dato medio trium proportionalium & differentia extremorum, inuenire extremos.* Vt dato medio 8. & interuallo extremorum 12. quærantur extremi. Quia planus sub extremis æquatur quadrato medij, & is est 64. eò reducitur quæstio, vt inueniantur duo numeri, quorum interuallum sit 12. productum multiplicationis 64. Quod idem est cum quæstione ista Diophanti. Quare per eam vel per Canones allatos inuenientur extremi quæsiti 4. & 16. Superest vt explicem verba illα ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν, quæ tum huic quæstioni, tũ trigesimæ & trigesimæ primæ adiecta sunt statim post conditionẽ, quæque hoc loco dilucidanda recepi. Prius tamen monendus est lector, nec Scholiastem, nec Xilandrum mentem Diophanti assequutum esse, quod cuilibet fiet manifestum qui ea quæ vterque ad trigesimam commentus est legere voluerit. Sanè non vacat in eorum nugis refellendis diutius immorari. Prӕterea Xilander verba ipsa malè reddidit, nam Plasmaticum, interpretatus est, effictum aliunde; cùm potius significet id à quo aliud quippiam effingi & plasmari potest. Ego itaque nil aliud voluisse Diophantum aio, quàm indicare ex huiusmodi quæstionum solutione, seu ex conditionibus adiectis, vel ex canonibus inde deductis formari & plasmari quodammodo regulas illas quas vocant compositas, cùm scilicet ex tribus infimis speciebus, duæ vni æquales reperiuntur, seu vt loquitur Franciscus Vieta, regulas de quadrato affecto sub latere. Etenim prima & secunda illarum regularum, ab hac ipsa quæstione trigesima tertia facilè deducuntur. Tertia verò pendet omnino à trigesima. Quamobrem cùm à trigesima prima nulla formetur huiusmodi regula, non dubito eadem verba ibi temerè inculcata esse, ab ipso scilicet Scholiasta, vel imperito

amanuensi ex aliis quæstionibus eò translata.

Quomodo autem ab his quæstionibus formentur supradictæ regulæ, non pigebit in tyronum gratiam adscribere, ipsas etiam tradendo regulas, tum eo modo quo communiter absoluuntur, tum eo quem tradit Petrus Nonius ad vitandas Fractiones sæpe commodo, ac denique methodum ipsam Diophanti exhibendo.

PRIMA REGVLA COMPOSITARVM.

Quadrati & Numeri æquales vnitatibus.

Fiat prius reductio ad vnum Quadratum per parabolismum, diuidendo scilicet singulas æquationis partes per numerum Quadratorum. Tunc capiatur semissis Numerorum, & eius quadrato addantur vnitates, ab aggregati latere auferatur semissis Numerorum, residuum est valor Numeri.

Verbi gratia 2 Q. + 8 N. sint æquales 42. fiet reductio ad 1 Q. diuidendo omnia per 2. fientque 1 Q. + 4 N. æqualia 21. Tunc sumpto semisse Numerorum 2. eius quadratum 4. addo vnitatibus 21. fit 25. cuius latus 5. vnde auferendo semissem Numerorum, remanet 3. valor Numeri.

EADEM EX PETRO NONIO.

Facto vt supra parabolismo si opus sit. Quadrato numeri Numerorum adde quadruplum vnitatum; ab aggregati latere aufer numerum Numerorum, residuum erit valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 1 Q + 5 N. sint æquales 24. Quia nullo hîc opus est parabolismo, quadrato ipsius 5. nimirum ipsi 25. adde quadruplum ipsius 24. nimirũ 96. fit 121. cuius latus 11. vnde auferendo 5. remanet 6. duplum Numeri, ergo Numerus est 3. vtrumque autem modum ab hac quæstione trigesima tertia deduci sic ostendemus. Ponãtur 1 Q. + 4 N. æquales 21. & sit CD 1 N. cui addatur BC ipsi æqualis. Et illis addatur adhuc AB æqualis numero Numerorum, puta 4. Tunc constat ex CD in BC. fieri 1 Q. & ex CD in AB fieri 4 N. Igitur ex CD in totum AC fit 21. Quamobrem cùm notum sit duorum AC. CD. interuallum esse AB, nempe 4. & productum ex eorum multiplicatione esse 21. patet nos eo deduci vt quæramus duos numeros quorum interuallum 4. productum multiplicatione sit 21. Quod ipsum quærit Diophantus quæstione hac trigesima tertia. Minor autem quæsitorum erit CD. seu 1 N. quod inueniendum proponebatur. Itaque si vtamur secundo Canone supra allato, capiemus semissem Numerorum, seu interualli, nempe ipsius 4. & eius quadratum addemus vnitatibus seu producto 21. vnde fient 25. cuius latus 5. vnde si auferantur 2 semissis ipsius 4. remanet 3 minor quæsitorum, seu CD. seu 1 N. vnde patet à secundo illo Canone deduci modum communem perficiendi hanc regulam.

A.... B... C... D

Quod si ad inueniendum duos numeros quorum interuallum sit 4. productum 21. vtaris primo Canone supra allato, incides sane in regulam Petri Nonij. Nam quadrato ipsius 4. qui est 16. addes quadruplum ipsius 21. nempe 84. vnde fiet 100. à cuius latere 10. auferes 4. & residuum 6. erit duplum Numeri, nempe ipsius 3.

SECVNDA REGVLA COMPOSITARVM.

Quadrati æquales Numeris & vnitatibus.

Facto si opus sit parabolismo, adde vnitatibus quadratum semissis Numerorum, lateri aggregati adde ipsum semissem Numerorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 1 Q. sit æqualis 4 N. + 21. addo ad 21. quadratum semissis ipsius 4. nempe 4. fit 25. cuius lateri 5. addo supradictum semissem 2. fit 7. valor Numeri.

EADEM EX PETRO NONIO.

Quadrato numeri Numerorum adde quadruplum vnitatum, lateri aggregati adde numerum Numerorum, fiet valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 1 Q. sit æqualis 5 N. + 24. Adde 25. ad quadruplum ipsius 24. nempe ad 96. fit 121 cuius lateri 11. adde 5. fit 16. duplum Numeri. Quare ipse Numerus est 8. Vtrumque modum deriuari quoque ab hac quæstione trigesima tertia sic probabimus Sit 1 Q. æqualis 4 N. + 21. imprimis patet 1 N. maiorem esse quàm 4. numerum Numerorum, nam ex quolibet latere in seipsum, vel in numerum ipso maiorem, fit vel quadratus lateris, vel numerus eodem quadrato maior. Quare si 4. esset æqualis vel maior quàm 1 N. essent 4 N. æquales vel maiores quàm 1 Q. ac proinde non possit 1 Q. æquari 4 N. + 21. Hoc posito. Sit A C. 1 N. erit ergo A C maior quàm 4. vt probatū est. Sumatur igitur in eo A B 4. & reliquo B C addatur æqualis ei C D. Patet ergo quadratū ex A C esse 1 Q. & productum ex A C in A B esse 4 N.[1] Quare cùm quadratus ex A C sit æqualis productis ex A C. in A B, & ex A C in B C seu in C D. sequitur productum ex A C. in C D. æquari 21. Igitur vt prius quærendi sunt duo numeri A C. C D. quorum interuallum A B seu 4. & productum multiplicationis est 21. nam horum maior A C. erit valor Numeri. Itaque à duplici Canone, duplex vt supra eruitur regula, primæ prorsus similis, finali tantum substractione in additionem mutata, quia videlicet ibi quærebatur minor numerus C D. Hîc vero quæritur maior A C.

A .... B ... C... D

[1] *1. secundi.*

TERTIA REGVLA COMPOSITARVM.

Numeri æquales Quadratis & vnitatibus.

Facto si opus sit Parabolismo. A quadrato semissis Numerorum aufer vnitates, residui latus adde vel adime semissi Numerorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 10 N. sint æquales 1 Q. + 21. Quadratus semissis Numerorum est 25. vnde si auferas 21. vnitates superest 4. cuius latus 2. si addas & adimas semissi Numerorum 5. fit valor Numeri vel 3. vel 7.

EADEM EX PETRO NONIO.

A quadrato numeri Numerorum aufer quadruplum vnitatum, residui latus adde vel adime ipsi numero Numerorum, fiet valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 7 N. sint æquales 1 Q. + 10. à quadrato ipsius 7. puta à 49. aufer quadruplum ipsius 10. nempe 40 superest 9. cuius latus 3. adde vel adime ipsi 7. fiet vel 4. vel 10. duplum Numeri. Quare Numerus est vel 2. vel 5. vtramque regulam deduci à trigesima quæstione Diophanti facilè probabitur. Sunto 10 N. æquales 1 Q. + 21. imprimis patet numerum Numerorum 10. maiorem esse quàm 1 N. nam si esset æqualis, vel minor, eo ducto in 1 N. fierent 10 N. æquales 1 Q. vel minores illo. Quare cùm 10 N. præter 1 Q. contineant 21. oportet 10 esse maiorem quàm 1 N. Hoc posito sit A B 10. in quo sumatur 1 N. A D. vel D B. & si ponatur 1 N. A D. constat ex A B in A D. fieri 10 N. & quadratum ex A D. esse 1 Q. Quare cùm productus ex A B in A D.[2] sit æqualis quadrato ex A D. vnà cum producto ex A D. in D B. relinquitur productum ex A D in D B. esse 21. Igitur quærendi sunt duo numeri quorum summa sit 10. productum 21. Eodem modo si 1 N. ponatur D B. ostendemus ex A B. in D B fieri 10. N. & ex A D. in D B. fieri 21. Quare vt prius quærendi erunt duo numeri, quorum summa sit 10. productum 21. Quod ipsum quærit Diophantus quæstione trigesima.

A ...... D ... B

[2] *3. secundi.*

Itaque si libeat vti primo Canone ibi allato. Summæ 10. semisse capto nempe 5. ab illius quadrato 25. auferemus productum 21. & residui 4. latus 2. addemus vel adimemus ipsi 5. & fient quæsiti numeri 7. & 3. quorum alter est A D. alter D B. &

vterque valor Numeri esse potest. Qui est primus modus hanc regulam perficiendi. Quod si vtaris secundo Canone, incides in regulam Petri Nonij vt manifestum est. Sed & ex annotatis ad trigesimam patet si quadratus semissis Numerorum æqualis sit vnitatibus, ipsum eundem semissem esse valorem Numeri, signum enim est quæsitos A D. D B æquales esse.

Cæterùm quia Diophantus vt iam monui ad definitionē vndecimam, peculiari vtens methodo, & nunquam adhibens parabolismum has æquationes resoluit, quomodo id perficiat iam docendum est.

REGVLAE COMPOSITAE EX DIOPHANTO.

Ducito numerum Quadratorum in vnitates, producto adde quadratum semissis Numerorum in prima & secunda regula. vel ab eodem quadrato aufer idem productum in tertia regula. Summæ vel residui cape latus; & huic adde vel adime semissem Numerorum in prima vel secunda regula. Contrà semissi numerorum adde vel adime idem latus in tertia regula. Summam vel residuum diuide per numerum Quadratorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 3 Q. + 20 N. sint æquales 52. ducito 3. in 52. fit 156. cui adde 100. quadratum semissis Numerorum, fit 256. cuius latus 16. vnde si auferas 10. remanet 6. quo diuiso per 3. fit 2. valor Numeri, eademque est aliarum regularum ratio. Differt ergo Diophantæa methodus à communi in hoc solùm, quod in communi diuisio per numerum Quadratorum fit ab initio, in Diophantæa methodo, eadem diuisio fit in fine. Sed demonstrandum est vtramque methodum eodem recidere. Sit enim A numerus quadratorum & B numerus Numerorum, & C vnitatum. Tunc

Y 36. K 6. H 21.
F 225. G 441.
L 9. E 15. D 216.

A 3. B 30. C 72.
M 1. N 10. P 24.

R 25. Q 5. T 49.
Z 12. X 2. V 7.

per Diophantæam methodum ducto A in C. fiat D. sumptoque E semisse ipsius B. eius quadratus F addatur ad D. & fiat G. cuius latus esto H. vnde auferendo E supersit K. Deinde per communem methodum diuidandur per A ipsi A. B C. vnde fiant vnitas M. & numeri N. P. sumptoque Q semisse ipsius N, eius quadratus R addatur ad P. & fiat T. cuius latus esto V. vnde ablato Q. supersit X. Erit ergo vt demonstratū est in prima regula, X valor Numeri. Dico si K per A diuidatur produci eundem X valorem Numeri. Sumatur enim L quadratus ipsius A. Quoniam ergo M est vnitas, erunt continuè proportionales L A M. in ratione cuius denominator est A, & rationis ipsius L ad M. denominator erit L. Cùm autem idem A ductus in P & in C. producat C & D [1] erit D ad C vt C ad P. & ipsi D C P. erunt proportionales ipsis L A M. eritque D ad P. vt L ad M. Quare ex L in P. fiet D. Quia etiam A ductus in N facie B, erit B ad N. vt A ad M. Quare & dimidium E ad dimidium Q. erit vt A ad M. Quamobrem & quadratus F ad quadratum R erit vt L ad M. Igitur vt F ad R, ita est D ad P. Quare & [2] antecedentes simul, puta G. ad consequentes simul, puta ad T. erunt vt L ad M. Ergo rursus latus H ad latus V. erit vt A ad M. Itaque cùm ostensum sit esse quoque E ad Q. vt A ad M. erit vt totus H ad totum V, ita ablatus E ad ablatum Q. [3] Quare & reliquus K ad reliquum X erit quoque vt A ad M. Quamobrem diuiso K per A prodibit X. Quod demonstrandum erat.

[1] 17. *septimi.*
[2] 12. *septimi.*
[3] 21. *septimi.*

Eadem prorsus ratione, idem euenire ostendetur in secunda regula. Nam omnia eodem modo perficiuntur, nisi quod in fine fit additio loco substractionis. Vt in communi methodo, addatur Q ad V. fiet Z valor Numeri. Itaque in Diophantæa methodo addatur E ad H. & fiat Y. dico si Y diuidatur per A. prodire eundem valorē Numeri Z. Cùm enim vt ostensum est sit H ad V, sicut E ad Q. erunt & antecedentes simul, puta Y ad consequentes simul, puta ad Z in eadem ratione, quæ eadem est cum ratione A ad M. Quamobrem diuiso Y per A, orietur Z. Quod erat ostendendum.

Non dissimili ratione ostendetur vtramque methodum conuenire in tertia regula. Sit enim A quadratorum numerus & B vnitatum, & C. Numerorum. Tunc per Diophantæam methodum ducto A in B fiat D. & semissis ipsius C. esto E cuius quadratus F vnde auferendo D. supersit G. cuius latus H. quo detracto ex E supersit K, & eodem H addito ad eundem E fiat Y. Deinde per communem methodum diuidantur per A ipsi A B C. & fiant M N P. & ipsius P semissis esto Q. cuius quadratus R, vnde auferendo N. supersit T. cuius latus V. quo detracto ex Q supersit X, & eodem V ad Q addito fiat Z. Erit igitur valor Numeri tam X quàm Z. Dico itaque si ipsi K. Y. per A diuidantur prodire eosdem X Z. Nam sumpto L quadrato ipsius A, rursus vt prius ostendemus esse L ad M vt D ad N. sed & est C ad P vt A ad M. ergo rursus semissis E ad semissem Q. est vt A ad M. Quare & quadratus F ad quadratum R est vt L ad M. seu vt D ad N. Quamobrem & reliquus G ad reliquum T est vt L ad M, ac proinde & latus H ad latus V est vt A ad M seu vt E ad Q. Itaque cùm sit E ad Q vt H ad V. siue addantur H E, itemque Q V. siue detrahatur H ex E itemque V ex Q.[1] erit rursus compositorum Y & Z,[2] Itemque residuorum K & X eadem ratio quæ A ad M. Quare si ipsi Y & K diuidantur per A orientur ipsi Z & X. Quod demonstrandum erat.

Y 24. H 9. K 6.
G 81. F 225.
L 9. D 144. E 15.

A 3. B 48. C 30.
M 1. N 16. P. 10.

R 25. T 9. Q 5.
Z 8. V 3. X 2.

12. septimi.
11. septimi.

Ex his tribus modis absoluendi regulas compositas, eum seliget peritus logista, quem compendiosiorem iudicabit. Sanè si parabolismus citrà fractiones fieri possit, communem præstat amplecti methodum, sin secus Diophantæa compendiosior est. In vtraque porrò si numerus Numerorum sit impar, Nonij methodum adhibere iuuabit, nam ea commodè aptari potest, non minus Diophantææ quàm communi, Vt si 3 Q + 7 N. æquentur 26. ducto 3 in 26. fit 78. & quia numerorum Numerus est impar sumo eius quadratum 49. cui addo quadruplum ipsius 78. puta 312. fitque 361. cuius latus 19 vnde si auferas 7. superest 12. quo diuiso per numerum quadratorum 3. fit 4 valor Numeri duplicati, ac proinde ipsi Numerus est 2. vel si placet diuide 12 per duplum numeri quadratorum, nimirum per 6. fiet statim valor Numeri 2. sed de his satis.

Quoniam vero quærendo duos numeros quorum summa, vel summa quadratorum, vel interuallum, vel interuallum quadratorum, aut productum multiplicationis data sint diuersimodè, multæ aliæ non inelegantes quæstiones fieri possunt, quas omisit Diophantus, libet hîc earum nonnullas subiicere, in quibus nobis non erit magnoperè cauendum, ne in regulas compositas æquatio deuoluatur, cùm illæ iam nobis sint familiares, dum per conditiones adiectas innotescat, an in numeris rationalibus solutio contingat.

QVAESTIO PRIMA.

Quæruntur duo numeri, vt summa quadratorum ab iis ortorum, & productus eorum multiplicatione sint quales poscimur. Oportet autem, siue addatur, siue adimatur, summæ quadratorum, duplum producti, fieri vtrimque quadratum.

4. secundi. Esto summa quadratorum 34. productum multiplicationis 15. si placet per redu-
4. 2. persp. ctionē ad alias quæstiones, ista varijs modis solui potest.[3] Quia enim summa quadratorum adscito duplo producti, æquatur quadrato summæ numerorum.[4] At summa quadratorum multata duplo producti, relinquit quadratum interualli numerorum; si ad 34. addas 30. fiet 64. quadratus summæ. Quare ipsa summa est 8. Item si à 34. auferas 30. remanet 4 quadratus interualli. Quare ipsum interuallum est 2. Iam ergo per quatuor quæstiones inueniri possunt quæsiti numeri. Primò per trigesimam quærendo duos numeros quorum summa 8. productum 15. Secundò per trigesimam primam quærendo duos numeros quorum summa 8. & summa quadratorum 34. Tertiò per trigesimam tertiam quærendo duos numeros, quorum interuallum 2. pro-

ductum

ductum 15. Quartò denique per primam quærendo duos numeros, quorum summa 8. interuallum 2.

Sed si peculiari operatione rem absoluere placeat. Ponatur interuallum quadratorum 2 N. erunt ipsi quadrati 17 – 1 N. & 17 + 1 N. quorum mutuo ductu fit 286 – 1 Q. æquale quadrato producti 15. nempe 225. Quare tandem 64. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 8. Ad positiones sunt quæsiti quadrati 25. & 9. quorum latera 5. & 3. sunt quæsiti numeri. Hinc etiam Canonem formare licet.

Quadratum semissis summæ quadratorum aufer à quadrato producti, residui latus additum & ademptum semissi summæ quadratorum, ipsos exhibebit quadratos.

QVAESTIO SECVNDA.

Inueniantur duo numeri, quorum interuallum, & summa quadratorum ab ipsis ortorum, sint quales poscimus. Oportet autem duplum summæ quadratorum multatum quadrato interualli, relinquere quadratum.

Esto Interuallum 6. summa quadratorum 68. si per reductionem, quæstionem propositam soluere libet.[a] Quia duplum summæ quadratorum, æquatur quadrato sum- 7.2.poris.
mæ numerorum, & quadrato interualli, à duplo ipsius 68. nempe à 136. aufer quadratum ipsius 6. nempe 36. remanet 100. cuius latus 10. est summa numerorum. Iam ergo soluetur quæstio per trigesimam primam, quærendo duos numeros quorum summa 10. & summa quadratorum 68. & rursus per primã quærendo duos numeros, quorum summa 10. interuallum 6. sed si peculiari est vtendum operatione, id ita fiet. Cùm interuallum præscribatur 6. Ponatur alter numerorum 3 + 1 N. alter 1 N – 3. fiet summa quadratorum 18 + 2 Q. æqualis 68. Quare fit 1 N. 5. & sunt quæsiti numeri 8. & 2. Hinc etiam Canon formatur.

Dimidium quadrati interualli aufer à summa quadratorum, residui semissis latus additum & ademptum semissi interualli quæsitos numeros exhibebit.

Qui sanè Canon prorsus conuenit cum sexta secundi porismatum, vt manifestum est.

QVAESTIO TERTIA.

Inueniantur duo numeri, quorum interuallum, & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum datos conficiant numeros. Oportet autem quadratum interualli numerorum minorem esse interuallo quadratorũ.

Sit interuallum numerorum 6. interuallum quadratorum 60. si libet vti reductione.[a] Quia ex interuallo numerorum in summam eorundem, fit interuallum qua- 3.2.poris.
dratorum, diuidendo 60. per 6. quotiens 10. erit summa numerorum. Igitur soluetur quæstio per trigesimam secundam quærendo duos numeros, quorum summa 10. interuallum quadratorum 60. Rursus soluetur per primam quærendo duos numeros quorum summa 10. interuallum 6. Sed si peculiarem requiras operationem. Pone minorem quæsitorum 1 N. ergo maior 1 N. + 6. interuallum quadratorum est 36 + 12 N. quod æquatur 60. & fit 1. N. 2. minor numerus. Vel, Pone maiorem 1 N. erit minor 1 N. – 6. Interuallum quadratorum est 12 N. – 36. quod æquatur 60. & fit 1 N. 8. maior numerus. Hinc formatur Canon.

Quadratum interualli numerorum adde & adime interuallo quadratorum, summam & residuum diuide per duplum interualli numerorum, prodibunt quæsiti numeri.

Aliter etiam esto minor 1 N – 3. maior 1 N + 3. fiet interuallum quadratorum 12

N. æquale 60. Quare fit 1 N. 5. & sunt numeri vt prius 2. & 8. Hinc etiam Canon alius formari potest.

Diuide interuallum quadratorum per duplum interualli numerorum, quotienti adde & adime semissem interualli numerorum: habebis quæsitos numeros.

QVAESTIO QVARTA.

Inueniantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione, & interuallum quadratorum ab ipsis orrorum, sint quales poscimur. Oportet autem quadratum dupli producti addirum quadrato interualli quadrarorum, efficere quadratum, cuius lateri siue addatur siue adimatur duplum producti, fiat quadratus.

Esto productus 15. interuallum quadratorum 16. Ponatur summa quadratorum
4. secundi. 1 N. Ergo si addatur ei duplum producti[1], fiet 1 N. + 30. æquale quadrato sum-
4. 2. poris. mæ numerorum: & si ab 1 N. auferatur idem duplum producti 30.[2] fiet 1 N. – 30. æ-
3. 2. poris. quale quadrato interualli numerorum. Porro[3] quia ex interuallo numerorum in summam ipsorum fit interuallum quadratorum, patet ex quadrato interualli numerorum in quadratum summæ, fieri quadratum interualli quadratorum. Quamobrem ex 1 N. – 30. in 1 N. + 30. productus 1 Q. – 900. æquatur quadrato ipsius 16. nempe 256. & fit 1 N. 34. summa quadratorum. Reducetur ergo iam quæstio ad primam istarum quærendo duos numeros, quorum productum 15. summa quadratorum 34. vel etiam ex summa quadratorum 34. & interuallo ipsorum 16. reperientur sigillatim ipsi quadrati 25. & 9. per primam huius libri, vnde & latera 5. 3. innotescent.

Aliter etiam, & facilius institui potest operatio, & alia quoque conditio præscribi. nimirum. Oportet quadratum producti additum quadrato semissis interualli quadratorum facere quadratum, cuius lateri siue addatur siue adimatur semissis interualli quadratorum, fiat item quadratus. Ponatur quadratorum alter 1 N. + 8. alter 1 N. – 8. Sic enim est eorum interuallum 16. Igitur cùm ex quadratorum mutuo ductu fiat quadratus plani sub lateribus, ex 1 N. + 8. in 1 N. – 8. fiet 1 Q. – 64. æquale quadrato producti 15. nempe 225. & fit 1 N. 17. suntque quadrati quæsiti 25. & 9. vnde & ipsa latera 5. & 3. noscuntur. Hinc elicietur huiusmodi Canon.

Quadratum producti adde quadrato semissis interualli quadratorum, summæ lateri adde & adime semissem interualli quadratorum, fient quadrati quæsitorum numerorum.

QVAESTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex producto multiplicarionis & ex summa quadratorum, datos conficiant numeros. Oporrer autem quadruplum agregati ex producto multiplicationis, & ex summa quadratorum multatum rriplo quadrati summæ, relinquere quadratum.

Esto summa 10. aggregatum ex producto & ex summa quadratorum 76. Esto alter numerorum 5 + 1 N. alter 5. – 1 N. erit summa quadratorum 50 + 2 Q. productum multiplicationis 25 – 1 Q. ergo aggregatum horum erit 75 + 1 Q. æquale 76. & fit 1 N. 1. sunt ergo quæsiti numeri 6. & 4. Hinc formatur iste Canon.

Ab aggregato ex summa quadratorũ & ex producto multiplicationis aufer, dodrantem quadrati summæ, residui latus additum & ademptum semissi summæ, quæsitos dabit numeros.

Vel quod idem est.

A quadruplo aggregati aufer triplum quadrati summæ, residui latus additum & ademptum ipsi summæ, præstabit duplum quæsitorum numerorum.

Quod si per reductionem velis hoc problema soluere. Quoniam quadratus summæ æquatur summæ quadratorum & duplo producti, si à quadrato summæ 100. auferas 76. compositum ex summa quadratorum & ex producto semel, residuum 24. æquabitur producto. Iam ergo tripliciter reducetur quæstio. Primo ad trigesimam quærendo duos numeros quorum summa 10. productum multiplicationis 24. secundo ad trigesimam primam quærendo duos numeros quorum summa 10. & summa quadratorum 52. nam cognito producto 24. cognoscitur & summa quadratorum auferendo 24 de 76. Tertio ad primam istarum quærendo duos numeros quorum productum 24. summa quadratorum 52. 4. *secundi.*

QVAESTIO SEXTA.

Dato aggregato ex summa quadratorum, & ex producto multiplicationis, datoque altero è duobus numeris, alterum inuenire. Oportet autem datum aggregatum multatum dodrante quadrati dati numeri, relinquere quadratum.

Esto datum aggregatum 124 alter numerorum 10. Ponatur compositum ex quæsito numero & ex semisse dati 1 N. ergo quæsitus 1 N. − 5. cuius quadratus est 1 Q. + 25 − 10 N. At alterius quadratus est 100. productum verò multiplicationis ipsorum est 10 N. − 50. Quæ omnia simul efficiunt 1 Q. + 75. æqualia 124. Quare fit 1 N. 7. ergo quæsitus numerus qui ponebatur 1 N. − 5. erit 2. Hinc elicietur huiusmodi Canon.

A dato aggregato aufer dodrantem quadrati dati numeri, à residui latere aufer semissem dati numeri, relinquetur quæsitus.

QVAESTIO SEPTIMA.

Inueniantur duo numeri, vt summa quadratorum, & compositum ex summa numerorum, & ex producto multiplicationis, datos conficiant numeros. Oportet autem duplum huius compositi vnitate auctum, additum summæ quadratorum, efficere quadratum, cui proximè minor quadratus, ablatus à duplo summæ quadratorum relinquat etiam quadratum.

Sit summa quadratorum 34. Compositum ex summa numerorum, & ex producto multiplicationis sit 23. Ponatur summa numerorum 1 N. ergo productum est 23 − 1 N. cuius duplum 46 − 2 N. quo addito summæ quadratorum 34. fit 80. − 2 N. æquale quadrato summæ 1 Q. & tandem 1 Q. + 2 N. æquantur 80, quæ est prima compositarum, & fit 1 N. 8. summa scilicet numerorum. Quare productum multiplicationis est 15. Itaque iam reducetur quæstio ad tres alias. Primò ad trigesimam quærendo duos numeros quorum summa 8. productum 15. secundò ad trigesimam primam quærendo duos numeros quorum summa 8. & summa quadratorum 34. tertiò ad primam istarum, quærendo duos numeros quorum productum 15. summa quadratorum 34. & omnibus modis inuenientur quæsiti numeri 3. & 5. Hinc fiet Canon. 4. *secundi.*

Summæ quadratorum adde duplum compositi ex summa numerorum & ex producto, vnitate auctum. Aggregati latus vnitate multatum, erit summa numerorum.

Porro hîc & in sequentibus per quadratum proximè minorem, intelligo illum cuius latus deficit vnitate à latere quadrati cuius fit mentio.

QVAESTIO OCTAVA.

Inueniantur duo numeri, vt productum multiplicationis eorum, &

compositum ex summa numerorũ,& ex summa quadratorum datos cõficiãt numeros. Oportet autem octuplum producti vnitate auctum, additum quadruplo compositi conficere quadratum, cui proximè minor quadratus multatus sedecuplo producti, relinquat quadratum.

Esto productum 6. Compositum ex summa numerorum & quadratorum 18. Ponatur summa numerorum 1 N. ergo summa quadratorum 18 – 1 N. cui addendo 12. duplum producti [1] fiet 30. – 1 N. æqualis quadrato summæ numero-
4. *secundi.* rum, puta 1 Q. Quare 1 Q. ⟶ 1 N. æquatur 30. & fit 1 N. 5. summa scilicet quæsitorum numerorum. Quamobrem summa quadratorum est 13. Itaque iam licet ad tres alias quæstionem hanc reuocare, sicut & præcedentem, nimirum ad trigesimam, trigesimam primam, & primam istarum. Inuenienturque quæsiti numeri 2. & 3. Hinc formatur huiusmodi Canon.

Quadruplo compositi adde octuplum producti vnitate auctum, aggregati latus vnitate multatum, erit duplum summæ numerorum.

QVAESTIO NONA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & compositum ex eorum interuallo, & ex summa quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem vt à dato composito auferendo semissem quadrati summæ, residui duplum vnitate auctum faciat quadtatum.

Esto summa 8. Compositũ ex interuallo numerorũ, & ex summa quadratorum 56. Ponatur minor 4 – 1 N. maior 4 ⟶ 1 N. horum interuallũ est 2 N. summa quadratorum 32 ⟶ 2 Q. Quare 32 ⟶ 2 N. ⟶ 2 Q. æquantur 56. & tandem 2 Q ⟶ 2 N. sunt æquales 24. vnde fit 1 N. 3. semissis interualli, ipsum ergo interuallum est 6. summa quadratorum 50. Itaque iam ad tres alias reuocabitur quæstio. Primò ad primam quærẽdo duos numeros, quorum summa 8. interuallum 6. Secundò ad trigesimam primam quærendo duos numeros, quorum summa 8. summa quadratorum 50. Tertiò ad secundam istarum quærendo duos numeros, quorum interuallum 6. summa quadratorum 50. & omnibus modis inuenientur quæsiti numeri 1 & 7. Hinc etiam elicitur facilis Canon.

Aufer à dato composito semissem quadrati summæ, residui duplo adde vnitatem, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum, erit interuallum numerorum.

QVAESTIO DECIMA.

Inuenire duos numeros vt interuallum ipsorum, & compositum ex summa numerorum, & ex summa quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt à dato composito auferendo semissem quadrati interualli, residui duplum vnitate auctum faciat quadratum.

Esto interuallum 6. compositum ex summis numerorum & quadratorum 58. Ponatur summa numerum 2 N. ergo summa quadratorum erit 58 – 2 N. ipsi verò numeri 1 N – 3. & 1 N. ⟶ 3. vt eorum interuallũ maneat 6. Fiet autem summa quadratorum 2 Q. ⟶ 18. sed iam erat 58 – 2 N. Igitur 58 – 2 N. æquuntur 2 Q. ⟶ 18. & tandem 2 Q. ⟶ 2 N. æquantur 40. & fit 1 N. 4. semissis summæ numerorũ. Est summa ergo numerorũ 8. & summa quadratorum 50. Quare rursus reuocabitur quæstio ad easdem tres ad quas præcedens reduci ostensa est, & inuenientur quæsiti numeri 1 & 7. fiet etiam Canon.

Aufer à dato composito semissem quadrati interualli, residui duplum vnitate auctum quadratus fiet, cuius latus vnitate multatum erit summa numerorum.

Non adiicitur hìc alia huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum, & compositum ex summa nu-

merorum & ex eorum interuallo datos conficiant numeros.

. Quia facilè citrà Algebram folui poteft. Sit enim fumma quadratorum 50. compofitum ex fumma numerorum, & ex eorum interuallo 14. Patet per Canonem primæ libri huius, vel per vigefimam tertiam primi porifm. 14. effe duplum maioris numeri. Quare ipfe maior numerus eft 7. cuius quadratum 49. fi auferas à 50. remanet 1. quadratus minoris.

QVAESTIO VNDECIMA.

Inuenire duos numeros quorum fumma, & aggregatum ex producto multiplicationis & ex interuallo ipforum datos côficiant numeros.

Oportet autem vt exceffus quadrati femiffis fummæ fuper aggregatum, vnitate auctus conficiat quadratum. Vel vt exceffus aggregati fuper quadratum femiffis fummæ, ab vnitate detractus, relinquat quadratum.

Efto primum fumma numerorum 16. aggregatum ex producto & interuallo 56. Ponatur interuallum 2 N. ergo productum erit 56 − 2 N. ipfi verò numeri 8 + 1 N. & 8 − 1 N. quorum productum fit 64 − 1 Q. æquale 56 − 2 N. & tandem 2 N. + 8. æquantur 1 Q. vnde fit 1 N. 4. femiffis interualli, ac proinde ipfum interuallum eft 8. productum 48. Itaque iam reducetur quæftio ad primam, cùm fumma fit 16. interuallum 8. vel ad trigefimam, cùm fumma fit 16. productum 48. vel ad trigefimam tertiam, cùm interuellum fit 8. productum 48. & inuenientur numeri 4. & 12. Deinde efto fumma $\frac{5}{6}$ aggregatum ex producto & interuallo $\frac{1}{3}$. Pofito vt prius interuallo 2 N. erit productum $\frac{1}{3}$ − 2 N. ipfi verò numeri $\frac{5}{12}$ + 1 N. & $\frac{5}{12}$ − 1 N. quorum productum fit $\frac{25}{144}$ − 1 Q. æquale $\frac{1}{3}$ − 2 N. & tandem 1 Q. + $\frac{23}{144}$ æquantur 2 N. & fit 1 N. $\frac{1}{12}$ femiffis interualli, ergo ipfum interuallum eft $\frac{1}{6}$. productum item $\frac{1}{6}$ & per quæftiones fuprà citatas reperientur quæfiti numeri $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$. Hinc fit ifte Canon.

Auferà quadrato femiſsis fummæ datum aggregatum, refiduum vnitate auctum eſt quadratus, cuius latus vnitate auctum eſt femiſsis interualli numerorum. Vel.

Auferà dato aggregato quadratum femiſsis fummæ, refiduum ab vnitate detractum relinquis quadratum, cuius latus detractum ab vnitate eſt femiſsis interualli numerorum.

QVAESTIO DVODECIMA.

Inuenite duos numeros, quorum interuallum, & aggregatum ex fumma, & ex producto ipforum, datos faciant numeros. Oportet autem vt quadrato femiffis interualli ad datum aggregatum vnitate auctum adiecto, fiat quadratus.

Efto interuallum 8. aggregatum ex fumma & producto 32. Ponatur fumma 2 N. ergo productum relinquetur 32 − 2 N. ipfi autem numeri erunt 1 N. + 4 & 1 N. − 4. quorum productum 1 Q. − 16. æquatur 32 − 2 N. & tandem 1 Q. + 2 N. æquatur 48. & fit 1 N. 6. femiffis fummæ. Ipfa ergo fumma eft 12. productum 20. Soluetur igitur quæftio per eafdem per quas fuperior, & inuenientur quæfiti numeri 2 & 10. & fiet Canon.

Quadrato femiſsis interualli adde datum aggregatum vnitate auctum, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum erit femiſsis fummæ numerorum.

Hîc etiam non fubiicitur huiufmodi quæftio.

Inuenire duos numeros, quorum productum, & aggregatum ex fumma ipforum & interuallo, datos conficiant numeros.

Etenim nullo negotio abfque Algebra foluitur. Efto productum 48. aggregatum

summæ & interualli 24. patet per Canonem primam vel vigesimam tertiam primi porism. 24. esse duplum maioris numeri. Est ergo maior 12. per quem si diuidas 48. fit minor 4.

QVAESTIO DECIMA TERTIA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex producto multiplicationis, & ex interuallo quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt à quintuplo quadrati semissis summæ auferendo datum aggregatum, supersit quadratus.

Esto summa 12. aggregatum ex producto & ex interuallo quadratorum 116. Ponatur minor 1 N. maior 12 – 1 N. interuallum quadratorum erit 144 – 24 N. productum verò 12 N. – 1 Q. quæ iuncta faciunt 144 – 12 N. – 1 Q. æqualia 116. & tandem 1 Q. + 12 N. æquantur 28. & fit 1 N. 2. minor numerus. Ergo maior est 10. Hinc formatur Canon.

A quintuplo quadrati semissis summa aufer datum aggregatum, remanebit quadratus cuius latus multatum semisse summæ, minorem exhibet numerum.

Hic videntur desiderari duæ quæstiones quibus quæruntur duo numeri dato producto, & aggregato ex summa numerorum, & ex interuallo quadratorum. Vel dato interuallo quadratorum & aggregato ex summa numerorum & ex producto. Sed quia resolui non possunt per regulas Algebræ perfectè Canonicas, quandoquidem incidunt in æquationes in quibus duæ species duabus speciebus æquales reperiuntur, non possunt hic commodè tractari. Qua de causa nonnullas etiam alias omisimus eiusdem naturæ.

QVAESTIO DECIMA QVARTA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex interuallis numerorum & quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem aggregatum interuallorum esse minus quadrato summæ aucto suo latere.

Esto summa 10. aggregatum interuallorum 44. Ponatur interuallũ Numerorum 2. N. erunt ipsi 5 – 1 N. & 5 + 1 N. quadratorum interuallum fiet 20. N. æquale 44 – 2 N. & fit 1 N. 2. semissis interualli, quare quæsiti numeri sunt 3. & 7. Hinc fit Canon.

Diuide aggregatum interuallorum per duplum summa binario auctum, orietur semissis interualli numerorum.

Reducitur ergo ad primam vel ad trigesimam secundam Diophanti, vel ad tertiam harum. Aliter ponatur alter numerorum 1 N. alter 10 – 1 N. fiet aggregatum interualli numerorum & quadratorum 110 – 22 N. vel 22 N. – 110. prout 1. N. nunc maior nunc minor statuetur. Igitur 110 – 22. N. æquantur 44. & fit 1 N. 3. minor numerus. Vel 22. N – 110. æquantur 44. & fit 1 N. 7. maior numerus. Hinc etiam fiet Canon.

Quadrato summæ suo latere aucto adde vel adime aggregatum interuallorum: summam, & residuum diuide per duplum summæ binario auctum, orientur quæsiti numeri.

QVAESTIO DECIMA QVINTA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum, & aggregatum ex summa ipsorum, & ex interuallo quadratorum, datos cõficiãt numeros.

Oportet autem datum aggregatum maius esse interualli quadrato aucto suo latere.

Esto interuallum 4. aggregatum ex summa numerorum, & ex interuallo quadratorum 50. Ponatur alter 1 N. alter 1 N + 4. fiet aggregatum ex summa numerorum & interuallo quadaatorum 10. N + 20 æquale 50. vnde fit 1 N. 3. minor numerus.

Quod si ponatur maior 1 N. minor 1 N. – 4. fient 10 N – 20 æqualia 50. vnde erit 1 N. 7. maior numerus. Hinc formatur Canon.

Dato aggregato adde vel adime interualli quadratum auctum suo latere, summam & residuum diuide per duplum interualli auctum binario, orientur quæsiti numeri.

Aliter etiam fiet operatio posita summa 2 N. & ipsis numeris 1 N – 5. & 1 N + 5. vt tibi considerandum relinquo. Hic quoque prætermitto quæstionem de inueniendis duobus numeris dato interuallo quadratorum, & aggregato ex summa & interuallo numerorum, nam soluitur absque Algebra.

QVAESTIO DECIMA SEXTA.

Inueniantur duo numeri, vt summa quadratorum, & aggregatum ex interuallo numerorum, & ex producto multiplicationis datos cõficiant numeros. Oportet autem vt si à summa quadratorum auferatur duplum dati aggregati vnitate multatum, remaneat quadratus.

Esto summa quadratorum 58. aggregatum interualli & producti 25. Ponatur interuallum 1 N. erit ergo productum 25 – 1 N. Sed à summa quadratorum 58. auferendo quadratum interualli 1 Q. [a] residuum 58 – 1 Q. duplum est producti. Ergo 58 – 1 Q. æquatur 50 – 2 N. & fit 1 N. 4. interuallum numerorum, productum ergo est 21. Itaque iam reducetur quæstio vel ad trigesimam tertiam Diophanti, vel ad primam, vel ad secundam harum, & inuenientur quæsiti numeri 3. & 7. 4. 2. porif.

Aduertendum autem fieri posse vt summa quadratorum sit minor duplo aggregati. Quo casu sic præscribenda erit conditio. Oportet vt summam quadratorum auferendo à duplo aggregati, residuum ab vnitate detractum, relinquat quadratum. Et pro vtroque casu Canon formabitur.

A summa quadratorum aufer duplum aggregati, residuum vnitate auctum quadratus erit, cuius latus vnitate auctum erit interuallum numerorum.

Vel in alio casu.

A duplo aggregati aufer summam quadratorum, residuum ab vnitate detractum relinquet quadratum, cuius latus ab vnitate detractum, erit interuallum numerorum.

QVAESTIO DECIMA SEPTIMA.

Inuenire duos numeros quorum interuallum, & aggregatum ex producto & ex summa quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt si ab aggregato auferatur quadratus semissis interualli, residui triens sit quadratus.

Esto interuallum 4. aggregatum ex producto & ex summa quadratorum 79. Per solam reductionem solui potest quæstio hac arte.[a] Quia summa quadratorum continet duplum producti & quadratum interualli, patet 79. continere ter productum & semel quadratum interualli. Quare si inde auferatur 16. quadratus interualli, residuum 63. erit triplum producti, erit ergo productum 21. summa quadratorum 58. Quare multis modis reducetur quæstio, vt manifestum est. Aliter ponatur summa Numerorum 2 N. ergo ipsi numeri sunt 1 N. – 2 & 1 N. + 2. aggregatum ex summa quadratorum & ex producto est 3 Q. + 4. æquale 79. vnde fit 1 N. 5. semissis summæ. Quare ipsa summa 10. ex qua & interuallo per primam huius libri noscuntur numeri 3. & 7. Canon. 4. 2. porif.

Aufer ab aggregato quadratum semissis interualli, residui triens est quadratus semissis summæ numerorum.

QVAESTIO DECIMA OCTAVA.

Inuenire duos numeros, vt productum multiplicationis & aggregatum ex interuallo ipsorum, & ex summa quadratorum datos confi-

Esto interuallum quadratorum 40. Aggregatum ex summa quadratorum, & ex producto 79. esto productum 1 N. ergo summa quadratorum 79 – 1 N. vnde auferendo duplum producti, [1] residuum 79 – 3 N. est quadratus interualli numerorum. *4. 2. poris.* Sed etiam si ad 79 addatur productum 1 N. [2] fit 79 + 1 N. quadratus summæ numerorum. *4. secundi.* [3] Igitur cùm ex summa numerorum in eorum interuallum fiat interuallum *3. 2. poris.* quadratorum, vtique ex quadrato summæ 79 + 1 N. in quadratum interualli 79 – 3 N. fiet 6241 – 158 N. – 3 Q. æquale quadrato interualli quadratorũ, nimirum 1600. & tandem 4641. æquantur 3 Q. + 158 N. & fit 1 N 21. productum. Quare per reductionem ad præcedentes regulas soluitur quæstio. Hinc fiet Canon.

Triplum excessus quadrati ab aggregato super quadratum ab interuallo, adde ipsi quadrato aggregati: à summæ latere aufer idem aggregatum, residui triens erit productum multiplicationis.

Alia quæstio qua quæruntur numeri dato producto, & aggregato ex summa & interuallo quadratorum facilis est, & soluitur absque algebra.

QVAESTIO VIGESIMA PRIMA.

Quæruntur duo numeri, vt aggregatum ex interuallis numerorum & quadratorum, itemque aggregatum ex summis numerorum & quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem siue aggregatum interuallorum addatur aggregato summarum, siue adimatur, duplum summæ & residui addita vnitate fieri vtrimque quadratum.

Esto aggregatum interuallorum 14. aggregatum summarum 26. Quoniam [4] igitur addendo interuallum numerorum summæ numerorum, fit duplum maioris numeri, & addendo interuallum quadratorum summæ quadratorum, fit duplum maioris quadrati, patet addito 14. ad 26. summam 40. continere bis maiorem numerum, & bis eius quadratum. Ergo 20. est maior numerus & eius quadratus. Ponatur maior numerus 1 N. erit eius quadratus 1 Q. Igitur 1 Q. + 1 N. æquatur 20. fitque 1 N. 4, maior numerus. Eadem ratione auferendo 14. de 26. residuum 12. est duplum minoris numeri & eius quadrati. Quare 6. est minor numerus & eius quadratus. Posito ergo minore numero 1 N. fiet 6. æqualis 1 Q. + 1 N. & erit 1 N. 2. minor numerus. Hinc formatur Canon. *23. 1. poris.*

Duplo summæ duorum aggregatorum, & duplo interualli ipsorum, adde seorsim vnitatem, fient duo quadrati, quorum latera vnitate multata, dupla manebunt quæsitorum numerorum.

QVAESTIO VIGESIMA SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt aggregatum ex summa ipsorum, & ex interuallo quadratorum, itemque aggregatum ex summa quadratorum, & ex interuallo numerorum datos faciant numeros. Oportet autem vt duplum summæ aggregatorum addita vnitate faciat quadratum. Et vt duplum interualli eorundem vel additum vnitati, vel detractum ab vnitate faciat quadratum.

Esto prius aggregatum 18. posterius 22. Patet ob rationem allatam in præcedente horum summam 40. esse duplum maioris numeri & quadrati ipsius. Quare vt suprà inuenietur maior numerus 4. Quia verò auferendo 18. de 22. superest 4. patet 4. esse duplum minoris quadrati minus duplo lateris. Quare posito minore numero 1 N. duplum minoris quadrati erit 4 + 2 N. Quare 2 + 1 N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 2.

Sed esto prius aggregatum 20 $\frac{2}{9}$. Posterius 19 $\frac{7}{9}$. Quia horum summa est quoque 40. erit 4 maior numerus vt prius. Sed quia prius aggregatum excedit posterius, erit horum interuallum $\frac{4}{9}$ duplum minoris numeri, minus duplo sui quadrati. Quare posito minore numero 1 N. fient $\frac{4}{9}$ + 2 Q. æqualia 2 N. vnde erit 1 N. $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$. Et vtrumque satisfacit proposito. Hinc fit Canon.

Duplum summæ aggregatorum vnitate auctum fit quadratus, cuius latus vnitate multatum est duplum maioris lateris, & duplum excessus posterioris aggregati super prius aggregatum, addita vnitate quadratus fit, cuius latus vnitate auctum est duplum minoris lateris. At duplum excessus prioris aggregati super posterius aggregatum, detractum ab vnitate quadratum relinquit, cuius latus additum & ademptum semißi vnitatis, vtroque modo exhibet duplum minoris numeri.

Sed & aduertendum est, si vnum aggregatum alteri sit æquale, tunc minorem numerum esse semper vnitatem vt facilè est demonstrare.

QVAESTIO VIGESIMA TERTIA.

Inuenire duos numeros vt productum ex interuallo numerorum in interuallum quadratorum, & productum ex summa numerorum in summam quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem duplum posterioris producti multatum priore producto, relinquere cubum, ira vt per eius latus diuidendo prius productum, oriatur quadratus.

Esto prius productum 32. posterius 272. Ponatur summa numerorum 1 N. Igitur
3. 2. porif. $\frac{272}{1N}$ est summa quadratorum, & quia ex summa numerorum in interuallum eorũdem ² fit interuallum quadratorum, quo rursus ducto in numerorum interuallum fit 32. erit $\frac{32}{1N}$ quadratus interualli numerorum, qui si auferatur à duplo summæ quadratorum,
7. 2. porif. nimirum à $\frac{544}{1N}$ ² residuum $\frac{512}{1N}$ æquatur quadrato summæ numerorum 1 Q. & omnia ducendo in 1 N. fiunt 512 æquales 1 C. & fit 1 N 8. summa numerorum, & 34. summa quadratorum, & 2. interuallum eorundem. Vnde facilè reperiuntur numeri 3. & 5. Hinc fit Canon.

Aufer prius productum à duplo posterioris, residuum est cubus summæ numerorum, per quam si diuidas prius productum, fit quadratus interualli numerorũ.

QVAESTIO VIGESIMA QVARTA.

Inuenire duos numeros vt productum ex summa numerorum in interuallum quadratorum, & productum ex summa quadratorum in interuallum numerorum, datos conficiant numeros. Oportet autem duplum posterioris producti multatum priore producto, relinquere cubum, ita vt per eius latus diuidendo prius productum, oriatur quadratus.

Esto prius productum 128. posterius 68. Ponatur interuallum numerorum 1 N. ergo summa quadratorum erit $\frac{68}{1N}$ & ob causam in præcedente allatam $\frac{128}{1N}$ erit quadratus summæ numerorum. Itaque si à duplo summæ quadratorum quod est $\frac{136}{1N}$ au-
7. 2. porif. feratur quadratus summæ numerorum nimirum $\frac{128}{1N}$ ² residuum $\frac{8}{1N}$ est quadratus interualli numerorum. Quare $\frac{8}{1N}$ æquatur 1 Q. & omnia in 1 N. fiunt 8. æquales 1 C. est ergo 1 N 2. interuallum numerorum, & summa quadratorum 34. & quadratus summæ numerorum 64. vnde licet variis modis quæstionem soluere, & inuenire quæsitos numeros 3. & 5. Hinc fit Canon.

Aufer prius productum à duplo posterioris, residuum est cubus interualli numerorum, itaque per eius latus diuidendo prius productum, oritur quadratus summæ numerorum.

QVÆSTIO XXXIV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας δεδο-

INVENIRE duos numeros, datam inter se rationem ha-

bentes, vt & summa quadratorum ab ipsis, ad summam ipsorum datam habeat rationem. Imperatum sit maiorem minoris esse triplum; summam autem quadratorum; summæ numerorum esse quincuplam. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. Superest vt summa quadratorum ab ipsis, summæ vtriusque sit quincupla. Cæterùm summa quadratorum ab ipsis ortorum fit 10 Q. summa verò ipsorum est 4 N. vnde constat 10 Q. quincuplos esse ad 4 N. Quamobrem 20 N. æquantur 10 Q. & fit 1 N. 2. Est igitur minor 2. maior 6. & quæstioni satisfaciunt.

μένον ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, τὴν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι πενταπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς^ο ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς^ων γ. λοιπόν ἐστι τὸ σύνθεμα [τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι πενταπλασίονα. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα] τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις ι. τὸ δὲ αὐτῶν σύνθεμα ςς^οι δ. ὥστε δυνάμεις ι πενταπλασίονές εἰσιν ςς^ων δ. ἀριθμοὶ ἄρα κ ἴσοι δυνάμεσι ι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο β. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ^ο β. ὁ δὲ μείζων μ^ο ς. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXXIV.

CIRCA hanc quæstionem & octo sequentes nulla est difficultas, nec ampliori indigent explicatione. Canones etiam pro qualibet formari nullo negotio possunt, quod tibi relinquo peragendum.

QVÆSTIO XXXV.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt summa quadratorum ab ipsis ortorum, ad interuallum ipsorum datam habeat rationem. Iniunctum sit maiorem minoris triplum esse; summam autem quadratorum ab ipsis ortorum, interualli ipsorum esse decuplam. Ponatur minor 1 N. Maior ergo erit 3 N. Cæterũ volo summam quadratorum ab ipsis, interualli ipsorum esse decuplam. Sed summa quadratorum ab ipsis facit 10 Q. Interuallum autem ipsorum 2 N. Igitur 10 Q. decupli sunt ad 2

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάττονος εἶναι τριπλασίονα, τὸ δὲ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δεκαπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς^ο α. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς γ. λοιπὸν θέλω τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δεκαπλασίονα. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις ι. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς^οι β. δυνάμεις ἄρα ι δεκαπλάσιοί εἰσιν ςς^ων β.

ἀλλὰ καὶ ςς^οὶ κ̄ δεκαπλάσιοί εἰσιν ςς β̄. [ἀριθμοὶ ἄρα κ̄ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι ῑ.] καὶ πάντα παρὰ ἀριθμόν. ςς^οὶ ἄρα ῑ ἴσοι μονάσιν κ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο β̄. καὶ ἔσται πάλιν ὁ ἐλάσσων μ^ο β̄. ὁ δὲ μείζων μ^ο ϛ̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

N. sed & 20 N. decupli sunt ad 2 N. Igitur 20 N. æquales sunt 10 Q. & omnia per numerum diuidantur, fiunt 10 N. æquales 20. & fit 1 N. 2. & est rursus minor 2. maior 6. & satisfaciunt proposito.

QVÆSTIO XXXVI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ δοθέντι ὅπως καὶ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς ἀμφοτέρων λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάττονος εἶναι τριπλασίονα. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς^ου ἑνός, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς γ̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶ δυνάμεις η̄. συναμφότερος δὲ ςς δ̄. δυνάμεις ἄρα η̄. ἑξαπλασίονές εἰσι ςς δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̄. ἴσοι εἰσὶν δυνάμεσιν η̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο γ. [καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ^ο γ. ὁ δὲ μείζων μ^ο θ̄.] καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, ad summam ipsorum datam habeat rationem. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum. Interuallum autem quadratorum ab ipsis summæ ipsorum esse sescuplum. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. Superest vt & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum summæ vtriusque sit sescuplum. Sed interuallum quadratorum ab ipsis est 8 Q. summa autem numerorum ipsorum est 4 N. Igitur 8 Q. sescupli sunt ad 4 N. Quamobrem 24 N. æquantur 8 Q. & fit 1 N. 3. & est minor quidem 3. Maior verò 9. & satisfaciunt quæstioni.

QVÆSTIO XXXVII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετρα-

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt etiam interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, ad interuallum ipsorum datam habeat rationem. Imperatum sit maiorem minoris esse triplum, interuallum autem quadratorum, in-

terualli numerorum esse duodecuplum. Ponatur rursus minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. superest vt & interuallum quadratorum, interualli numerorum sit duodecuplum. Sed interuallum quadratorum est 8 Q. Hoc ergo duodecuplum est ad 2 N. Quamobrem 24 N. æquantur 8 Q. & fit rursus 1 N. 3. & demonstratio est manifesta.

Similiter hac ipsa ratione inuenientur duo numeri datam ad inuicem rationem habentes, vt productus ex eorum multiplicatione ad summam ipsorum datam habeat rationem. Et rursus duo numeri datam inter se rationem habentes, vt productus ex eorum multiplicatione ad ipsorum interuallum datam habeat rationem.

γώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δωδεκαπλασίονα. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ςοῦ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς̄ γ̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δωδεκαπλασίονα. ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶ δυνάμεις η̄. αὗται ἄρα δωδεκαπλασίονές εἰσιν ςς̄ β̄. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̄ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι η̄. καὶ γίνεται πάλιν ὁ ςος μο γ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

Ὁμοίως δὲ διὰ τῶν αὐτῶν εὑρεθήσονται καὶ ἀριθμοὶ δύο πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχειν δεδομένον. καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχειν δεδομένον.

QVÆSTIO XXXVIII.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus à minore ortus ad maiorem datam habeat rationem. Iniunctum sit maiorem minoris esse triplum; quadratum autem minoris, esse maioris sesquplum. Ponatur rursus minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. superest vt & quadratus à minore ortus, sit maioris sescuplus. Sed quadratus minoris est 1 Q. Igitur 1 Q.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος, πρὸς τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τοῦ ἐλάττονος τριπλασίονα, τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τοῦ μείζονος εἶναι ἑξαπλασίονα. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ςοῦ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ςς̄ γ̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος, εἶναι τοῦ μείζονος ἑξαπλασίονα. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονός ἐστι δυνάμεως μιᾶς. δύναμις ἄρα μία

ἑξαπλασίων ἐστὶν ἀριθμῶν ζ. ἀριθμοὶ ἄρα ιη ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ιη. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο ιη. ὁ δὲ μείζων μο νδ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

sescuplus est ad 3 N. Quamobrem 18 N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 18. Erit ergo minor 18. Maior 54. & hi satisfaciunt quæstioni.

QVÆSTIO XXXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς αὐτὸν τὸν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτοῦ τοῦ ἐλάσσονος ἑξαπλασίονα. ἔστω ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ςς γ. ὁ δὲ ἐλάσσων ς ἑνός, καὶ μένει ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος τριπλασίων. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτοῦ τοῦ ἐλάσσονος εἶναι ἑξαπλασίονα. δύναμις ἄρα μία ἑξαπλασίων ἐστὶ ἀριθμοῦ ἑνός. ἀριθμοὶ ἄρα ς. ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ς. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο ς. ὁ δὲ μείζων μο ιη. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus minoris ad ipsum minorem datam habeat rationem. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum; Minoris autem quadratum ipsius minoris esse sescuplum. Esto similiter maior 3 N. minor 1 N. & manet maior minoris triplus. Restat vt minoris quadratus, ipsius minoris fit sescuplus. Quamobrem 1 Q. sescuplus est ad 1 N. Proinde 6. N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 6. erit igitur minor 6. Maior 18. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XL.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα. τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον συναμφοτέρου εἶναι διπλασίονα. ἔστω πά-

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus minoris ad summam vtriusque datam habeat rationem. Statutum sit maiorem minoris esse triplum; quadratum verò minoris summæ vtriusque esse duplum. Esto rur-

sus Maior 3 N. minor 1 N. Superest vt quadratus à minore ortus, summæ vtriusque sit duplus, sed quadratus minoris est 1 Q. summa verò vtriusque 4 N. Igitur 1 Q. duplus est ad 4 N. Quamobrem 8 N. æquales sunt 1 Q. & fit 1 N. 8. Erit igitur minor 8. maior 24. Et satisfaciunt quæstioni.

λιν ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ςς̅ γ̅. ὁ δὲ ἐλάσσων ς̅ ἑνός. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον συναμφοτέρου εἶναι διπλασίονα. ἀλλ᾽ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος ἐστὶ δυνάμεως μιᾶς, συναμφότεροι δὲ ςς̅ δ̅. δύναμις ἄρα μία διπλασίων ἐστὶ ςς̅ δ̅. ἀριθμοὶ ἄρα η̅. ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̅ η̅. καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ̅ η̅. ὁ δὲ μείζων μ̅ κδ̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

QVÆSTIO XLI.

INVENIRE duos numeros in ratione data, vt quadratus minoris ad ipsorum interuallum datam habeat rationem. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum. Quadratum autem minoris interualli ipsorum esse sescuplum. Esto rursus maior 3 N. minor verò 1 N. Superest vt quadratus minoris interualli ipsorum sit sescuplus. Igitur 1 Q. sescuplus est ad 2 N. Quamobrem 12 N. æquales sunt 1 Q. vnde fit 1 N. 12. Erit ergo minor 12. maior 36. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα. τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ἑξαπλασίονα. ἔστω πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ςς̅ γ̅. ὁ δὲ ἐλάσσων ς̅ ἑνός. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι ἑξαπλασίονα. δύναμις ἄρα μία, ἑξαπλασίων ἐστὶ ςς̅ β̅. [ἀριθμοὶ ἄρα ιβ̅] ἴσοι εἰσὶ δυνάμει μιᾷ ὁ ἄρα ἀριθμὸς ἔσται μ̅ ιβ̅. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων ιβ̅. ὁ δὲ μείζων μ̅ λς̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

QVÆSTIO XLII.

SIMILITER ob hæc eadem, inuenientur duo numeri in data ratione, ita vt

ΟΜΟΙΩΣ δὲ διὰ τὰ αὐτὰ εὑρεθήσονται ἀριθμοὶ δύο ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ

μείζονος τετράγωνος πρὸς τὸν ἐλάσσονα, λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος πρὸς αὐτὸν τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ ὁμοίως δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ ἔτι δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι, ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

maioris quadratus ad minorem datam habeat rationem. Et rursus duo numeri in data ratione, vt quadratus maioris ad ipsum maiorem datam habeat rationem. Et similiter duo numeri in data ratione, vt maioris quadratus ad summam vtriusque datam habeat rationem. Et adhuc duo numeri in ratione data, vt & maioris quadratus ad interuallum ipsorum datam habeat rationem.

QVÆSTIO XLIII.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς, προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως τῶν τριῶν ἐκκειμένων σὺν δύο συντεθέντες καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες. ποιῶσι τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ ὅ τε τρία καὶ ὁ πέντε, καὶ δέον ἔστω προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως σὺν δύο συντεθέντες, καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. ἔστω ὁ ζητούμενος ς° ἑνός, καὶ ἐὰν μὲν συντεθῇ μετὰ μ° ε̅. γίνεται ς° εἷς μ° ε̅. ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λοιπὸν τουτέστι τὸν γ̅. γίνονται ςς° τρεῖς μ° ιε̅. πάλιν ἐὰν ς° εἷς συντεθῇ μετὰ μ° γ̅. γίνεται ς° εἷς μ° γ̅. ἐὰν δὲ [πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λοιπὸν τουτέστι τὸν] ε̅. γίνονται ςς° ε̅ μ° ιε̅. καὶ ἔτι ἐὰν μ° ε̅. συντεθῶσι μετὰ μ° γ̅. καὶ αἱ γινόμεναι μ° η̅. πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ς° ἑνί, γίνονται ς° η̅. ἐπ

DVOBVS datis numeris, alium numerum inuenire, vt ex his tribus bini quique coniuncti, & in reliquum multiplicati, producant tres numeros æqualibus se incrementis superantes. Sint duo dati numeri 3. & 5. & oporteat inuenire alium numerum, vt bini coniuncti, & in reliquum multiplicati producant tres numeros, quorum æqualia sint interualla. Esto quæsitus 1 N. & si adiiciatur ad 5. fit 1 N. + 5. Quod si multiplicetur in reliquum, nimirum in 3. fit 3 N. + 15. Rursus si 1 N. addatur ad 3. fit 1 N. + 3. quod si multiplicetur in reliquum, puta in 5. fit 5 N. + 15. Denique si 3. & 5. coniungantur, & qui conficitur 8. ducatur in 1 N. fiunt 8 N. Enim-

uerò 3 N. + 15. non esse trium productorum maximum liquet, maior enim illo est 5 N. + 15. Ergo 3 N. + 15. aut minimus est, aut medius. At 5 N. + 15. aut maximus est, aut medius. Denique 8 N. & maximus, & medius, & minimus esse potest, eo quod ignotum sit quantum valeat 1 N. Ponatur ergo primò maximus 5 N. + 15. minimus 3 N. + 15. medius subinde 8 N. Iam si tres numeri æqualibus se superent interuallis, maximus & minimus coniuncti, duplum sunt medij. Maximus autem & minimus faciunt 8 N. + 30. Hoc ergo æquale est 16 N. & fit 1 N. $\frac{15}{4}$. Tantus est quæsitus, & satisfacit postulatis.

Iam verò sit maximus quidem 5 N. + 15. sed medius 3 N. + 15. minimus verò 8 N. Atqui si tres numeri æqualibus se superent interuallis, quanto maximus medium superat, tanto medius superat minimum. Sed excessus maximi supra medium est 2 N. Medij autem supra minimum excessus est 15 − 5 N. Igitur 15 − 5 N. æquantur 2 N. & fit 1 N. $\frac{15}{7}$. Tantus est quæsitus, & quæstioni satisfacit. Denique maximus esto 8 N. medius autem 5 N. + 15. minimus 3 N. + 15. Quandoquidē rursus maximus

μὲν οὖν οὐδέποτε ἔσται μέγιστος ὁ τῶν ςς γ. μ° ιε φανερόν. μείζων γὰρ αὐτοῦ ἐστὶν ὁ τῶν ἀριθμῶν ε μ° ιε. ὁ ἄρα ςς γ. μ° ιε. ἤτοι μέσος ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ὁ δὲ τῶν ςς ε μ° ιε. ἤτοι μέγιστός ἐστιν, ἢ μέσος. ὁ δὲ τῶν ςς η. καὶ μέγιστος, καὶ μέσος, καὶ ἐλάχιστος δύναται τυγχάνειν τῷ ἄδηλον εἶναι τὴν τοῦ ς ὑπόστασιν. τετάχθω οὖν πρότερον μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςς ε μ° ιε. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ςς γ μ° ιε. μέσος δὲ δηλονότι ὁ τῶν ςς η. ἐὰν δὲ ὦσιν ἀριθμοὶ τρεῖς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου, καὶ ἔστιν ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος ςςοὶ η μονάδες λ. ταῦτα ἴσα ςςοῖς ις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δεκαπέντε τετάρτων μονάδος. τοσούτων ἔσται ὁ ζητούμενος. καὶ ποιῶν τὰ τῆς προτάσεως.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςς ε μ° ιε. μέσος δὲ ὁ τῶν ςς γ μ° ιε. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ςς η. ἐὰν δὲ ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ᾧ ὑπερέχει ὁ μέγιστος τοῦ μέσου, τούτῳ [ὑπερέχει ὁ μέσος τοῦ ἐλαχίστου] ὑπερέχει δὲ ὁ μὲν μέγιστος τοῦ μέσου ἀριθμοῖς β. ὁ δὲ μέσος τοῦ ἐλαχίστου μονάδας ιε λεῖψει ςς ε. μονάδες ἄρα ιε λεῖψει ςς ε. ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιε ἑβδόμων. τοσούτων ἔσται ὁ ζητούμενος, καὶ ποιῶν τὸ πρόβλημα. Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςς η. μέσος δὲ ὁ τῶν ςς ε μ° ιε. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ἀριθμῶν γ μονάδων ιε. ἐπεὶ οὖν πάλιν ὁ μέγιστος

καὶ ἐλάχιστος διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου. ἀλλὰ ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος εἰσὶν ςς^οἱ ια μονάδες ιε. ταῦτα διπλάσια εἰσὶ τοῦ μέσου. ὁ δὲ μέσος ἐστὶ ςς ε μ° ιε. ςς^οἱ ἄρα ι μ° λ. ἴσοι εἰσὶν ςς^οῖς ια μονάσι ιε. ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος μ° ιε. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

& minimus duplum medij conficiunt, sed maximus & minimus faciunt 11 N. + 15. hoc duplum est medij; medius autem est 5 N. + 15. Igitur 10 N. + 30. æquantur 11 N. + 15. Erit ergo quæsitus numerus 15. & implet postulata.

IN QVAESTIONEM XLIII.

QVOD hic assumit Diophantus. Si tres numeri fuerunt in arithmetica medietate, summa extremorum est æqualis duplo medij, demonstratum est propositione quinta libri primi porismatum.

Cæterùm ex triplici operatione, triplex Canon formari potest, nimirum.

Diuide duplum producti multiplicationis datorum numerorum, per summam eorundem, orietur tertius quæsitus. vel.

Diuide productum multiplicationis per compositum ex maiore numero & internallo numerorum, orietur tertius quæsitus. vel denique.

Diuide productum multiplicationis per id quo duplum minoris numeri excedit maiorem, orietur tertius quæsitus.

Ex hoc autem vltimo Canone manifestum est requiri vt duplum minoris numeri excedat maiorem. Nec tertia operatio Diophanti absque tali limitatione locum habere potest.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ
ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ Β.

DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBER SECVNDVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE duos numeros, vt summa ipsorum, ad summam quadratorum ab ipsis ortorum datam habeat rationem. Imperatũ ſit ſummam ipſorum ſummæ quadratorum ab ipſis ortorum eſſe decimam partem. Ponatur minor 1 N. maior autem 2 N. fit ſumma ipſorum 3 N. Summa verò quadratorum ab ipſis ortorum eſt 5 Q. Oportet igitur 3 N. eſſe decimam partem de 5 Q. Quare 30 N. ſunt æquales 5 Q. & fit 1 N. 6. Eſt ergo minor 6. maior 12. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν πρὸς τὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν σύνθεσιν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν σύνθεσιν αὐτῶν τῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν συνθέσεως εἶναι μέρος δέκατον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς^{ος} ἑνός. ὁ δὲ μείζων ςς^{οι} β̄. γίνεται ἡ μὲν σύνθεσις αὐτῶν ςς^{οι} γ̄. ἡ δὲ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, δυνάμεις ε̄. καὶ δέησει ἄρα ἀριθμοὺς γ̄. δέκατον μέρος εἶναι δυνάμεων ε̄. ἀριθμοὶ ἄρα λ̄. ἴσοι δυνάμεσι ε̄. καὶ γίνεται ὁ ς^{ος} μ^{ο} ς̄. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων μ^{ο} ς̄. ὁ δὲ μείζων μ^{ο} ιβ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN II. LIBRVM DIOPHANTI COMMENTARII.

IAM animaduerterunt & Scholiaſtes & Xilander quatuor quæſtiones initio libri huius expoſitas, cum quatuor priore libro traditis, in omnibus ferè conuenire, nimirum primam & ſecundam huius cum trigeſimaquarta & trigeſimaſeptima primi. At quartam & quintam huius cum trigeſimaquinta & trigeſima-

sexta illius. Nec in alio differunt hæ quæstiones ab illis, nisi quod istæ vniuersalius proponuntur, in illis verò numerorum quæsitorum ratio præscribitur, sed operandi modus idem est. Itaq; vt quod sentio, liberè dicam, vix adducor vt credam hæc scripsisse Diophantum, & in re facili tam inani vsum esse repetitione. Iudicent alij.

QVÆSTIO II.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχῆς εἶναι μέρος ἕκτον. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς ἑνός, ὁ δὲ μείζων ςς β. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ἀριθμὸς εἷς, ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴ δυνάμεις γ. δεήσει ἄρα ς ἕνα ἕκτον μέρος εἶναι δυνάμεων γ. ςς ἄρα ς ἴσοι δυνάμεσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ς μ β. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδες β. ὁ δὲ μείζων μ δ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt interuallum ipsorum, ad interuallum quadratorum ab ipsis ortorum datam habeat rationem. Constitutum sit interuallum ipsorum; interualli quadratorum ab ipsis, esse sextantem. Ponatur minor 1 N. maior autem 2 N. & fit interuallum ipsorum 1 N. At interuallum quadratorum ab ipsis ortorum est 3 Q. Oportet igitur 1 N. sextantem esse de 3 Q. Quamobrem 6 N. æquantur 3 Q. & fit 1 N. 2. Est ergo minor 2. maior 4. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO III.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἵνα ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς συναμφότερον ἢ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ πρότερον τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τοῦ συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι, ς εἷς, καὶ ςς β. δύνανται δὲ οὗτοι προβάλλεσθαι καὶ ἐν λόγῳ δοθέντι. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν δυνάμεις β. ὁ δὲ συναμφότερος ςς γ. δεήσει ἄρα δυνάμεις β ἑξαπλασίους εἶναι ςς γ. ἀριθμοὶ ἄρα ιη ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι δυσί. καὶ γίνεται ὁ ς μ θ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ θ. ὁ δὲ δεύτερος

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione ad summam vtriusque, vel ad interuallum ipsorum datam habeat rationem. Constitutum sit primò productum multiplicationis, summæ sesculplum esse. Ponantur quæsiti numeri 1 N. & 2 N. (Cæterùm possent etiam in qualibet data ratione poni.) Erit igitur productus ex eorum multiplicatione 2 Q. summa verò vtriusq; 3 N. Oportet ergo 2 Q. sesculplos esse ad 3 N. Proinde 18 N. æquantur 2 Q. & fit 1 N. 9. Erit ergo primus 9. secundus

18. & soluunt quæstionem.

Quod si imperatum sit productum multiplicationis interualli esse sescuplum. Erit rursus productum multiplicationis 2 Q. At interuallum 1 N. Proinde rursus 6 N. æquabuntur 2 Q. & fiet 1 N. 3. Erit ergo primus 3. secundus 6. & satisfaciunt quæstioni.

μ° ιη̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

Ἐὰν δὲ ἐπιταχθῇ τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὑπεροχῆς εἶναι ἑξαπλασίονα. ἔσται πάλιν ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δυνάμεις β̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμὸς εἷς, ἀριθμοὶ πάλιν ϛ̄. ἴσοι δυνάμεσι δυσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° γ̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° γ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ° ϛ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM III.

Hæc quæstio cùm nulla primi libri conuenit, quicquid dicat Scholiastes, qui eam reuocat ad trigesimam & trigesimamtertiam. Sed quàm meritò, sola collatione fiet manifestum. Cæterùm sicut hîc Diophantus comparat productum ex multiplicatione duorum numerorum, cum eorum summa, & cum eorum interuallo, sic & idem productum comparari potest interuallo quadratorum, & summæ eorundem. vnde duæ huiusmodi formabuntur quæstiones.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum ad productum multiplicationis datam habeat rationem. Oportet autem vt à quadrato semissis denominatoris rationis, auferendo vnitatem supersit quadratus.

Esto summa quadratorum ad productum vt 5. ad 2. Ponatur alter numerorum 1 N. alter 1. erit summa quadratorum 1 Q. + 1. productum 1 N. Quare 1 Q. + 1. æquatur $\frac{5}{2}$ N. & fit 1 N. vel 2. vel $\frac{1}{2}$. Itaque duo quilibet numeri in ratione dupla satisfacient proposito. Hinc fit Canon.

A quadrato semissis denominatoris rationis datæ, aufer vnitatem, residui latus adde vel adime eidem semissi, orietur vtroque modo denominator rationis, in qua duo quilibet sumpti numeri soluunt quæstionem.

Cæterùm notatu dignum est summam quadratorum ad productum, eandem semper habere rationem, quam habet ad vnitatem summa quotientum qui fiunt ex mutua laterum diuisione. Quod etiam sic ostendetur. Sint latera A B. quorum quadrati E F, productum G. & diuiso A & B. sit quotiens C. diuisoque B per A sit quotiens D. Dico ambos E F. simul ad G. esse sicut ambos C D simul ad vnitatem. Etenim quia ducto D in A. & producto B in B fit F, [1] idem F. fiet ducto A in B, & producto G in D. Eodem argumento ostendemus E fieri ex G in C. Cùm ergo G ductus in singulos C D producat singulos E F. patet ex summa ipsorum C D. in G fieri summam ipsorum E F. Quare ex definitione multiplicationis est summa ipsorum E F ad G. sicut summa ipsorum C D ad vnitatem. Quod demonstrandum erat.

A 2. B. 6.
C $\frac{1}{3}$. D 3.
E 4. F 36.
G 12.

[1] 3.1. porism.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt interuallum quadratorum ad productum multiplicationis datam habeat rationem. Oportet autem vt quadrato semissis denominatoris rationis datæ addendo vnitatem, fiat quadratus.

Esto interuallum quadratorum ad productum, vt 8. ad 3. Ponatur alter Numerorum 1 N. alter 1. erit interuallum quadratorum 1 Q. − 1. At productum 1 N. Quare 1 Q. æquabitur 1 + $\frac{8}{3}$ N. & fiet 1 N. 3. vel si 1 N. supponatur minor quam 1. erit interuallum quadratorum 1 − 1 Q. Quare 1. æquabitur 1 Q. + $\frac{8}{3}$ N. & fiet 1 N. $\frac{1}{3}$ Quare manifestum est quoslibet numeros in proportione tripla soluere quæstionem, hinc fiet Canon.

Quadrato semißis denominatoris rationе datæ adde vnitatem, lateri summæ adde vel adime eundem semissem, vtroque modo innotescet denominator rationis, in qua duo quilibet numeri sumpti satisfacient proposito.

Hîc etiam accidit interuallum quadratorum ad productum multiplicationis eandem habere rationem, quam habet ad vnitatem interuallum quotientum qui fiunt ex mutua laterum diuisione. Quod ex demonstratis in præcedente, manifestè colligitur.

QVÆSTIO IV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς εἶναι δεκαπλασίονα. τετάχθω πάλιν πρῶτος μὲν ς^ος^ ἑνός, ὁ δὲ [δεύτερος] ςς^οι^ β. ἔσται ἄρα ὁ μὲν συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυνάμεις ε. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ς^ος^ εἷς. δεκάκις ἄρα δυνάμεις ε δεκαπλασίονας εἶναι ς^ου^ ἑνός. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ι. καὶ γίνεται ὁ ς^ος^ μ^ο^ β. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^ο^ β. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο^ δ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros vt compositus ex quadratis ipsorum ad ipsorum numerorum interuallum, datam habeat rationem. Constitutum esto compositum ex quadratis ipsorum interualli esse decuplum. Ponatur rursus primus 1 N. secundus 2 N. erit igitur compositus ex quadratis ipsorum 5 Q. interuallum autem ipsorum est 1 N. Oportet ergo 5 Q. decuplos esse ad 1 N. Proinde 5 Q. æquantur 10 N. & fit 1 N. 2. erit ergo primus 2. secundus 4. & satisfaciunt quæstioni.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. Καὶ πάλιν τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι, ὃς μὲν ς^ος^ ἑνός, ὃς δὲ ςς^οι^ β. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυνάμεις γ. συναμφότερος δὲ

INVENIRE duos numeros, vt interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, ad summam ipsorum numerorum, datam habeat rationem. Imperetur vt interuallum quadratorum, summæ numerorum sit sescuplum. Ponantur rursus quæsiti numeri, hic quidem 1 N. ille verò 2 N. & fit interuallum quadratorum ab ipsis ortorum 3 Q. summa verò numerorum

3 N. Proinde 3 Q. æquantur 18 N. & fit 1 N. 6. & euidens est demonstratio.

ϛϛ^{οι} γ̄. δέησει ἄρα δυνάμεις γ̄. ἑξαπλασίονας εἶναι ϛϛ γ. δυνάμεις ἄρα τρεῖς ἴσαι εἰσὶ ἀριθμοῖς ιη̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ^{ος} μ^{ο} ϛ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

QVÆSTIO VI.

INVENIRE duos numeros, dato eorum interuallo, vt interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, interuallum ipsorum superet dato numero. Oportet autem quadratum interualli numerorum minorem esse composito tum ex ipsomet interuallo, tum ex dato numero quo quadratorum interuallum superat ipsum numerorum interuallum. Imperetur vt interuallum numerorum sit 2. Interuallum autem quadratorum superet interuallum numerorum vnitatibus 20. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 1 N. + 2. & manet interuallum ipsorum 2. interuallum autem quadratorum est 4 N. + 4. Oportet igitur 4 N. + 4. superare vnitates 2. vnitatibus 20. Quamobrem 4 N. + 4. æquantur 22. & fit 1 N. $4\frac{1}{2}$. Erit igitur minor $4\frac{1}{2}$. maior $6\frac{1}{2}$. & soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ δοθείσῃ, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχῃ δοθέντι ἀριθμῷ. δεῖ δὴ τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι συναμφοτέρου αὐτοῦ τε τοῦ τῆς ὑπεροχῆς, καὶ τοῦ διδομένου τῶν ἀπ' αὐτῶν πρὸς τὴν αὐτῶν ὑπεροχήν. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μονάδων β̄. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχειν μονάδας κ̄. τετάχθω δὴ ὁ ἐλάσσων ϛ^{ου} ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ^{ου} ἑνὸς μ^{ο} β̄. καὶ μένει ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν μονάδες β̄. ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴ ϛϛ^{οι} δ̄ μ^{ο} δ̄. δέησει ἄρα ἀριθμοὺς δ̄ μ^{ο} δ̄. ὑπερέχειν μονάδων β̄ μονάσιν κ̄. ὥστε ἀριθμοὶ δ̄ μονάδες δ̄ ἴσοι εἰσὶ μονάσιν κβ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ^{ος} μ^{ο} δ̄ καὶ ἥμισυ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ^{ο} δ̄ καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μείζων ϛ̄ καὶ ἥμισυ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM VI.

HÆC quæstio verbis paulum immutatis eadem est cum tertia illarum, quas ad trigesimam tertiam primi sumus commenti. Nam verbi gratia quærere duos numeros quorum interuallum sit 2. & interuallum quadratorum superet ipsum 2. numero 20. nil aliud est quàm velle vt interuallum numerorum sit 2. interuallum verò quadratorum 22. Itaque conditio ibi apposita eadem est cum illa quam hic præscribit Diophantus, nimirum. *Quadratus interualli numerorum debet esse minor interuallo quadratorum*, cuius Theorematis si quis peculiarem requirat demonstrationẽ, eam afferre non pigebit. Sint dati numeri A B. B C. quorum interuallum A D. ita vt D B,

B C. sint æquales. Dico quadratum ipsius A D minorem esse interuallo quadratorum ab ipsis A B. B C. etenim [4] Quadratus A B est æqualis quadratis partium A D. D B, & duplo plani sub ipsis. Igitur interuallum quo quadratus ab A B superat quadratum abs D B seu abs B C. est æquale quadrato ipsius A D. & duplo producti ex A D. in D B. Quare interuallum quadratorum superat quadratum interualli numerorum, duplo producti ex minore numero in ipsum interuallum numerorum. Quod erat propositum. Sic contra si interuallo quadratorum addatur quadratus interualli numerorum, fiet duplum producti ex maiore numero in idem interuallum numerorum. Nam si quadrato ipsius A D. & duplo producti ex A D in D B. addatur rursus quadratus ipsius A D. erit totum compositum æquale duplo quadrati ex A D, & duplo producti ex A D in D B, hoc est duplo producti ex A B. maiore numero in A D interuallum numerorum. Quod erat propositum. Quamuis itaque Canones allati ad tertiam illarum quas attulimus ad trigesimam tertiam primi, sint faciles & expediti, ex hoc tamen Theoremate alium colligemus Canonem, sane non inelegantem.

4. secundi.

A . . D . . . B . . C

Interuallo quadratorum adde vel adime quadratum interualli numerorum, summam & residuum diuide per interuallum numerorum, quotientes erunt dupli quæsitorum numerorum.

QVÆSTIO VII.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν δοθέντι ἀριθμῷ μείζων ᾖ καὶ ἐν λόγῳ [δοθέντι.] τετάχθω τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι τριπλασίονα, καὶ ἔτι ὑπερέχειν μονάδας ι. δεῖ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι συναμφοτέρου τοῦ τε τριπλασίονος τῆς ὑπεροχῆς, καὶ τῶν δοθεισῶν μονάδων ι. τετάχθω ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν μονάδες β. ὁ δὲ ἐλάσσων ς^ο ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς^ο ἑνὸς μ^ο β. δεήσει ἄρα ἀριθμοὺς δ μονάδας δ τριπλασίονας εἶναι μ^ο β. καὶ ἔτι ὑπερέχειν μ^ο ι. τρεῖς ἄρα μονάδες β μετὰ μ^ο ι. ἴσαι εἰσὶν ςς^οις δ μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο γ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ^ο γ. ὁ δὲ μείζων μ^ο ε. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt interuallum quadratorum ab ipsis, dato numero superet interuallum numerorum, & sit ad illud in data ratione. Constitutum sit interuallum quadratorum, interualli numerorum esse triplum, & superaddere adhuc vnitates 10. Oportet autem quadratum interualli numerorum, minorem esse composito ex triplo sui ipsius, & ex datis vnitatibus 10. Ponatur interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor in-

teruallo

teruallo quadratorum, & Canones iidem hîc etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιϛ̅ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ιϛ̅ λεῖψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛϛ̅. ὅσων δή ποτε λεῖψει τοσούτων μ̊ ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ιϛ̅ μ̊ πλευρά. ἔστω ϛϛ̅ β̅ λεῖψει μ̊ δ̅. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ̅ μ̊ ιϛ̅ [λεῖψει ϛϛ̅ ιϛ̅.] ταῦτα ἴσα μονάσι ιϛ̅ λεῖψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε̅ ἴσαι ἀριθμοῖς ιϛ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ̅ πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνϛ̅ εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ̅ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ̅ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ιϛ̅. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16. diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{8}{5}$ erit ergo primi latus $\frac{8}{5}$.

ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν ιϛ̅ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ ϛ̅ ἑνός, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ϛϛ̅ ὅσων δήποτε λεῖψει μ̊ ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά. ἔστω δὴ ϛϛ̅ β̅ λεῖψει μ̊ δ̅. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὃς δὲ δυνάμεων δ̅ μ̊ ιϛ̅ λεῖψει ϛϛ̅ ιϛ̅. βούλομαι τοὺς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι μ̊ ιϛ̅. δυνάμεις ἄρα ε̅ μ̊ ιϛ̅ λεῖψει ϛϛ̅ ιϛ̅ ἴσαι μ̊ ιϛ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ̅ πέμπτων. ἔσται ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ η̅ πέμπτων.

αὐτὸς ἄρα ἔσαι σνϛ εἰκοσοπέμπτων. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου πλευρὰ ιβ πέμπτων. αὐτὸς ἄρα ἔσαι ρμδ κε. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

Atque ipſe quadratus $\frac{256}{25}$. ſecundi verò latus erit $\frac{12}{5}$. Atque ipſe quadratus $\frac{144}{25}$. & manifeſta eſt demonſtratio.

IN QVAESTIONES VIII. & IX.

PARVM aut nihil differunt hæ duæ quæſtiones, cùm idem quærant, & eodem prorſus operandi modo. Quare vnica indigent explicatione. Operatio eſt ſubtilis & Diophanti propria, qua in ſequentibus pulcherrima & difficillima perficit problemata, & ab alio ante ipſum nunquam excogitata. Proinde tyronibus hîc omni ope laborandum eſt, vt methodum iſtam fingendorum laterum perfectè comprehendant, illique aſſueſcant. Cùm igitur Diophantus æquare velit quadrato 16 – 1 Q. id tali artificio peragit vt æquatione ritè præparata, tandem inter duas ſpecies proximas æqualitas conſiſtat, ſic enim cùm nulla opus ſit radicis extractione, ſed ſola diuiſione inueniatur valor Numeri, patet ſolutionem contingere rationalem. Et hoc vnum voluiſſe Diophantum præter quàm quod res ipſa clamat, ipſemet diſertis verbis teſtatur quæſtione vndecima infra, vbi cùm de fingendo latere quadrati præceptum dediſſet, ſubiicit, *Sic enim vna ſpecie vni ſpeciei æquali remanente, expedietur quæſtio.* Quod rurſus iiſdem ferè verbis repetit quæſtione duodecima & decima tertia. Hîc itaque vt æquatio ritè procedat, tria ſunt obſeruanda.

Primò vt in latere fictitij quadrati ponatur vnitatum numerus æqualis lateri quadrati diuidendi in duos quadratos, ita Diophantus fingit hoc latus 2 N. – 4. Quod fit idcirco, quia ſic neceſſe eſt in quadrato fictitio reperiri vnitates æquales ipſi quadrato diuidendo, nimirum 16. cùm lex multiplicationis requirat vt ex – 4. in – 4. fiant 16. Quare cùm idem vnitatum numerus ſit etiam in altera æquationis parte, puta in 16 – 1 Q. euidens eſt auferendo ſimilia à ſimilibus, vnitates omnino tolli ab vtraque parte, & æqualitatem conſiſtere inter proximas duas ſpecies, Quadratos ſcilicet & Numeros.

Secundò neceſſe eſt vt vnitates quę ponuntur in fictitio latere, adiunctum habeant ſignum defectus, ſic Diophantus ponit huiuſmodi latus 2 N. – 4. & ratio eſt quia ſi poneretur 2 N. + 4. nulla quadrati pars adiunctum haberet ſignum defectus, eſſet enim quadratus 4 Q. + 16 N. + 16. Quare cùm in altera æquationis parte ſint vnitates cum defectu quadratorum, nempe 16 – 1 Q. ablatis vtrimque vnitatibus 16. vt ſupra dictum eſt, & addendo defectum vtrinque, nempe 1 Q. remanerent 5 Q. + 16. N. æquales nihilo. Vt igitur Numeri deficiant neceſſe fuit ponere latus quadrati cum defectu vnitatum, puta 2 N. – 4. ſic enim fit quadratus 4 Q. – 16 N. + 16. Quare ablatis vtrimque vnitatibus 16. & addendo vtrimque 1 Q. tum 16 N. remanent hinc 5 Q. inde 16. N. inter ſe æquales. Denique multitudo Numerorum qui ponuntur in latere fictitio, debet eſſe maior vel minor vnitate. Nam ſi ponatur vnitas, orietur valor Numeri æqualis lateri ipſius quadrati diuidendi, & reſoluendo hypoſtaſes, ipſum lactus fictitium, reperietur nihil. Ita ſi ponas in exemplo Diophanti, latus fictitium 1 N. – 4. fiet quadratus 1 Q – 8 N. + 16 æquandus 16 – 1 Q. Quare auferendo ſimilia à ſimilibus, & ſupplendo defectus, remanent 2 Q. æquales 8 N. & fit 1 N. 4. Quare latus quod poſitum erat 1 N. – 4. erit 4 – 4. ſeu nihilum. Cur autem id contingat, ratio eſt euidens. Nam numerus quadratorum qui in æquatione remanet, ſemper æqualis eſt quadrato Numerorum qui ponuntur in latere ficto, adſcita vnitate, quare cùm in latere ficto ponetur 1 N. numerus quadratorum qui manent in æquatione, erit 2. Q. At multitudo Numerorum cui æquantur 2 Q. eſt duplum lateris quadrati diuidendi, quia ſcilicet fit ex ductu 1 N. in dictum latus bis. Verbi gratia in dato exemplo 2 Q. æquantur 8 N. Quare cùm duplum lateris, puta 8. diuidetur per 2. neceſſe erit oriri ipſum latus 4. pro valore Numeri. Quod erat propoſitum.

His ſanè probè intellectis totũ Diophanti artificium percipietur. Sed abundantio-

ris doctrinæ gratia libet aduertere, eandem solutionem contingere, quamuis dupliciter instituatur positio secundi lateris, nimirum, siue ponatur in eo quælibet multitudo Numerorum maior ea quæ posita est in primo latere, siue alia minor, ita tamen vt inter harum vtramque, illa sit media proportionalis. Verbi gratia in exemplo Diophanti, siue ponas latus fictitium 2 N. − 4. siue $\frac{1}{2}$ N. − 4. eadem continget solutio, fiet enim vtrobique 1 N. $\frac{16}{5}$. Quia scilicet 1 N. est medius proportionalis inter 2 N. & $\frac{1}{2}$ N. & sic de aliis. Cuius symptomatis causa pendet ab huiusmodi Theoremate.

Si fuerint tres numeri proportionales, vt se habet aggregatum quadratorum à duobus primis ad primum, ita & aggregatum quadratorum à duobus postremis ad postremum.

D 16. E 36. G 81.
A 4. B 6. C 9.

Sint tres proportionales A. B. C. quorum quadrati D E G. Dico esse D E simul ad A, sicut E G simul ad C.[1] Quia enim D ad E est in duplicata ratione lateris A. ad latus B [2] sed & A ad C est duplicata ratio rationis A ad B, erit D ad E sicut A ad C. eodem argumento ostendetur esse E ad G vt A ad C. Quare est D ad E vt E ad G. & conuertẽdo G ad E vt E ad D. Quia verò est D ad E vt A ad C [3] est & vicissim D ad A vt E ad C. Itaq; cùm sit E ad D vt G ad E erunt componendo D E simul ad D, sicut E G simul ad E, sed vt D ad A, sic E ad C, vt ostensum est iam. [4] Igitur ex æquo vt D E simul ad A, sic E G simul ad C. Quod erat propositum.

[1] 11. octaui. [2] 10. defin. 5. [3] 13. septimi. [4] 14. septimi.

Hoc posito esto B numerus Numerorum primi lateris, medius proportionalis inter A & C. dico siue A ponatur numerus Numerorum secundi lateris, siue C. eandem contingere solutionem.

A $\frac{1}{2}$ N − D 4. B 1 N. C 2 N − D 4.

Sit enim D latus quadrati diuidendi in duos quadratos. Igitur A − D erit secundum latus,[5] cuius quadratus constabit ex quadratis ipsorum A & D, minus duplo producti ex A in D. cui addendo quadratum ex B, totum compositum æquabitur quadrato diuidendo abs D. Quare auferendo vtrimque quadratum abs D, & transferendo defectum in alteram æquationis partem, manent quadrati ex A & B. simul æquales duplo producti ex A in D. vnde fit valor Numeri diuidẽdo duplum producti ex A in D per aggregatum quadratorum ab, A & B. similiter ostendemus si secundum latus statuatur C − D valorem Numeri haberi diuidẽdo duplum producti ex C in D per aggregatum quadratorum abs B & C. Cùm ergo per præcedens Theorema sit vt aggregatum quadratorum abs A & B ad A, ita aggregatum quadratorum abs B & C ad C. ac proinde per eundem duplum ipsius D multiplicando cõsequentes,[6] fit vt aggregatum quadratorum abs A & B ad duplum producti ex A in D, ita aggregatum quadratorum abs B & C ad duplum producti ex C in D. patet diuiso seorsim duplo producti ex A in D per aggregatum quadratorum abs A & B, & duplo producti ex B in C per aggregatum quadratorum abs B & C. fieri ob æqualitatem proportionis, eundem quotientem vtrobique, atque ideo eundem vtrobique reperiri valorem Numeri. Quod demonstrandum erat.

[5] 4. secundi. [6] Schol. 22. 5.

Aduertendum præterea primi quadrati latus poni posse quemlibet Numerorũ numerum, dum in secundi latere ponatur maior vel minor Numerorum numerus, verbi gratia ponatur primi latus 3 N. erit quadratus 9 Q. Igitur secundus quadratus erit 16 − 9 Q. cuius latus fingatur 2 N. − 4. fiet quadratus 4 Q. − 16 N. + 16. æqualis 16 − 9 Q. & tandem 13 Q. æquabuntur 16 N. & fiet 1 N. $\frac{16}{13}$ erit igitur primũ latus $\frac{48}{13}$ secundum $\frac{20}{13}$ quorum quadrati $\frac{2304}{169}$ & $\frac{400}{169}$ quorũ summa $\frac{2704}{169}$ seu 16. vbi accidit (quod animaduersione dignum est) resoluẽdo hypostasim secundi lateris illud reperiri non 2 N. − 4. sed 4 − 2 N. Manet tamen eadem æquatio, & res æquè bene succedit, quia quadratus 4 Q. − 16 N. + 16. cum quo æqualitas instituitur, habere potest duplex latus, nimirũ 2 N. − 4. vel 4 − 2 N. nec interest à quo illorum effingi concipiatur. Quod semel monuisse sufficiat, ne cui scrupulũ moueat quotiescunque deinceps simile quid continget. Sanè Frãciscus Vieta in tali casu defectũ sub ambiguitate relinquens tali nota vteretur ad eum significandum 2 N. = 4. Indicans scilicet ob indeterminationem Numeri qui talis esse potest vt 2 N. nunc maiores sint quàm 4. nunc minores, latus illud poni vel 2 N − 4. vel 4 − 2 N. prout valor Numeri commodius positionibus applicari poterit.

Cæterùm ex operatione Diophanti nullo negotio Canon erui potest. Sed om-

nium facillimus ad huiusmodi quæstiones soluendas, elicitur ex propositione tertia libri tertij porismatum. nimirum. Canon.

Dati quadrati latus diuide in duos numeros planos similes, horum interuallum, & duplum medij proportionalis inter eos cadentis, latera exhibent quæsitorum quadratorum.

Vt si datus sit quadratus 16. diuide latus eius 4. in planos duos similes, habentes scilicet rationem quam 4 ad 1. quod fiet per Canonem secundæ primi, eruntque $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$ quorum interuallum $\frac{12}{5}$ & duplum medij proportionalis $\frac{16}{5}$. Quare latera quæsitorum quadratorum sunt $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Si autem 4. diuidatur rursus in alios duos planos similes seruantes aliam proportionem, alia reperietur solutio, vt si diuidatur in duas partes seruantes rationem quam habet 4. ad 9. erunt hæ $\frac{16}{13}$ & $\frac{36}{13}$. quarum interuallum, & duplum medij proportionalis sunt $\frac{20}{13}$ & $\frac{48}{13}$ latera scilicet quæsitorum quadratorum. Attamen, ne quid tyrones fallat, aduertendum est fieri posse, vt idem numerus bis diuidatur in duos planos similes, nec tamen per geminam illam diuisionem quadratus illius bis componatur ex duobus quadratis. Quod accidit quotiescũque partium prioris diuisionis interuallum æquatur duplo medij proportionalis cadentis inter partes posterioris diuisionis, & è converso. Vnde necesse est per vtranque diuisionem eadem quadratorum latera reperiri, non autem diuersa. Verbi gratia, si idem 4. diuidatur in planos similes $\frac{2}{5}$ & $\frac{18}{5}$ quorum ratio est quæ 1 ad 9. sunt hi diuersi à iam expositis $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Attamen quia eorũ interuallum $\frac{16}{5}$ idem est cum duplo medij qui cadit inter $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$. & è conuerso interuallum ipsorum & $\frac{16}{5}$ idem est cum duplo medij qui cadit inter $\frac{2}{5}$ & $\frac{18}{5}$ nimirum $\frac{12}{5}$ patet per vtramque diuisionem eadem reperiri latera $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Vt autem hæc ex altiori principio repetantur, id huiusmodi planis similibus accidit, quia illi sumpti sunt in ratione quadratorum 1 & 9. isti verò in ratione quadratorum 1. & 4. at priorum latera æquantur summæ laterum posteriorum & eorum interuallo, etenim posteriorum latera sunt 1. & 2. quorum summa & interuallum, nimirum 3. & 1. conficiunt latera priorum. Hanc porrò esse veram symptomatis huius causam more nostro libet demonstrare.

Sunto quadrati A C. quorum latera G H, itemque quadrati D F quorum latera K L, ita vt ipsorum K L summa sit æqualis ipsi G, & eorundem K L interuallom sit æquale ipsi H. Tũc ducatur idem numerus M in ipsos A C, vt fiant plani similes Q S. itemque ducatur idem N in ipsos D F, vt fiant plani similes T X, ita tamen vt amborum Q S. summa sit æqualis summæ amborum T X. & ipsorum Q S. medius proportionalis esto R, interuallum verò Y. Ipsorum quoque T X medius proportionalis esto V, interuallum Z. dico tã Z ipsius R. quàm vicissim Y ipsius V duplũ esse.

		M 5.		O 8.		Y 40.	
G 3.	H 1.	A 9.	B 3.	C 1.	Q 45.	R 15.	S 5.
K 2.	L 1.	D 4.	E 2.	F 1.	T 40.	V 20.	X 10.
		N 10.		P 3.		Z 30.	

Sumãtur enim & ipsorum A C. & D F medij proportionales B E, & eorũdem interualla O P.[1] Quoniam igi-

3.2. porism. tur quadratorum D F interuallum P fit ex summa laterum K L in eorũdem interual-
11. octaui. lum, fiet P ex G in H ex hypothesi, at[2] ex G in H fit etiam B. Igitur B. P. sunt equales.[3]
7.2. porism. At verò quadrati A C, simul quadratorum D F. simul dupli sunt, & ex M in ipsos A C fiũt Q S. ex N autem in ipsos D F fiunt T X, cùm ergo summa duorũ Q S. sit æqualis summæ amborum T X. patet ex M in summam ipsorum A C fieri eundem numerum
19. septimi. qui fit ex N. in summã ipsorum D F. Igitur[4] est vt summa ipsorũ A C ad summã ipsorum D F, ita N. ad M. Quare & N. duplus est ipsius M. Rursus cũ ex M in ipsos A C. fiant Q S. patet etiã ex M. in ipsos B. O. fieri R Y. similiterque ex N in ipsos E P. fieri V. Z. Quoniam itaque ex N in P fit Z, & ex M in B fit R. & B. P. ostensi sunt æqua-
17. septimi. les, patet ex eodem numero in ipsos N M fieri ipsos Z R.[5] Quamobrem est Z ad R sicut N ad M, ac proinde Z est duplus ipsius R. Quod erat ostendendum.

23.1. poris. Deinde cũ summa ipsorum G H constet ex summa ipsorũ K L & eorũ interuallo,[6] erit summa ipsorũ G H dupla ipsius K. & quia interuallum eorundẽ G H fit ex summa
23.1. poris. ipsorũ K L multata eorundem interuallo,[7] erit interuallũ ipsorũ G H duplũ ipsius L. Quare productus ex sũma ipsorũ G H in eorundẽ interuallũ,[8] nimirũ O æquabitur
3.2. porism. producto ex duplo K in duplũ L, seu quadruplo producti ex K in L. Igitur O quadru-

plus est ipsius E. Proinde productus ex N in O quadruplus erit producti ex N in E seu ipsius V. sed quia N est duplus ipsius M. idem productus ex N in O duplus est producti ex M in O seu ipsius Y. Igitur Y duplus est ipsius V. Quod demonstrandum erat. Itaque ex omni parte constat propositum.

Hinc euidens est cur etiam cum Diophanto positionibus diuersimodè institutis, eadem tamen nonnunquam solutio contingat, si enim primò statuantur numeri Numerorum vtriusque lateris quales sunt K L. & secundò statuantur iidem numeri Numerorum quales sunt G H. eadem per vtramque positionem inuenietur solutio. Nam si ponas cum Diophanto latus vnum 1 N, aliud verò 2 N – 4. fiunt latera quæsitorum quadratorum $\frac{16}{5}$ & $\frac{12}{5}$ si antem rursus ponas latum vnum 1 N. aliud verò 3 N – 4. fient rursus eadem quadratorum latera $\frac{16}{5}$ & $\frac{12}{5}$. Eadem de causa si prima vice ponas numeros Numerorum 2. & 3. secunda vice 1 & 5. non contingit solutio diuersa, quia scilicet ipsorum 2 & 3. summa & interuallum conficiunt ipsos 5 & 1. & sic de aliis. Denique ex dictis melius & vniuersalius quàm modo à Xilandro tradito, licebit cognoscere an propositus quadratus componatur ex duobus quadratis integris, immò & quoties in duos integros quadratos diuidi possit, respiciendo scilicet an latus eius è duobus planis similibus integris componatur, & quoties ex planis similibus integris & diuersis componatur, adhibita tamen cautione ne duorum ex iis planis similibus interuallum, æquale sit duplo medij proportionalis inter alios duos cadentis. Hac arte inuenies quadratum lateris 65. quater componi ex duobus quadratis integris, quia scilicet ipse 65. quater componitur è duobus planis similibus integris, nimirum ex 1 & 64. & 13. & 52. ex 16 & 49. & denique ex 20. & 45. Itaque per Canonem suprà traditum inuenies latera quadratorum, ex quibus quadratus ipsius 65. componitur, videlicet 63. & 16. vel 39. & 52. vel 33. & 56. vel demum 25. & 60. Sed de his satis.

QVÆSTIO X.

DATVM numerum qui ex duobus componitur quadratis, in alios duos quadratos partiri. Numerum 13. compositum ex quadratis 4. & 9. diuidere oporteat in alios duos quadratos. Sumantur latera prædictorum quadratorum 2. & 3. & ponantur quæsitorum quadratorum latera: hoc quidem 1 N. + 2. Illud verò numerorum quotcunque, cum defectu tot vnitatum quot continet latus alterius quadrati, puta 3. & esto 2 N. – 3. & fiunt quadrati, ille quidem 1 Q. + 4 N. + 4. Hic verò 4 Q. + 9. – 12 N. Restat vt ambo simul iuncti conficiant vnitates 13. sed ambo simul iuncti faciunt 5 Q. + 13. – 8 N. Hoc ergo æquatur 13.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν ὃς σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων, μεταδιελεῖν εἰς δύο ἑτέρους τετραγώνους. ἔστω ὁ ιγ συγκείμενος ἐκ τε τοῦ δ. καὶ θ τετραγώνων. μεταδιελεῖν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους. εἰλήφθωσαν τῶν προειρημένων τετραγώνων αἱ πλευραὶ μονάδες β μονάδες γ. καὶ τετάχθωσαν αἱ τῶν ἐπιζητουμένων τετραγώνων πλευραὶ, ἡ μὲν ς ἑνὸς μο β. ἡ δὲ ςς ὅσων δήποτε, λείψει μονάδων ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ λοιποῦ πλευρά γ. ἔστω ςς β λείψει μο γ. καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι. ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς ςς δ. [μο δ. ὃς δὲ δυνάμεων δ] μο θ λείψει ςς ιβ. λοιπόν ἐστι τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν μονάδας ιγ. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι δυνάμεις ε μονάδας ιγ λείψει ἀριθμῶν η. ταῦτα ἴσα μονάσι ιγ.

καὶ γίνεται ὁ ς η^ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, ἔταξα τὴν τοῦ ὑπερέχου πλευρὰν ς ἑνὸς μο β. [ἔσται] ιη^ε. τὴν δὲ τοῦ δευτέρου πλευρὰν ςς β λείψει μο γ. ἔσται ἑνὸς πέμπτου αὐτοὶ δὲ αἱ τετράγωνοι ἔσονται. ὃς μὲν τκδ^κε. ὃς δὲ ἑνὸς εἰκοστοπέμπτου, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι τκε^κε. ἃ συνάγει τὰς ἐπιταχθείσας μονάδας δεκατρεῖς.

& fit 1 N. $\frac{8}{5}$. Ad Positiones. Posueram prioris latus 1 N. + 2. erit ergo $\frac{18}{5}$. statueram autem posterioris latus 2 N. − 3. erit vtique $\frac{1}{5}$. Ipsi ergo quadrati erunt, ille quidem $\frac{324}{25}$. Hic autem $\frac{1}{25}$. Et ambo simul faciunt $\frac{325}{25}$ seu imperatas vnitates 13.

IN QVAESTIONEM X.

PVLCHERRIMVM est hoc problema, & eiusdem naturæ cum præcedente, cuius magnus est vsus in sequentibus, præsertim libro quinto. Sed circa operationem Diophanti multa sunt obseruanda, quæ Scholiastes & Xilander, vel non viderunt omnino, vel imperfectè tractarunt.

Primò obseruandum ne in vtroque latere fictitio idem statuatur Numerorum numerus, alioquin non inuenientur diuersa quadratorum quæsitorum latera à datis iam lateribus, sed eadem prorsus, & inutilis erit operatio. Ita in exemplo Diophanti si ponas fictitia latera 1 N. − 2. & 1 N. − 3. vel rursus 1 N. + 2. & 1 N. − 3. inuenies per vtramque positionem eadem latera 2. & 3. quæ iam data sunt, & nihil actum erit. Quod vt sua demonstratione fulciatur iuncto B C. latera data quadratorum, quorum summa K. & ponatur A certus Numerorum numerus in vtroque latere fictitio, ita vt alterum sit A − B, alterum A − C. duplum autem quadrati abs A esto D. & duplum producti ex K in A esto E.

K 5.
A 6 N. − B 2. A 6 N. − C 3.
D 72 Q. E 60 N.

Patet diuiso E per D. oriri valorem Numeri. Nam ducere B in A, & C in A idem est atque ducere summam ipsorum B C. nempe K in A. Quare duplum productum ex B in A, & ex C in A, æquatur duplo producti ex K in A, puta ipsi E. Quamobrem E est numerus Numerorum qui reperiuntur in aggregato quadratorum à fictitiis lateribus A − B. & A − C. Atqui D est numerus Quadratorum qui sunt in eodem aggregato. Proinde diuiso E per D fit valor Numeri. Itaque quia duplum A in ipsum A ductum facit D, & duplum A in K facit E, erit D ad E sicut A ad K. Quare diuiso K per A prodibit idem valor Numeri qui ostensus est prodire diuiso E per D. Proinde cùm resoluendo hypostases, ducetur valor Numeri in A, fiet K, à quo auferendo B restabit vtique C, & auferendo C, restabit B. Igitur latus A − B idem erit quod ipse C, & latus A − C idem erit quod B. Quod erat demonstrandum.

Deinde ponatur vnum latus A + B. alterum A − C. & sit K interuallum ipsorum B C. sit autem D vt prius duplum quadrati A. sed E sit duplum producti ex A in K. Patet ob signi diuersitatem, haberi numerum Numerorum contentorum in aggregato quadratorum qui fiunt à fictititiis lateribus, si à duplo producti ex A in C, auferatur duplum producti ex A in B. hoc autem idem est atque ducere duplum A in interuallum ipsorum B C. seu in K. Igitur E est ille numerus Numerorum. Itaque cùm D sit numerus quadratorum in eodem aggregato contentorum, diuiso E per D. orietur valor numeri.

K 1.
A 6 N. + B 2. A 6 N. = C 3.
D 72 Q. E 12 N.

Quia ergo ducendo duplum A in A fit D, & ducendo idem duplum A in K fit E, erit A ad K vt D ad E. Proinde diuiso K per A orietur item valor Numeri; & resoluendo hypostases cùm A ducetur in valorem Numeri fiet K. Quamobrem A + B æquabitur ipsi C. & A = C hoc est C − A æquabitur ipsi B. Quod erat propositum.

Aduertendum secundò ad hoc vt æquatio procedat, in lateribus fictitiis ponendum esse latus vtrùmque datorum cum signo defectus, vel saltem alterum, ita vt in aggregato quadratorum fictitiorum numerus Numerorum reperiatur cum signo defectus, ac proinde transeat in alteram æquationis partem, & maneant Numeri æquales quadratis. Quare tutissimus omnium modus fingendi latera quadratorum est, cùm in vtroque ponuntur data latera cum signo defectus, & tunc nulla cautio adhibenda est, præter eam quæ tradita est aduertendo primo vt scilicet numeri Numerorum sint diuersi, & eam de qua agetur aduertendo vltimo. Ita si ponas latera 1 N. − 2. & 2 N. − 3. fiet 1 N. $\frac{14}{5}$ & latera quæsita erunt $\frac{4}{5}$ & $\frac{13}{5}$. & sic aliis infinitis modis variari positiooes poterunt, & variæ contingent solutiones, prout varij ponentur Numerorum numeri, qui tamen oon sint prius positis proportionales, alioquin si proportionales sint eaòdem exhibebunt solutionem, vt facile est demoostrare. Quod si alterum tantum datorum laterum statuatur cum sigoo minoris, alterum verò cum signo pluris, dupliciter id accedere potest, quia vel minus latus afficitur signo +. vel maius latus. Itaque

Aduertendum tertiò, cùm minus datorum laterum afficitur sigoo − maius verò signo +. Necesse esse vt numerus Numerotum appositus minori ad numerum Numerorum appositum maiori maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Quare in hoc casu si ponatur verbi gratia alterum latus 1 N. + 3. ponendum erit alterum 2 N. − 2 vel 3 N. − 2. & sic in infioitum, ita vt numerus Numerorum secundi lateris excedat 1 $\frac{1}{2}$ qui ad vnitatem seu ad numerum Numerotum primi lateris eandem habet rationem quàm 3. ad 2. Huius rei causa euidens est, quia oportet, vt dictum est, in aggregato quadratorum fictitiorum numerum Nometorum esse cum sigoo −. Quare in hoc casu oportet duplum prodocti ex minore datorum laterum in Numeros sibi appositos, superare duplum producti ex maiore in Numeros sibi adiunctos, quod patet fieri non posse nisi obseruetur quod traditum est.

Aduertendum quartò cùm maius latus datorum afficitur signo, − minus verò signo + tunc oecesse esse vt numerus Numerorum appositus maiori ad appositum minori lateri, maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Ita si pooatur alterum latus 1 N. − 3. statuendum erit alterum 1 $\frac{1}{2}$ N. + 2. vel 1 $\frac{1}{4}$ N. + 2. & sic in infinitum, ponendo in secundo latere quemlibet oumerum Numerorum minorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. vel si secundum latus statuatur 1 N. + 2. statuendum erit primum 2 N. − 3. vel 4. N. − 3. & sic in infinitum ponendo in primo latere quemlibet numerum Numerorum maiorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. Quod obseruari oportet ob causam in præcedente aduertendo allatam. Ita possunt hæc duo præcepta in vnicum contrahi, nimirum. Cùm in vno latere fictitio ponitur alterum laterum datorum cum signo −, alterum verò pooitur in altero latere fictitio cum signo −. Oportet vt numerus Numerorum qui afficitur signo − ad eum qui afficitur signo + maiorem rationem habeat, ratione datorum laterum.

Aduerteodum postremò, cùm maius datorum laterum afficitur signo − & minus signo + tunc cauendum esse, ne oumerus Numerorum maiori appositus, ad appositum minori eandem rationem habeat, quam habet summa datorum laterum ad eorundem interuallum; alioquin idem sequetur absurdum quod in primo aduertendo sequi ostensum est, reperientur scilicet eadem latera quæ data sunt, & nihil effectum erit. Verbi gratia si ponas alterum latus 5 N. − 3. alterum 1 N. + 2. quia 5 N. ad 1 N. se habet sicut summa ipsorum 3. & 2. ad eorundem interuallum inuenies tandem 5 N. − 3. nil aliud esse quàm 2. & 1 N. + 2. esse idem quod 3. Huius symptomatis causa ex huiusmodi Theoremate pendet.

Datis quatuor numeris, quorum primus ad secundum sit vt summa tertij & quarti, ad excessum tertij suprà quartum: erit aggregatum quadratorum primi & secundi, ad productum ex primo in tertium multatum producto ex secundo in quartum: Sicut primus ad semissem summæ tertij & quarti, vel sicut secundus ad semissem interualli eorundem.

καὶ γίνεται ὁ ς˘ η ε˘. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, ἔταξα τὴν τοῦ πρώτου πλευρὰν ς˘ ἑνὸς μο β. [ἔσται] ιη ε˘. τὴν δὲ τοῦ δευτέρου πλευρὰν ςς β λείψει μο γ. ἔσται ἑνὸς πέμπτου. αὐτοὶ δὲ οἱ τετράγωνοι ἔσονται. ὃς μὲν τκδ κε˘. ὃς δὲ ἑνὸς εἰκοστοπέμπτου, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι τκε κε˘. ἃ συνάγει τὰς ἐπιταχθείσας μονάδας δεκατρεῖς.

& fit 1 N. $\frac{8}{5}$. Ad Positiones. Posueram prioris latus 1 N. + 2. erit ergo $\frac{18}{5}$. statueram autem posterioris latus 2 N. − 3. erit vtique $\frac{1}{5}$. Ipsi ergo quadrati erunt, ille quidem $\frac{324}{25}$. Hic autem $\frac{1}{25}$. Et ambo simul faciunt $\frac{325}{25}$ seu imperatas vnitates 13.

IN QVAESTIONEM X.

PVLCHERRIMVM est hoc problema, & eiusdem naturæ cum præcedente, cuius magnus est vsus in sequentibus, præsertim libro quinto. Sed circa operationem Diophanti multa sunt obseruanda, quæ Scholiastes & Xilander, vel non viderunt omnino, vel imperfectè tractarunt.

Primò obseruandum ne in vtroque latere fictitio idem statuatur Numerorum numerus, alioquin non inuenientur diuersa quadratorum quæsitorum latera à datis iam lateribus, sed eadem prorsus, & inutilis erit operatio. Ita in exemplo Diophanti si ponas fictitia latera 1 N. − 2. & 1 N. − 3. vel rursus 1 N. + 2. & 1 N. − 3. inuenies per vtramque positionem eadem latera 2. & 3. quæ iam data sunt, & nihil actum erit. Quod vt sua demonstratione fulciatur iuncto B C. latera data quadratorum, quorum summa K. & ponatur A certus Numerorum numerus in vtroque latere fictitio, ita vt alterum sit A − B, alterum A − C. duplum autem quadrati abs A esto D. & duplum producti ex K in A esto E.

K 5.
A 6 N. − B 2. A 6 N. − C 3.
D 72 Q. E 60 N.

Patet diuiso E per D. oriri valorem Numeri. Nam ducere B in A, & C in A idem est atque ducere summam ipsorum B C. nempe K in A. Quare duplum productum ex B in A, & ex C in A, æquatur duplo producti ex K in A, puta ipsi E. Quamobrem E est numerus Numerorum qui reperiuntur in aggregato quadratorum à fictitiis lateribus A − B. & A − C. Atqui D est numerus Quadratorum qui sunt in eodem aggregato. Proinde diuiso E per D fit valor Numeri. Itaque quia duplum A in ipsum A ductum facit D, & duplum A in K facit E, erit D ad E sicut A ad K. Quare diuiso K per A prodibit idem valor Numeri qui ostensus est prodire diuiso E per D. Proinde cùm resoluendo hypostases, ducetur valor Numeri in A, fiet K, à quo auferendo B restabit vtique C, & auferendo C, restabit B. Igitur latus A − B idem erit quod ipse C, & latus A − C idem erit quod B. Quod erat demonstrandum.

Deinde ponatur vnum latus A + B. alterum A − C. & sit K interuallum ipsorum B C. sit autem D vt prius duplum quadrati A. sed E sit duplum producti ex A in K. Patet ob signi diuersitatem, haberi numerum Numerorum contentorum in aggregato quadratorum qui fiunt

K 1.
A 6 N. + B 2 A 6 N. = C 3.
D 72 Q. E 12 N.

à fictititiis lateribus, si à duplo producti ex A in C, auferatur duplum producti ex A in B. hoc autem idem est atque ducere duplum A in interuallum ipsorum B C. seu in K. Igitur E est ille numerus Numerorum. Itaque cùm D sit numerus quadratorum in eodem aggregato contentorum, diuiso E per D. orietur valor numeri. Quia ergo ducendo duplum A in A fit D, & ducendo idem duplum A in K fit E, erit A ad K vt D ad E. Proinde diuiso K per A orietur item valor Numeri, & resoluendo hypostases cùm A ducetur in valorem Numeri fiet K. Quamobrem A + B æquabitur ipsi C. & A = C hoc est C − A æquabitur ipsi B. Quod erat propositum.

Aduertendum secundò ad hoc vt æquatio procedat, in lateribus fictitiis ponendum esse latus vtrumque datorum cum signo defectus, vel saltem alterum, ita vt in aggregato quadratorum fictitiorum numerus Numerorum reperiatur cum signo defectus, ac proinde transeat in alteram æquationis partem, & maneant Numeri æquales quadratis. Quare tutissimus omnium modus fingendi latera quadratorum est, cùm in vtroque ponuntur data latera cum signo defectus, & tunc nulla cautio adhibenda est, præter eam quæ tradita est aduertendo primo vt scilicet numeri Numerorum sint diuersi, & eam de qua agetur aduertendo vltimo. Ita si ponas latera 1 N. − 2. & 2 N. − 3. fiet 1 N. $\frac{16}{5}$ & latera quæsita erunt $\frac{6}{5}$ & $\frac{17}{5}$. & sic aliis infinitis modis variari positiones poterunt, & variæ contingent solutiones, prout varij ponentur Numerorum numeri, qui tamen non sint prius positis proportionales, alioquin si proportionales sint eandem exhibebunt solutionem, vt facile est demonstrare. Quod si alterum tantum datorum laterum statuatur cum signo minoris, alterum verò cum signo pluris, dupliciter id accedere potest, quia vel minus latus afficitur signo +. vel maius latus. Itaque

Aduertendum tertiò, cùm minus datorum laterum afficitur signo − maius verò signo +. Necesse esse vt numerus Numerorum appositus minori ad numerum Numerorum appositum maiori maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Quare in hoc casu si ponatur verbi gratia alterum latus 1 N. + 3. ponendum erit alterum 2 N. − 2 vel 3 N. − 2. & sic in infinitum, ita vt numerus Numerorum secundi lateris excedat 1 $\frac{1}{2}$ qui ad vnitatem seu ad numerum Numerorum primi lateris eandem habet rationem quàm 3. ad 2. Huius rei causa euidens est, quia oportet, vt dictum est, in aggregato quadratorum fictitiorum numerum Numerorum esse cum signo −. Quare in hoc casu oportet duplum producti ex minore datorum laterum in Numeros sibi appositos, superare duplum producti ex maiore in Numeros sibi adiunctos, quod patet fieri non posse nisi obseruetur quod traditum est.

Aduertendum quartò cùm maius latus datorum afficitur signo, − minus verò signo + tunc necesse esse vt numerus Numerorum appositus maiori ad appositum minori lateri, maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Ita si ponatur alterum latus 1 N. − 3. statuendum erit alterum 1 $\frac{1}{3}$ N. + 2. vel 1 $\frac{1}{4}$ N. + 2. & sic in infinitum, ponendo in secundo latere quemlibet numerum Numerorum minorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. vel si secundum latus statuatur 1 N. + 2. statuendum erit primum 2 N. − 3. vel 4. N. − 3. & sic in infinitum ponendo in primo latere quemlibet numerum Numerorum maiorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. Quod obseruari oportet ob causam in præcedente aduertendo allatam. Ita possunt hæc duo præcepta in vnicum contrahi, nimirum. Cùm in vno latere fictitio ponitur alterum laterum datorum cum signo −, alterum verò ponitur in altero latere fictitio cum signo −. Oportet vt numerus Numerorum qui afficitur signo − ad eum qui afficitur signo + maiorem rationem habeat, ratione datorum laterum.

Aduertendum postremò, cùm maius datorum laterum afficitur signo − & minus signo + tunc cauendum esse, ne numerus Numerorum maiori appositus, ad appositum minori eandem rationem habeat, quam habet summa datorum laterum ad eorundem interuallum; alioquin idem sequetur absurdum quod in primo aduertendo sequi ostensum est, reperientur scilicet eadem latera quæ data sunt, & nihil effectum erit. Verbi gratia si ponas alterum latus 5 N. − 3. alterum 1 N. + 2. quia 5 N. ad 1 N. se habet sicut summa ipsorum 3. & 2. ad eorundem interuallum inuenies tandem 5 N. − 3. nil aliud esse quàm 2. & 1 N. + 2. esse idem quod 3. Huius symptomatis causa ex huiusmodi Theoremate pendet.

Datis quatuor numeris, quorum primus ad secundum sit vt summa tertij & quarti, ad excessum tertij suprà quartum: erit aggregatum quadratorum primi & secundi, ad productum ex primo in tertium multatum producto ex secundo in quartum: Sicut primus ad semissem summæ tertij & quarti, vel sicut secundus ad semissem interualli eorundem.

A 15. C 6. F 5. E 2.
B 3. D 4. G 1.
H 234. K 78.
L 225. R 75.
M 9. P 3.

Sint dati quatuor numeri A B C D. & ipsorum C D interuallum sit E cuius semissis G. & eorundem C D summæ semissis sit F. & aggregatum quadratorum ab A & B sit H. productum autem ex A in C multatum producto ex B in D esto K. & ponatur esse A ad B sicut summa duorum C D ad eorundem interuallum E, hoc est sicut F ad G. dico esse sicut H ad K. sic A ad F vel B ad G. Quia enim est A ad B sicut F ad G, erit vicissim A ad F sicut B ad G. Itaque sumantur L M quadrati ipsorum A B. quorum aggregatum positum est H. & ex F in A fiat R. & ex G in B fiat P. Quia igitur F est semissis summæ ipsorum C D, & G semissis interualli eorundem; D G simul [1] æquantur ipsi F, & G F simul æquantur ipsi C. Quare ducere C in A idem est, atque ducere G & F in A, [2] productum autem ex G in A æquatur producto ex F in B (quia est A ad B vt F ad G) Igitur productum ex C in A æquatur productis ex F in A, & ex F in B. Quoniam verò F æquatur ipsis D G. productum ex F in B æquatur productis ex D in B, & ex G in B. Quamobrem productum ex C in A æquatur productis ex F in A. & ex D in B. & ex G in B. Itaque si hinc auferatur productus ex D in B, vtique productus ex C in A multatus producto ex D in B, hoc est K manebit æqualis productis ex F in A & ex G in B, hoc est ipsis R P. Iam verò quia idem A ductus in seipsum, & in F producit L & R, erit L ad R sicut A ad F seu sicut B ad G. Similiter quia idem B ductus in seipsum & in G producit M & P. erit M ad P sicut B ad G. Igitur est L ad R sicut M ad P. & duo antecedentes simul, nempe H ad consequentes simul, nempe ad K, sunt vt A ad F seu B ad G. Quod demonstrandum erat.

Coroll. 23. 1. porif. [1]
19. septimi. [2]

His præmissis, si ponantur data latera C. D. & sint A. B. numeri Numerorum, sitque vnum latus fictitium A – C, alterum B + D. fiet æquatio inter aggregatum quadratorum ab A & B, & inter duplum producti ex A in C multatum duplo producti ex B in D. nempe inter H & duplum ipsius K. Quare orietur valor Numeri diuidendo duplum ipsius K per H.

A 15 N. – C 6. F 5. E 2.
B 3 N + D 4. G 1.
H 234 Q. K 78 N.

Quia autem vt H ad K, sic est A ad F. erit & H ad duplum K, sicut A ad duplum F. hoc est ad summam ipsorum C D. Quare hac summa diuisa per A orietur quoque valor Numeri. Proinde resoluendo hypostases cùm vnitates ipsius A ducentur in valorem Numeri, fiet A æqualis summæ ipsorum C D, vnde patet A – C fore æqualem ipsi D. Similiter quia vt H ad duplum K. sic est B ad duplum G. nempe ad E, diuiso E per B orietur rursus valor Numeri. Vnde resoluendo hypostases cùm vnitates ipsius B. ducentur in valorem Numeri, fiet B æqualis ipsi E. Quamobrem B + D necesse erit æquari ipsi C. Quare ex omni parte patet propositum.

Idem quoque absurdum sequitur, cùm in vtroque latere fictitio ponuntur data latera cum signo defectus, si Numerorum numerus minori appositus, ad appositum maiori eandem rursus habeat rationem quam habet summa datorum laterum ad eorundem interuallum, vt si in hypothesi Diophanti ponatur alterum latus 5 N. – 2 alterum 1 N. – 3. Quod eadem facilitate demonstratur, hoc præmisso Theoremate.

Datis quatuor numeris, quorum primus ad secundum sit vt summa tertij & quarti ad excessum quarti supra tertium, erit aggregatum quadratorum primi & secundi, ad aggregatum productorum ex primo in tertium, & ex secundo in quartum, sicut primus ad semissem summæ tertij & quarti, vel sicut secundus ad semissem interualli eorundem.

Demonstratur autem hoc theorema eadem ferè ratione quo & præcedens, imò ex illo facilè infertur, probando scilicet eundem K fieri siue à producto ex A in C. auferatur productus ex B in D; siue producto ex A in D. addatur productus ex B in C. Quod tibi relinquo considerandum exercitationis ergò.

Varij Canones ex varia positionum institutione formari possent, sed quia parum in eis esset compendij, huic labori supersedeo. Verùm Canonis loco libet explicare modum perficiendi hoc problema à Francisco Vieta traditum zetetico 3. libri quarti, qui talis est.

Constituantur latera data, hypotenusæ duorum trangulorum rectangulorum similium. Summa baseos primi & perpendiculi secundi; itemque interuallum perpendiculi primi & baseos secundi: vel interuallum baseos primi & perpendiculi secundi; itemque summa perpendiculi primi, & baseos secundi constituent quæsitorum quadratorum latera.

Porrò quilibet numerus fit hypotenusa trianguli rectanguli per præcedentem, diuidendo scilicet eius quadratum in duos quadratos. Verbi gratia, sint data latera 2. & 3. si per Canonem præcedentis diuidas 2. in duos planos similes, videlicet qui sint in ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{2}{5}$ & $\frac{8}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{6}{5}$ & $\frac{8}{5}$. Rursus diuide 3. in duos planes similes, quique sint in eadem ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{3}{5}$ & $\frac{12}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{9}{5}$ & $\frac{12}{5}$. Habemus itaque latera circa rectum triangulorum similium, nimirum $\frac{6}{5}$ $\frac{8}{5}$ & $\frac{9}{5}$ $\frac{12}{5}$. summa baseos primi & perpendiculi secundi est $\frac{18}{5}$ interuallum autem perpendiculi primi & baseos secundi est $\frac{1}{5}$. Sunt ergo latera quæsitorum quadratorum $\frac{18}{5}$ & $\frac{1}{5}$. vel summa perpendiculi primi & baseos secundi est $\frac{17}{5}$ interuallum autem baseos primi & perpendiculi secundi est $\frac{6}{5}$. Rursus ergo quæsitorum latera esse possunt $\frac{17}{5}$ & $\frac{6}{5}$. Huius rei demonstratio in promptu est. Sunto data latera A. B. & inuenienda sint alia latera, quorũ quadrati æquentur quadratis ipsorũ A B. fiat A hypotenusa trianguli rectanguli per præcedentem, sintque latera circa rectum C D. fiat item B hypotenusa similis trianguli, cuius latera circa rectum sint E F. Ita vt quadrati ipsorum C D sint æquales quadrato abs A. & quadrati ab E & F sint æquales quadrato abs B. & sit C ad D vt E ad F. Denique ipsorum C F summa esto G interuallum L. Item ipsorum E D summa esto K interuallum H. Dico latera quęsita esse G H. vel etiam K L. Quia enim est C ad D vt E ad F. [a] Erunt tam quadrati duorum G H. quàm quadrati duorum K L æquales quadratis omnium C D E F. At quadrati ipsorum C D. E F æquantur quadratis duorum A B ex hypothesi, igitur quadrati ipsorum A B æquantur quadratis ipsorum G H, vel etiam ipsorum K L. Quod erat demonstrandum. *6.3. poris.*

A 10.	B 15.
C 8.	E 12.
D 6.	F 9.
G 17.	H 6.
K 18.	L 1.

QVÆSTIO XI.

INVENIRE duos quadratos numeros in dato interuallo. Constitutum sit interuallum ipsorum esse 60. Ponatur alterius latus 1 N. alterius verò 1 N. & quotlibet vnitatum, dummodo harum quadratus non superet interuallum datum. Sic enim vna specie vni speciei æquali remanente expedietur quæstio. Esto igitur 1 N. + 3. Ipsi igitur quadrati erunt 1 Q. & 1 Q. + 6 N. + 9. Interuallum ipsorum est 6 N. + 9. Hoc æquatur vnitatibus 60. & fit 1 N. $8\frac{1}{2}$. Erit igitur prioris latus $8\frac{1}{2}$. Po-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μ° ξ. τετάχθω ὁ μὲν ἡ πλευρὰ ς° ἑνός. ὁ δὲ ἡ πλευρὰ ς° ἑνὸς, καὶ μ° ὅσων δή ποτε, μόνον ἵνα μὴ ὁ ἀπὸ τῶν μ° τετράγωνος ὑπεράρῃ τὴν ὑπεροχὴν τὴν δοθεῖσαν, οὕτω γὰρ ἑνὸς εἴδους ἑνὶ εἴδει ἴσου καταλειπομένου συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. ἔστω ς° ἑνὸς μ° γ. αὐτοὶ ἄρα οἱ τετράγωνοι ἔσονται δ^υ μία, καὶ δ^υ μία, ςς° ς. μ° θ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ςς° ς μ° θ. ταῦτα ἴσα μονάδων ξ. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° η καὶ ἥμισυ. [ἔσται ἄρα ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ μ° η καὶ ἥμισυ. ἡ δὲ τοῦ

δευτέρου μ° ια καὶ ἥμισυ. αὐτοὶ δὲ οἱ τετράγωνοι ἔσονται ὃς μὲν μ° οβ δ´. ὃς δὲ ρλβ δ´. καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

sterioris verò $\frac{1}{2}$. Ipsi autem quadrati erunt, 72. $\frac{1}{4}$ & 132. $\frac{1}{4}$ & manifestum est satisfactum esse quæstioni.

IN QVAESTIONEM XI.

VERBA illa, *Dummodo harum quadratus non superet interuallum datum*, cautè accipienda sunt. Nam in exemplo Diophanti, vbi interuallum datum 60. non est quadratus numerus, res bene habet, nam cùm non possit dari quadratus æqualis numero non quadrato qualis est 60. quicunque quadratus accipiatur non maior quàm 60. is necessariò minor erit, quod requiritur vt æquatio ritè procedat. Sed si datum interuallum esset quadratus numerus, tunc non sufficeret ponere in latere secundi quadrati vnitates, quarum quadratus non superaret datum interuallum, sed ponendæ essent vnitates, quarum quadratus deficeret à dato interuallo. Verbi gratia sit datũ interuallum 25. Ponatur latus alterius quadrati 1 N. alterius verò 1 N. + 5. fient 10 N. + 25. æquales 25. Quare 10 N. æquabuntur nihilo. Itaque oportet fingi latus secundi quadrati ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus sit minor quàm 25. vt 1 N. + 1. & fient 2 N. + 1. æquales 25. eritque 1 N. 12. sunt ergo quæsita latera 12. & 13. & satisfaciunt proposito. Quamobrem melius & vniuersalius præscribetur conditio hoc pacto. *Dummodo harum quadratus sit minor dato interuallo.* Cæterùm ex operatione Diophanti elicietur huiusmodi Canon.

Sume quemuis quadratum minorem dato interuallo, eumque subtrahe à dato interuallo, residuum diuide per duplum lateris sumpti quadrati, orietur vnum latus quæsitorum, cui si addas latus sumpti quadrati, fiet alterum latus.

Aliter etiam institui potest operatio, nimirum. Ponatur minor quæsitorum quadratorum 1 Q. ergo maior erit 1 Q. + 60. fingatur eius latus ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus sit minor quàm 60. & fiet operatio eadem cum operatione Diophanti. Vel fingatur quadrati eiusdem latus ab 1 N. – tot vnitatibus, quarum quadratus sit maior quàm 60. verbi gratia fingatur ab 1 N. – 10. fiet quadratus 1 Q. – 20 N. + 100. æqualis 1 Q. + 60. & fiet 1 N. 2. eruntque quæsita latera 2. & 8. Hinc rursus formabitur iste Canon.

Sume quemuis quadratum maiorem dato interuallo, & ab eo subtrahe datum interuallum, residuum diuide per duplum lateris sumpti quadrati, orietur vnum latus quæsitorum, quod subtrahe à latere sumpti quadrati, fiet alterum latus.

Aliter rursus Ponatur maior Quadratus 1 Q. erit ergo minor 1 Q. – 60. cuius latus fingatur ab 1 N. – quotlibet vnitatibus, puta ab 1 N. – 10. fiet quadratus 1 Q. – 20 N. + 100. æqualis 1 Q. – 60. & fiet 1 N. 8. eruntque quæsita latera 8. & 2. Hinc etiam formatur huiusmodi Canon.

Sume quemlibet quadratum quem adde dato interuallo, summam diuide per duplum lateris sumpti quadrati, orietur vnum latus quæsitorum, à quo aufer latus sumpti quadrati, vel contrà; fiet alterum latus.

Porrò Canon omnium elegantissimus, & quo sequenti quæstione vtitur Diophantus, & alibi sæpe elicitur ex tertia secundi porismatum, adiuuante vigesima tertia primi, vel Canone primæ primi Diophanti, nimirum.

Cape duos numeros quorum mutuo ductu fiat datum interuallum, horum summæ semissis, & semissis interualli eorundem, quæsitorum quadratorum exhibebunt latera.

A 60.
B 10. C 6.
D 8. E 2.

Sit enim A datum interuallum, & ex B in C fiat A. summæ autem ipsorum B C semissis esto D, semissis verò interualli eorundem B C. esto E. Quia ergo constat per vigesimam tertiam primi porismatum, vel per Canonem primæ primi Diophanti summam ipsorum D E æquari ipsi B, & interuallum eorundem D E æquari ipsi C. patet A fieri ex summa ipsorum D E in eorundem interuallum[1]. Quamobrem A est interuallum quadratorum ab ipsis D E. Quod erat propositum.

Hinc autem melius & vniuersalius quàm modo à Xilandro tradito cognosci poterit, an in integris quæstio solui possit, immò & an pluribus modis in integris solutio contingat: si enim ipsi B C tales deligi possint, vt vterque sit par vel vterque impar, patet tam eorum summæ, quàm interualli semissem in integris haberi. Quare ipsi D E integri erunt vt iam docuimus ad primam primi. Si autem ipsorum B C. alter sit par, alter impar, non poterunt ipsi D E haberi nisi diuisa vnitate. Quamobrem quot modis reperiri poterunt duo numeri mutuo ductu conficientes datum interuallum, quorum vterque sit par, vel vterque impar, tot modis per integros soluetur quæstio. Vt dato interuallo eodem 60. quia id fit tum ex 10 in 6. tum ex 30. in 2. quorum vterque par est duobus modis in integris continget solui quæstionem, eruntque quæsita latera 8 & 2. vel 16 & 14. similiter dato interuallo 15. quia id fit tum ex 15 in 1. tum ex 5 in 3. duobus modis in integris soluetur quæstio, eruntque quæsita latera 8 & 7. vel 4 & 1. Rursus dato interuallo 48. quia id fit tum ex 2. in 24. tum ex 4 in 12. tum ex 6 in 8. tribus modis soluetur quæstio per integros, & erunt quæsita latera 13 & 11. vel 8 & 4. vel denique 7 & 1. Vnde sequitur quod iam aliter demonstrauimus in Corollario vigesimæ secundæ primi porism. si datum interuallum sit pariter impar tantùm, non posse solui quæstionem in integris, nam non metietur illud numerus par per parem, alioquin esset pariter par contra hypothesim, non metietur etiam idem interuallum numerus impar per imparem, alioquin esset impar, quod est etiam contra hypothesim. Quamobrem relinquitur vt metiatur tantùm illud numerus par per imparem, ac proinde, vt ostensum est, non continget solutio in integris. Si autem datum interuallum sit impar, vel quilibet numerus pariter par supra quaternarium, soluetur quæstio semper in integris. Quia quemlibet imparem vnitas metitur per ipsummet imparem. At quemlibet pariter parem metitur binarius per eiusdem pariter paris semissem[2] qui semper est par. Excluditur autem quaternarius, quia metitur eum tantum binarius per binarium, non potest autem idem binarius esse summa & interuallum duorum eorundem numerorum, nisi pars ponatur æqualis toti. 8. 1. poris.

QVÆSTIO XII.

DATIS duobus numeris addere eundem numerum, & vtrumque quadratum efficere. Sint dati numeri 2. & 3. & esto addendus 1 N. erit ergo tum 1 N. + 2. tum 1 N. + 3. æqualis quadrato. Et hoc genus vocatur duplicata æqualitas, æquatur autem sic. Interuallo conspecto, quære duos numeros quorum vnius in alterum multiplicatio producat istud interuallum. Sunt autem hi 4. & $\frac{1}{4}$. Horum vel interual-

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον ἔστω τῷ β καὶ τῷ γ. καὶ ἔστω ὁ προστιθέμενος ϛ ἑνός. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ϛ ἑνὸς μο β. ὁ δὲ ϛ ἑνὸς μο γ ἴσοι τετραγώνοις. καὶ τοῦτο τὸ εἶδος καλεῖται διπλοϊσότης, ἰσοῦται δὲ τὸν τρόπον τοῦτον. ἰδὼν τὴν ὑπεροχὴν ζήτει δύο ἀριθμούς, ἵνα τὸ ὑπ' αὐτῶν ποιῇ τὴν ὑπεροχήν. εἰσὶ δὲ μο δ καὶ μονάδος τέταρτον. τούτων ἤτοι τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἡμι-

σου ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι, ἢ τῆς συνθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι. ἀλλὰ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἐστὶ σκε ξδ. ταῦτα ἴσα ϛ ἑνὶ μονάσι δυσὶ, καὶ γίνεται ὁ ϛ ϟζ ξδ. τῆς δὲ συνθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἐστὶ σπθ ξδ. ταῦτα ἴσα τῷ μείζονι, τουτέστι ϛ ἑνὶ μονάσι τρισί. καὶ γίνεται ὁ ϛ πάλιν ϟζ ξδ. ἔσται ἄρα ὁ προστιθέμενος ϟζ ξδ. καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλῆν ἰσότητα ἐμπέσῃ, δεικτέον οὕτως. τῷ δύο καὶ τῷ τρία προσευρεῖν τινα ἀριθμὸν ὃς ἑκατέρῳ προστεθεὶς ποιεῖ τετράγωνον. ζητῶ πρότερόν τινα ἀριθμὸν ὃς προσλαβὼν μονάδας δύο ποιεῖ τετράγωνον, ἢ καὶ τίς ἀριθμὸς προσλαβὼν μονάδας τρεῖς ποιεῖ τετράγωνον. ἀφ᾽ οἷου δ᾽ ἂν τετραγώνου ἀφέλω τὰς μονάδας οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ ἐπὶ τῶν μονάδων δύο, καὶ ἀφαιρήσθωσαν ἀπὸ δυνάμεως μιᾶς, λοιπὸν ἔσται δύναμις μία λεῖψει μο β. καὶ δῆλον ὡς ἐὰν προσλάβῃ μονάδας β ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ᾽ ἐὰν προσλάβῃ μονάδας τρεῖς, γίνεται δύναμις μία, μονὰς μία. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛ ἑνὸς λεῖψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὴν τῆς δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προσκειμένας τῆς λείψεως μονάδας, οἷον ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος τὰς μονάδας β. οὕτως γὰρ ἐν ἑκατέρῳ αὐτῶν μέρει ἓν εἶδος ἑνὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω ἀπὸ ϛ ἑνὸς λεῖψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δύναμις μία, μο ιϛ λεῖψει ϛϛ η. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάδι μιᾷ. κοι-

li semissis in se ductus æquatur minori, vel summæ semissis in se ductus æquatur maiori. Sed interualli semissis in se ductus facit 225/64. hoc æquatur 1 N. + 2. & fit 1 N. 97/64. Summæ verò semissis in se ductus facit 289/64 hoc æquatur maiori, nimirum 1 N. + 3. & fit 1 N. rursus 97/64. Erit igitur addendus numerus 97/64 & manifestum propositum.

Ne autem in duplicatam æqualitatem incidamus, sic agendum. Inuenire numerum qui & ad 2. & ad 3. additus, vtrumque quadratum efficiat. Quæro prius numerum aliquem qui adsumens binarium faciat quadratum, vel quis numerus adiecto ternario fiat quadratus. Porro à quocunque quadrato subtraxero 2. vel 3. is erit qui quæritur. Agamus de 2. is auferatur ab 1 Q. superest 1 Q. − 2. & est euidens hunc si adsumat 2. fore quadratum. Sed si adsumat 3. fit 1 Q. + 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum vt resolutis hypostasibus 1 Q. superet ipsas ante positas defectus vnitates, nimirum 2. Sic enim ex vtraque parte vna species vni speciei æqualis relinquetur. Esto ergo ab 1 N. − 4 ipse quadratus erit 1 Q. + 16 − 8 N. Hoc æquatur 1 Q. + 1. Com-

munis

munis addatur defectus, & auferantur à similibus similia, relinquuntur 8 N. æquales 15. & fit 1 N. $\frac{15}{8}$ Ad positiones. Erit addendus numerus $\frac{15}{8}$.

ἡ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ἀριθμοὶ η ἴσοι μονάσι ιε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιε^η. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔσται ὁ προστιθέμενος λζ^{ις}.

IN QVAESTIONEM XII.

DVPLICI operatione quæstionem hanc eleganter absoluit Diophantus, sed neutram Scholiastes, Xilanderve satis feliciter explicauit. Sanè quod ad primam attinet, in qua duplicata æqualitate vtitur author, benè monet vterque eam niti primæ secundi. Sed id solùm non sufficit vt eius adæquata ratio perfectè comprehendatur, nam licet inuenerimus duos quadratos eodẽ interuallo distantes quo distant dati numeri ea lege vt maior maiorem datorum superet, & minor minorem, non statim constat per hanc duplicatam æqualitatem vtrobique reperiri eundem valorem Numeri, quod vnum curandum est vt quæstio perfectè soluta sit. Hoc ergo sic demonstrabimus. Sint dati Numeri A B. quorum interuallum C. Ponendo ergo quæsitum numerum 1 N. erunt quadrato æquandi 1 N. + A & 1 N. + B. sumantur duo quadrati D E eodem interuallo C distantes, ita vt D sit maior quàm A, & E sit maior quàm B. Dico siue D æquetur 1 N. + A. siue E æquetur 1 N. + B. eundem vtrobique reperiri valorem Numeri. Quia enim ex constructione est in arithmetica medietate A ad B vt D. ad E. erit & permutando in eadem medietate A ad D, sicut B ad E. Igitur si sumatur F excessus D super A, erit idem F excessus E super B. Cùm ergo æquando D cum 1 N + A. detrahentur similia à similibus, nimirum cùm A vtrimque auferetur, remanebit F æqualis 1 N. sed etiam æquando E cum 1 N + B auferetur vtrimque. B & remanebit idem F æqualis 1 N. Quare constat propositum. 7.2.porism.

A		B
1 N. + 30.		1 N. + 6.
	C 24.	
D 49.	F 19.	E 25.

Hoc demonstrato, patet totum duplicatæ æqualitatis negotium in eo versari, vt inueniantur duo quadrati eodem interuallo distantes quo distant dati numeri, quod sanè fit per Canonem postremum ad præcedentem allatum, qui vt ostensum est, totus pẽdet à tertia secundi porismatum, quæ eadem est cum quinta secundi elementorum. Verùm quilibet quadrati quorum sit idem interuallum qui & datorum numerorum, non statim apti sunt duplicatæ æqualitati resoluendæ, sed tales deligendi sunt, vt maior superet maiorem datorum numerorum, & minor minorem.

Hoc quidem vidit Scholiastes, sed in eo allucinatus est, vt benemonet Xilander, quod arte certa tales quadratos reperiri possenegauit. Ipse quoque Xilander in affinem eius quem reprehendit errorem lapsus meliora non affert, sed indicata tantum necessitate tales quadratos reperiendi, quo pacto id fieri oporteat, minimè docet. Res tamen facilis est, nam tales numeri sumendi sunt quorum mutuo ductu fiat datum interuallum, vt summæ illorum semissis quadratus excedat maiorem datorum numerorum, vt in exemplo Diophanti, vbi interuallum est 1. maior numerorum 3. oportet inuenire duos numeros quorum mutuo ductu fiat 1. & quorum summæ semissis quadratus sit maior quàm 3. Quare cùm summæ ipsius quadratus sit quadruplus quadrati semissis, oportet summæ quadratum excedere 12. Proinde cùm latus proximè maius ipsius 12. sit 3 $\frac{1}{2}$. necesse est summam quæsitorum numerorum quorum mutuo ductu fiat 1. excedere 3 $\frac{1}{2}$ vel sanè non esse minorem. Hinc est cur abiectis 2. & $\frac{1}{2}$. Itemque 3. & $\frac{1}{3}$. selegerit Diophantus 4. & $\frac{1}{4}$. potueritque eorum loco sumere 5. & $\frac{1}{5}$. vel 6. & $\frac{1}{6}$. aliosque infinitos, quorum summa maior est quàm 3 $\frac{1}{2}$. Ita si dati numeri sint 30. & 6. cùm eorum interuallum sit 24; maior verò ipsorum 30. cuius quadruplum 120; quærendi erunt duo numeri quorum mutuo ductu fiat 24, ita vt eorum summæ quadratus excedat 120. Quare cùm radix proximè maior ipsius 120. sit 11, oportebit quæsitorum numerorum summam esse maiorem quàm 11. vel certè non minorem. Quarè ritè sumi poterunt 2. & 12. vel 3. & 8. aliique infiniti quorum

summa maior, vel non minor quàm 11. sed eandem ob causam reiicientur 4. & 6. aliiq; infiniti quorum summa minor quàm 11.

Quod attinet ad secundam operationem verba, illa ὥστε τὴν τῆς δυνάμεως ὑπόστα-
σιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προεκτεθείσας τῆς λείψεως μονάδας, alio mendo non labo-
rant, quicquid dicat Xilander, nisi quod vox τετάρτης temerè inculcata erat, nam le-
gebatur in codice manuscripto, αὐτὰς τὰς προεκτεθείσας τῆς τετάρτης λείψεως μονά-
δας. Cæterùm hac voce sublata, reliqua bene habent, nec vllam pariunt difficultatem,
nisi ex praua Xilandri interpretatione, qui ea sic conuertit. *vt substantia quadrati*
earum superet ipsas ante positas defectus vnitates. Cùm tamen vox Hypostasis hoc lo-
co & alibi semper apud Diophantum significet, non ipsas vnitates quæ ponuntur in
latere fictitio, sed ipsum valorem numeri vel quadrati positionibus applicatum, vt iam
docuimus ad primam primi. Hinc etiam erroris ansam præbuit Xilander Christo-
photo Clauio cap. 29. ænigmate 98. sed & Raphaël Bombellius in eodem lapsus est
lib. 3. suæ Algebræ Problemate 66. Quare relictis illorum inutilibus commentis, ge-
nuinus horum verborum sensus hic est. *vt quadrati hypostasis superet ipsas ante positas*
defectus vnitates, vel vt clarioris doctrinæ gratia interpretati sumus, *vt resolutus hypo-*
stasibus 1 Q superet ipsas ante positas defectus vnitates. Cùm enim quæsitus numerus
positus sit 1 Q – 2. manifestum est valorem quadrati talem reperiri debere vt superet
2. Id autem arte certa qui consequi possis non docuit hîc Diophantus. Sed profectò
in sequentibus sæpe tali vtitur artificio quoties simile quid accidit. Quia numerus æ-
quandus quadrato est 1 Q + 1. patet si eius latus fingatur 1 N – aliquot vnitatibus va-
lorem Numeri oriri diuidendo quadratum ipsarum vnitatum vnitate multatum per
duplum earundem vnitatum. Quia vero 1 Q vt dictum est debet esse maior quàm 2.
sumpto latere proximè maiore ipsius 2, nimirum 1 $\frac{1}{2}$. oportet valorem numeri maio-
rem esse, vel certe non minorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. Igitur eò redacti sumus vt inueniamus nu-
merum, cuius quadratus vnitate multatus & diuisus per duplum ipsius numeri, det
quotientem maiorem vel certè non minorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. Esto huiusmodi numerus
1 N. ergo $\frac{1 Q - 1}{2 N}$ maior est vel certè non minor quàm 1 $\frac{1}{2}$. & omnia multiplicando per
2 N. fit 1 Q – 1. non minor quàm 3 N, ac proinde 1 Q. non minor quàm 3 N. + 1. qua
æquatione resoluta, fit 1 N. non minor quàm √ 3 $\frac{1}{4}$ + 1 $\frac{1}{2}$. sumptoque latere ipsius 3 $\frac{1}{4}$.
nimirum 1 $\frac{4}{5}$ si ei addas 1 $\frac{1}{2}$. fit 1 N. non minor quàm 3 $\frac{3}{10}$. Quamobrem æquantes qua-
drato 1 Q. + 1. fingemus eius latus 1 N. – quotlibet vnitatibus quæ superent 3 $\frac{3}{10}$. sic Dio-
phantus finxit hoc latus 1 N. – 4. Possetque etiam fingi 1 N. – 5, vel 1 N – 6. & sic in in-
finitum. Itaque vt ista tyronum memoriæ firmius inhæreant, placet paulò aliter po-
sitiones instituere, quod fieri posse indicauit Diophantus his verbis. *Porro à quocunq;*
quadrato subtraxero 2. vel 3, is erit qui quæritur. Ponatur quæsitus numerus 1 Q. – 3. is
enim adsumpto 3. quadratum facit: At idem adsumpto 2. facit 1 Q – 1. Hoc ergo
æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt hyposta-
sis quadrati superet ipsas ante positas defectus vnitates, nimirum 3. vt ergo determi-
nemus de hoc vnitatum numero, quia fiet valor Numeri diuidendo quadratum quæ-
sitarum vnitatum auctum vnitate per duplum earundem vnitatum; At oportet 1 Q.
maiorem esse quàm 3. atque adeo 1 N. maiorem esse vel certè non minorem latere
proximè maiore ipsius 3. quod est 2. Patet eò nos adduci vt inueniamus numerum, cu-
ius quadratus vnitate auctus, & diuisus per duplum ipsius numeri det quotientem nõ
minorem quàm 2. Esto huiusmodi numerus 1 N. ergo $\frac{1 Q + 1}{2 N}$ maior est, vel certè non
minor quàm 2. & omnia in 2 N. Igitur 1 Q. + 1. maior est vel certè non minor quàm
4 N. Qua æquatione resoluta fit 1 N. vel 2 + √ 3. vel 2 – √ 3. & loco √ 3 su-
mendo latus proximè minus ipsius 3. nempe 1 $\frac{2}{3}$. fit 1 N. vel maior quàm 3. $\frac{2}{3}$ vel
minor quàm $\frac{1}{3}$. Hic enim ob valorem Numeri duplicem, duplex inuenitur terminus
alter supra quem, alter verò infrà quem, sumi potest valor Numeri. Possumus ergo
quadrato æquantes 1 Q. – 1. eius latus fingere ab 1 N. – quotlibet vnitatibus quæ
sint maiores quàm 3 $\frac{2}{3}$. vel minores quàm $\frac{1}{3}$. fingatur 1 N. – 4. fiet quadratus 1 Q.
– 8 N. + 16. æqualis 1 Q. – 1. & tandem 1 N. est $\frac{17}{8}$ vnde fit quæsitus numerus
$\frac{97}{64}$. idem qui repertus est per operationẽ Diophanti. Fingatur rursus latus Quadrati
1 N. – $\frac{1}{5}$ fiet quadratus 1 Q. – $\frac{2}{5}$ N. + $\frac{1}{25}$ æqualis 1 Q. – 1. vnde fit 1 N. $\frac{13}{5}$ & est
quæsitus numerus $\frac{94}{25}$. cui addendo 3. & 2. fiunt quadrati $\frac{169}{25}$ & $\frac{144}{25}$.

Si cui porrò laborioſior videbitur hæc operatio, licebit etiam aliam inſtituere magis expeditam, & quæ tantas difficultates minimè patiatur. Fingatur in eodem exemplo, quadratus aliquis ab 1 N. + tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet maiorem datorum numerorum 3. puta ab 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N. + 4. Hinc ergo auferendo 3. ſtatuatur reſiduum quæſitus numerus, nempe 1 Q. + 4 N. + 1. is enim adſumens 3. facit quadratum. Reſtat vt & adſumpto 2. quadratum faciat. Facit autem 1 Q. + 4 N. + 3. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus fingo 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 3. vnitates numeri quadrato æquandi, eſto latus illud 1 N. − 3. fiet quadratus 1 Q. − 6 N. + 9. æqualis 1 Q. + 4 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{6}{10}$ eſtque quæſitus numerus $\frac{76}{25}$ vt ſuprà. Ex his omnibus operationibus varij Canones elici poſſunt, ſed omnium facillimus à prima fit, nimirum.

Cape duos quadratos eodem interuallo diſtantes quo & dati numeri diſtant, ſed illis maiores, & à maiore quadrato aufer maiorem numerum, vel à minore minorem, reſiduum quod erit idem vtrobique, quæſitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XIII.

ADATIS duobus numeris auferre eundem numerum, & facere reſiduum vtrumque quadratum. Iniunctum ſit vt à 9. & à 21. auferatur idem numerus, & vtrumque reſiduum ſit quadratus numerus. Qualemcunque verò quadratum aufero de altero ipſorum, ſtatuam reliquum eum huius defectu, is enim detractus relinquet quadratum. Eſto igitur quadratus à 9. detractus 1 Q. relinquentur ergo 9 − 1 Q. Oportet igitur etiam à 21. auferre 9 − 1 Q. & facere quadratũ. Sed ſi à 21. abſtuleto 9. − 1 Q. relinquitur 1 Q. + 12. Hoc ergo æquatur quadrato Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt quadratum earum amplius ſit quàm 12. Sic enim rurſus ab vtraque parte vna ſpecies vni ſpeciei æqualis relinquetur. Eſto itaque vnitatum 4. ipſe igitur quadratus erit 1 Q. + 16. − 8 N.

ΑΠΟ δοθέντων [δύο] ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ θ. καὶ τοῦ κα. ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. οἷον δ' ἂν τετράγωνον ἀφέλω ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν, τάσσω τὸν λοιπὸν λείψει τούτου, οὗτος γὰρ ἀφαιρούμενος καταλείπει τετράγωνον. ἔστω οὖν ὁ ἀπὸ τῶν μο θ ἀφαιρούμενος τετράγωνος δύναμις μία, λοιπαὶ ἄρα μονάδες θ λείψει δυνάμεως α. δεήσει ἄρα καὶ ἀπὸ μο κα ἀφελεῖν μο θ λείψει δυνάμεως μιᾶς καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ μο κα ἀφέλω μο θ λείψει δυνάμεως α λοιπὸν δύναμις α μο ιβ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ· πλάσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ς ἑνὸς λείψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνον πλείονας ποιεῖν τῶν μο ιβ. οὕτω γὰρ πάλιν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἐν εἶδος ἑνὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω δὴ μο δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς, μο ις λείψει ςς η.

ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάσι ιβ. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ςς^{οἱ} η ἴσοι μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ^{ων}. αἱ μὲν θ μονάδες συνάγουσιν οβ^{ων}. τουτέστι φοςξδ. ἡ δὲ λεῖψις δυνάμεως μιᾶς ἀφαιρεῖ ἀπ' αὐτῶν ιςξδ. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

qui æquabitur 1 Q. + 12. Auferantur à similibus similia: relinquuntur 8 N. æquales 4. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Atqui 9. faciunt $\frac{36}{4}$, seu $\frac{576}{64}$. vnde defectus 1 Q. auferatur, scilicet $\frac{16}{64}$. & satisfit proposito.

IN QVAESTIONEM XIII.

LIMITATIO quam præscribit Diophantus circa latus fictitium, omnino insufficiens est. Quod si libet experiri finge illud 1 N. − 8. quandoquidem quadratus ipsius 8. excedit 12. fiet quadratus 1 Q. − 16 N. + 64. æqualis 1 Q. + 12. & fiet 1 N. 3 $\frac{1}{4}$. Quare quæsitus numerus qui positus erat 9 − 1 Q. haberi non poterit, quia 1 Q. est maior quàm 9. Itaque cùm duo præscribendi essent termini intra quos cadere debet numerus vnitatum ponendus in latere fictitio, vnum duntaxat præfiniuit Diophantus, nimirum 12. seu potius latus ipsius 12. Quod cùm sit paulò minus quàm 3 $\frac{1}{2}$. rectè dicemus cum Diophanto numerum illum vnitatum debere superare 3 $\frac{1}{2}$. vel certè non esse minorem. Sed hoc non sufficit, nam præterea necesse est, talem fieri valorem Numeri vt resoluendo hypostases 1 Q. sit minor quàm 9. quia scilicet quæsitus numerus positus est 9 − 1 Q. Quare oportet 1 N. minorem esse quàm 3. Quia ergo æquando quadrato 1 Q. + 12. & fingendo latus 1 N − aliquot vnitatibus, fit valor Numeri ex quadrato vnitatum illarum multato numero 12. & diuiso per duplum sui lateris, eo redigimur vt inueniamus talem vnitatum numerum, cuius quadratus multatus numero 12. & diuisus per duplum sui lateris, det quotientem minorem quàm 3. Esto talis numerus 1 N. Ergo $\frac{1Q - 12}{2N}$ minor est quàm 3. & omnia in 2 N. fit 1 Q. − 12. minor quàm 6 N. & tandem fit 1 Q. minor quàm 6 N. + 12. qua resoluta æquatione fit 1 Q. minor quàm √ 21. + 3. seu minor quàm 7 $\frac{3}{5}$ ferè. Quamobrem necesse est omnino numerum vnitatum ponendarum in latere fictitio cadere inter 3 $\frac{1}{2}$ & 7 $\frac{3}{5}$ quales sunt 4. 5. 6. 7. & alij infiniti admittendo fractiones.

Cæterùm, vt benè monet Xilander, hæc quæstio non secus ac præcedens per duplicatam æqualitatem ritè solui potest. Verbi gratia si dati sint numeri 9. & 21. Ponatur quæsitus ab vtroque auferendus 1 N. ergo tam 9. − 1 N. quàm 21. − 1 N. æquatur quadrato. Horum interuallum est 12. Quare tales seligendi sunt numeri, quorum mutuo ductu fiat 12. vt semissis summæ illorum quadratus sit minor quàm 21. vel quod idem est, vt semissis interualli quadratus sit minor quàm 9. ob contrariam scilicet rationem eius, ob quam in præcedente requirebatur contrarium. Memores igitur eorum quæ docuimus in præcedente, quia quadruplum ipsius 21. est 84. dicemus numerorum quorum mutuo ductu fiet 12. summæ quadratum minorem esse debere quàm 84. Quare cùm proximum latus de 84. sit 9 $\frac{1}{6}$. oportebit summam talium numerorum minorem esse quàm 9 $\frac{1}{6}$. qualis est summa ipsorum 2. & 6. vel ipsorum 3. & 4. & aliorum infinitorum. Quod si sumamus 2. & 6. erit quadratus semissis summæ illorum 16. at quadratus semissis interualli fiet 4. Siue igitur 4 æquetur 9. − 1 N. siue 16. æquetur 21. − 1 N. fiet vtrobique idem valor numeri 5. Quare 5. est quæsitus numerus, qui ab vtroque datorum detractus relinquit quadratos 4. & 16. Hinc etiam cum Xilandro eliciemus Canonem.

Sume duos quadratos eodem distantes interuallo, quo dati numeri distant, sed minores illis. Tum à maiore numero aufer maiorem quadratum, vel à minore minorem. Residuum quod erit idem vtrobique, quæsitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XIV.

AB eodem numero auferre duos datos numeros, ita vt residuum vtrumque sit quadratus numerus. Constitutum sit ab eodem numero auferre 6. & 7. & vtrumque residuum facere quadratum. Ponatur quæsitus numerus 1 N. & si ab eo abstulero 6. relinquitur 1 N. − 6. æqualis quadrato. Si autem abstulero 7. relinquitur 1 N. − 7. & rursus in hoc casu duplicata æqualitas existit. Et quoniam horum interuallum, puta 1. continetur sub 2. & $\frac{1}{2}$ fiet tandem 1 N. $\frac{121}{16}$ & satisfacit proposito.

Ne verò in duplicatam æqualitatem deueniatur, sic indagabimus. Quæremus primò à quo numero 6. subtractus, relinquat quadratum. Cæterùm cuicunque quadrato adiiciamus 6. is erit qui quæritur. Esto igitur quadrato 1 Q. erit ergo qui quæritur 1 Q. + 6. & patet si ab eo auferantur 6. relinqui quadratum. Oportet igitur auferre quoque 7. ab 1 Q. + 6. & facere quadratum. Quamobrem 1 Q. − 1. æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. − 2. Ipse igitur quadratus erit 1 Q. + 4. − 4 N. Hoc æquatur 1 Q. − 1. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Erit ergo qui quæritur $\frac{121}{16}$ & soluit quæstionem.

ΑΠΟ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. [ἐπιτετάχθω ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀφαιρεῖν τὸν ϛ καὶ τὸν ζ. καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον.] τετάχθω ὁ ζητούμενος ϛ^ο α. καὶ ἐὰν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω μονάδας ϛ λοιπὸς ϛ^ο α λεῖψει μ^ο ϛ ἴσος τετραγώνῳ, ἐὰν δὲ μονάδας ζ. λοιπὸς ϛ^ο εἷς λεῖψει μ^ο ζ. καὶ πάλιν ὁμοίως ἐπὶ τούτου ἐστὶν ἡ διπλοϊσότης. ἐπειδὴ περ ἡ ὑπεροχὴ μονὰς οὖσα μία περιέρχεται ὑπὸ μ^ο β. καὶ μονάδος ἡμίσεος. καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς ρκα^{ις}. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλῆν ἴσωσιν ἐξέρχηται. ζητητέον οὕτως. ζητῶ πρότερον ἀπὸ τίνος ἀριθμοῦ ἐὰν ἀφέλω μ^ο ϛ ποιεῖ τετράγωνον. ᾧ δ' ἂν τετραγώνῳ δηλονότι προσθῶ τὰς μ^ο ϛ. ἐκεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ δυνάμεως μιᾶς. ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος δύναμις α μονάδες ϛ. καὶ δῆλον ὡς ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλω μ^ο ϛ ὁ λοιπὸς ἔσται τετράγωνος. δεήσει ἄρα καὶ μονάδας ζ. ἀφελεῖν ἀπὸ τῆς δυνάμεως μιᾶς μ^ο ϛ. καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δύναμις ἄρα μία λεῖψει μονάδος μιᾶς ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛ^ο α λεῖψει μ^ο β. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δύναμις μία, μονάδες δ λεῖψει ϛϛ^ο δ. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ λεῖψει μονάδος μιᾶς. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε^δ. ἔσται ὁ ζητούμενος ρκα^{ις}. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XIIII.

PRIMAE operationi, in qua vtitur duplicata æqualitate Diophantus, nullam adiicit conditionem, nec adiicienda est aliqua, vt malè arbitratur Xilander. Cùm enim quadrati qui capiuntur eodem distantes interuallo quo & dati numeri, addendi sint ipsis datis numeris, minor scilicet maiori, & maior minori, patet vt additio perfici possit non referre vtrum tales quadrati maiores sint datis numeris, vel minores. Quod in duabus præcedentibus circumspiciendum erat, quia in illis subtractione vtendum fuit non additione; allucinatus ergo est Xilander existimans vtendum hîc eadem cautione in huiusmodi quadratis deligendis, qua fuit vtendum in duodecima. quod & exemplo ab ipsomet allato confirmare facile est. Sint dati numeri 41. & 65. quorum interuallum 24. quod fit ex 4. in 6. vel ex 3. in 8. hos tamen binos rem expedire posse negat Xilander, idque constare experientia ait. Sed sanè constat experientia falli Xilandrum. Nam ipsorum 4. & 6. summæ & interualli semisses sunt 5. & 1. quorum quadrati 25. & 1. Quare si addas 1. ad 65. vel 25. ad 41. fiet vtroque modo quæsitus numerus 66. vt patet. Rursus ipsorum 3. & 8. summæ & interualli semisses sunt $\frac{11}{2}$ & $\frac{5}{2}$ quorum quadrati $\frac{121}{4}$ & $\frac{25}{4}$ & si addas ad 65 vel $\frac{121}{4}$ ad 41. fit vtroque modo quæsitus numerus 71 $\frac{1}{4}$ qui satisfacit proposito.

Porrò vt modus hîc vtendi duplicata æqualitate perfectè demonstratus maneat, sint dati numeri A maior & B minor, horumque interuallum C. & ponatur quæsitus numerus 1 N. Igitur æquandi quadrato erunt 1 N. − A. & 1 N. − B. Sumantur itaque duo quilibet quadrati D maior & E minor, quorum interuallum sit idem C. Quia ergo ob maiorem defectum totus 1 N. − A minor est toto 1 N. − B. æquabimus illi minorem quadratum E, maiorem verò D huic. Et in prima æquatione supplendo defectum, fiet 1 N. æqualis summæ ipsorum A E. At in secunda fiet 1 N. æqualis B D. summa autem ipsorum A E æqualis est prorsus summæ ipsorum B D, quia cùm sint arithmeticè proportionales A ad B vt D ad E, [a] est summa extremorum A E æqualis summæ mediorum B D. Quamobrem in vtraque æquatione fit idem valor Numeri. Quod demonstrandum erat. Hinc elicitur Canon à Xilandro traditus.

1 N. − A 30.	1 N. − B 6.
C 24.	
E 25.	D 49.

[a] 4. 1. porif.

Cape duos quadratos eodem distantes interuallo, quo & dati numeri, horum minorem adde maiori numero, & maiorem minori, vtroque modo fiet idem quæsitus numerus.

Secundæ verò operationi vt perficitur à Diophanto, limitatio quædam adiicienda erat; nam cùm numerus quadrato æquandus sit 1 Q − 1. debet eius latus fingi ab 1 N. − tot vnitatibus, vt tandem valor quadrati inueniatur excedēs 1. Quare si eodem vtaris artificio, quo vsi sumus in præcedentibus, inuenies latus illud fingendum esse ab 1 N − aliquo vnitatum numero maiore quàm 1. vel minore quàm 1. alioquin si ponatur latus illud 1 N. − 1. reperietur 1 Q. − 1 nihil esse. Ita si propositi numeri sint 30. & 6. ponatur quæsitus 1 Q. + 6. vnde auferendo 30. remanet 1 Q − 24. æquandus quadrato. Cuius latus fingēdum ab 1 N. − tot vnitatibus vt tandem 1 Q. sit maior quàm 24. Quare cùm latus proximè maius ipsius 24. sit 5. oportet 1 N. non minorem esse quàm 5. fit autem 1 N. ex quadrato vnitatum quæ ponuntur in latere fictitio, adsumente numerum 24. diuisoque per duplum sui lateris. Ponatur ergo hic vnitatum numerus 1 N. Igitur $\frac{1 Q. + 24}{2 N}$ maior est vel saltem non minor quàm 5. & omnia in 2 N. fit 1 Q. + 24. non minor quàm 10 N. Qua æquatione resoluta fit 1 N. vel 6. vel 4. Quare oportet talem poni in latere fictitio vnitatum numerum, vt sit non minor quàm 6. vel non maior quàm 4. Qua ratione excluduntur tantùm omnes numeri inter 4. & 6. fingatur ergo latus 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q. − 8 N. + 16. æqualis 1 Q. − 24. Vnde fiet 1 N. 5. erit ergo quæsitus numerus 31. & satisfacit proposito. Vel fingatur idem latus 1 N. − 6. fiet rursus 1 N. 5. & quotiescunque sumentur duo numeri vnus maior quàm 6. alter minor quàm 4. ita vt maior ad ipsum 6. eandem habeat rationem quam habet 4. ad minorem, eadem per vtramque æquationem continget solutio. Ita si eiusdem numeri 1 Q. − 24. latus fingas 1 N. − 2. vel 1 N. − 12. fiet idem va-

lor Numeri 7. Itemque siue fingas idem latus 1 N. − 3. siue 1 N. − 8. fiet idem valor Numeri $5\frac{1}{2}$. & sic de aliis. Quod adnotasse fuit operæpretium.

Potest tamen operatione paulum immutata, tam laboriosæ conditionis necessitas euanescere. Si videlicet, ponatur quæsitus numerus 1 Q. + maiore datorum numerorum, vt in exemplo Diophanti ponatur quæsitus numerus 1 Q. + 7. hinc ergo detracto 6. remanet 1 Q. + 1. æquandus quadrato, cuius latus fingo ab 1 N − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 1. & manifesta est solutionis ratio. Ita si dati sint numeri 30 & 6. Pono quæsitum 1 Q. + 30. vnde auferendo 6. remanet 1 Q. + 24. æquandus quadrato, cuius latus fingo ab 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 24. Hinc etiam licebit elegantem formare Canonem.

Datorum numerorum interuallum aufer ab aliquo quadrato, residuum diuide per duplum lateris eiusdem quadrati, quotientis quadratus additus maiori datorum numerorum, quæsitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XV.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, qui vtramque partem adsumens faciat quadratum. Sit diuidendus 20. in duos numeros. Exponantur duo numeri, vt quadrati eorum simul minores sint quàm 20. puta 2. & 3. & si vtrique adiiciatur 1 N. erunt quadrati ab ipsis, hic quidem 1 Q. + 4 N. + 4. Ille verò 1 Q. + 6 N. + 9. Si ergo ab vtroque abstulero 1 Q. qui vtique quadratus est, habebo quæsitos numeros, qui ad sumentes videlicet quadratum, facient quadratum. Sed si abstulero 1 Q. relinquuntur, hinc quidem 4 N. + 4. Inde verò 6 N. + 9. Oportet ergo summam istorum, nimirum 10 N. + 13. æquari 20. & fit 1 N. $\frac{7}{10}$. Est igitur hic quidem $\frac{68}{10}$. ille verò $\frac{132}{10}$. & satisfaciunt quæstioni.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον. ὃς προσλαβὼν ἑκάτερον τῶν διῃρημένων ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω τὸν κ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς. ἐκθοῦ δύο ἀριθμοὺς ὥστε τοὺς ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνους ἐλάσσονας εἶναι μ° κ. ἔστω δὴ ὁ δύο καὶ ὁ τρία. καὶ προστεθέντος ἑκατέρῳ ς^ο^ ἑνός, ἔσονται οἱ ἀπὸ τούτων τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ςς δ μ° δ. ὃς δὲ δυνάμεως μιᾶς ςς ς μ° θ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ἑκατέρου ἀφέλω τὴν δύναμιν, τουτέστι τὸν τετράγωνον ἕξομαι τοὺς ἐπιζητουμένους, οἳ προσλαμβάνοντες δηλονότι τετράγωνον ποιοῦσι τετράγωνον. ἀλλ᾽ ἐὰν ἀφέλω δύναμιν μίαν λοιποὶ ἔσονται. ὁ μὲν ςς δ μ° δ. ὁ δὲ ςς ς μ° θ. δεήσει ἄρα τὴν σύνθεσιν αὐτῶν, τουτέστιν ςς^οι^ ι. μ° ιγ. ἴσους εἶναι μονάσιν κ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ^ι. ἔσται ὁ μὲν ξη^ι. ὁ δὲ ρλβ^ι. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XV.

IN hac quæstione nulla est difficultas. Cur velit Diophantus sumi duos numeros, quorum quadrati simul minores sint numero diuidendo nemo est qui non videat. Itaque ex operatione ipsa hunc formamus Canonem.

Sume duos numeros quorum quadrati simul minores sint numero diuidendo, horum quadratorum summam aufer à numero diuidendo, residuum diuide per duplum summæ sumptorum numerorum, orietur latus quæsiti quadrati, cuius duplum si ducas seorsim in sumptos numeros, & productis addas seorsim quadratos sumptorum numerorum, fient quæsitæ partes numeri diuidendi.

Vt si datus sit numerus 33. sume duos numeros 2. & 3. quorum quadrati simul faciunt 13. quo detracto de 33. supersunt 20. quæ diuisa per duplum ipsorum 2. & 3. nimirum per 10. dant 2. latus quadrati quæsiti, cuius duplum 4. ductum sigillatim in ipsos 2. & 3. facit 8. & 12. quibus si addas seorsim quadratos eorundem 2. & 3. nempe ipsi 8. quadratum 4. & ipsi 12. quadratum 9. fient 12. & 21. quæsitæ partes numeri 33. quibus addendo eundem quadratum 4. fiunt quadrati 16. & 25.

QVÆSTIO XVI.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον ὃς λοιπὸν ἑκάτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω πάλιν τὸν κ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ τετάχθω ὁ ζητούμενος τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ς^ο ἑνὸς καὶ μ^ο τοσούτων, ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῶν μὴ ὑπερβάλλειν τὸν κ̄. ἔστω δὴ ς^ο ἑνὸς μ^ο β̄. ὁ ἄρα τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ςς δ̄ μ^ο δ̄. καὶ δῆλον ὡς λοιπῶν ἀριθμοὺς δ̄ μονάδας δ̄ καταλείπει τετράγωνον, καὶ ὁμοίως λιπῶν ςς^οὺς β̄ μ^ο γ̄. καταλείπει τετράγωνον δυνάμεως μιᾶς, ςς β̄ μ^ο ᾱ. τάσσω οὖν διὰ ταῦτα τὸν μὲν πρῶτον ςς δ̄ μ^ο δ̄. τὸν δὲ δεύτερον ςς β̄ μ^ο γ̄. τὸν δὲ ζητούμενον δύναμιν μίαν, ςς^οὺς δ̄ μ^ο δ̄. καὶ λεῖψις ἑκατέρου ποιεῖ τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ τοὺς δύο ἴσους εἶναι τῷ διαιρουμένῳ. ἀλλ' οἱ δύο ποιοῦσιν ς^οὺς ς̄ μ^ο ζ̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν κ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιγ̄^ς. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ος̄^ς. ὁ δὲ δεύτερος μδ̄^ς. ὁ δὲ τετράγωνος χκε̄^λς. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, à quo vterque detractus, relinquat quadratum. Numerus diuidendus iterum esto 20. Ponatur is qui quæritur quadratus à latere 1 N. cum tot vnitatibus, vt harum quadratus non superet 20. Esto ab 1 N. + 2. Quadratus ergo erit 1 Q. + 4 N. + 4. & patet si hinc auferantur 4 N. + 4. relinqui quadratum, & similiter si hinc auferantur 2 N. + 3. relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. + 2 N. + 1. Statuo igitur, hac de causa, primum quidem 4 N. + 4. Secundum verò 2 N. + 3. Quæsitum autem 1 Q. + 4 N. + 4. & hic dempto vtroque illorum, facit quadratum. Superest vt ambo simul æquentur numero diuidendo. Sed ambo simul faciunt 6 N. + 7. Hoc ergo æquatur 20. Auferantur à similibus similia, & fit 1 N. $\frac{13}{6}$. erit ergo primus $\frac{76}{6}$ secundus $\frac{44}{6}$. Quadratus autem $\frac{625}{36}$. & faciunt postulata.

IN QVAESTIONEM XVI.

Frvstra laborat Scholiastes, vt implicatum Theorema nobis obtrudat quasi necessarium ad intelligendam operationem Diophanti, cùm illo carere possimus absque vllo artis dispendio. Etenim cùm ponat Diophantus quadratum quæsitum 1 Q. + 4 N. + 4. quem finxit à latere 1 N. + 2 Primò euidens est cur alteram partẽ numeri diuidendi ponat 4 N. + 4. quia scilicet, his ablatis à quadrato exposito, relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. Deinde vt aliam partem numeri diuidendi reperiat, fingit alium quadratum ab 1 N. + certo vnitatum numero minore quàm 2. qui positus est in latere quæsiti quadrati, puta ab 1 N. + 1. fitque quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. quo detracto à quæsito quadrato 1 Q. + 4 N. + 4. remanet alia pars numeri diuidendi, nimirum 2 N. + 3. vnde etiam colligitur aliter atque aliter sumi posse partes numeri diuidendi, eodem etiam quadrato exposito manente, prout ab eo detrahentur alij atque alij minores quadrati.

Quod autem attinet ad limitationem quam præscribit Diophantus circa latus quæsiti quadrati, illud scilicet fingendum esse ab 1 N. + tot vnitatibus quarum quadratus non superet numerum diuidendum, hanc ego nec sufficientem puto, nec omnino necessariam. Sufficiens quidem non est, quia etsi obseruetur deueniri poterit ad absurdum. Nam ponatur latus quæsiti quadrati 1 N. + 4. erit ipse quadratus 1 Q. + 8 N. + 16. cuius vnitates minores sunt numero diuidendo 20. vnde constat obseruatam esse limitationem præscriptam. Si tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 8 N. + 16. Altera verò 2 N. + 7. quæ habetur si ab exposito quadrato auferatur quadratus à latere 1 N. + 3. nimirum 1 Q. + 6 N. + 9. erit summa duarum partium 10 N. + 23. æqualis 20. Quod est impossibile. Non est etiam necessaria huiusmodi conditio, quia quamuis non seruetur, ritè tamen perfici poterit æquatio. Etenim fingatur quadratus quæsitus à latere 1 N. + 5. erit is 1 Q. + 10 N. + 25. cuius vnitates excedunt numerum diuidendum 20. contrà id quod præcipit Diophantus. Tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 2 N. + 9. quæ habetur si ab exposito quadrato auferatur quadratus à latere 1 N. + 4. nimirum 1 Q. + 8 N. + 16. Rursus ponatur pars altera 1 N. + 4 $\frac{3}{4}$. quæ habetur si à quadrato exposito auferatur quadratus à latere 1 N. + 4 $\frac{1}{2}$. nimirum 1 Q. + 20 $\frac{1}{4}$. Erit partium summa 3 N. + 13 $\frac{3}{4}$. æqualis 20. Vnde fiet 1 N. $\frac{25}{12}$. Ad hypostases erunt quæsitæ partes $\frac{82}{12}$ & $\frac{158}{12}$. Quadratus quæsitus $\frac{7225}{144}$. à latere $\frac{85}{12}$. A quo quadrato si auferas sigillarim partes inuentas, remanent quadrati $\frac{6241}{144}$. & $\frac{5329}{144}$. quorum latera $\frac{79}{12}$. & $\frac{73}{12}$. Aliter igitur præscribenda est conditio huic operationi, nimirum. Ponatur quadratus quæsitus à latere 1 N. + quotlibet vnitatibus. Tum fingantur alij duo minores quadrati ab 1 N. + tot vnitatibus, vt harũ quadratis sigillatim detractis à quadrato vnitatum primi quadrati, duo residua simul minora sint numero diuidendo. Hoc autem facillimum factu est, quia dato quolibet quadrato, licet inuenire infinitos minores quadratos, distantes à dato quadrato, interuallo minore quàm quilibet præscriptus numerus. Verbi gratia dato quadrato 25. si velim minores quadratos quibus sigillatim à 25. detractis, supersit minùs quàm 10. quia detrahendo 10. a 25. superest 15. oportet quæsitos quadratos minores quidem esse, quàm 25. sed maiores quàm 15. Quare cùm latus 25. sit 5. At latus proximè maius ipsius 15. sit 4. Patet quadratos omnes à lateribus inter 4. & 5. quales sunt à lateribus 4. 4 $\frac{1}{4}$ 4 $\frac{1}{2}$ 4 $\frac{3}{4}$ &c. satisfacere proposito. Hinc est cur posito quadrato quæsito 1 Q. + 10 N. + 25. quærendi erant duo quadrati, quibus sigillatim detractis à 25. residua simul minora essent quàm 20. Quia verò quolibet residuo existente minore quàm 10. sequebatur vtrũque simul minorẽ esse quàm 20. finxi latera quæsitorũ quadratorũ 1 N. + 4 & 1 N. + 4 $\frac{1}{2}$. quia singuli quadrati ipsorum 4. & 4 $\frac{1}{2}$ minores sunt quàm 10. vt ostensũ est. Simili artificio rectificari poterit operatio illa qua deductione ad absurdum ostendimus insufficiẽtiam Diophantææ limitationis. Etenim ponendo eundem quadratum quæsitum 1 Q. + 8 N. + 16. esto pars vna vt prius 8 N. + 16. Cùm ergo ex conditione præscripta constet vnitates vtriusque partis simul minores esse debere numero diuidendo 20. si in vna parte sint 16. vnitates, patet in alia debere esse minùs quàm 4. Oportet igitur fingere quadratum ab 1 N. + tot vnitatibus, vt earum quadratus detractus de 16. relinquat minus quàm 4. Oportet ergo quadratum illarum vnitatum maiorem esse quàm 12. minorem quàm 16. Quare cùm latus

ipsius 16. fit 4. & latus proximè maius ipsius 12. fit $3\frac{1}{2}$ sumendus erit quilibet vnitatum numerus à $3\frac{1}{2}$ inclusiuè vsque ad 4 exclusiuè, quales sunt $3\frac{1}{2}$. $3\frac{2}{3}$. $3\frac{3}{4}$. & alij infiniti. Ita si fingas quadratum ab 1 N. + $3\frac{1}{2}$. erit quadratus 1 Q. + 7 N. + $12\frac{1}{4}$. quo detracto à quæsito quadrato 1 Q. + 8 N. + 16. superest secunda pars numeri diuidendi, nimirum 1 N. + $3\frac{3}{4}$. Quare summa partium fit 9 N. + $19\frac{3}{4}$ æqualis 20. Qua æquatione resoluta, optimè satisfit proposito.

Ex dictis apparet quàm infinitis varijs modis positiones institui possint, & solutiones diuersæ reperiri, nam primò quæsitus quadratus variè fingi potest. Deinde eodem manente quadrato quæsito, partes numeri diuidendi diuersimodè fingi possunt. Sed & Diophantus rursus lib. 3. quæst. 23. hanc ipsam retractans quæstionem alia operatione negotium absoluit, quam ibi explicabimus.

QVÆSTIO XVII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ τοῦ ἐπιταχθέντος τετραγώνου ποιῇ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, ἑκάτερον δ' αὐτῶν μετὰ μο θ̅ ποιεῖν τετράγωνον. ἀφ' οὗ δ' ἂν τετραγώνου ἀπὸ πλήθους ςς καὶ μο [γ] ἀφέλω μο θ̅. οὗτος ἔσται εἷς τῶν ζητουμένων. ἔστω οὖν ὁ ἐλάσσων δυνάμεως α̅ ςς ϛ̅. ὁ ἄρα μείζων ἔσται δυνάμεων γ̅ ςς ιη̅. δεήσει ἄρα καὶ τοῦτον προσλαβόντα μο θ̅ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ γίνονται δυνάμεις γ̅ ςς ιη̅ μο θ̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς δύο λεῖψει μο τριῶν, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο λ̅. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μο ͵απ̅. ὁ δὲ μείζων ͵γσμ̅. καὶ ποιοῦσι μετὰ μονάδων θ τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt vterque cum quadrato qui proponetur faciat quadratum. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum, vtrumque autem adscito 9. facere quadratum. Hîc à quocunque quadrato cuius latus sit multitudo quælibet numerorum + vnitatum 3. detraxero 9. residuum erit alter quæsitorum. Esto igitur minor 1 Q. + 6 N. erit ergo maior 3 Q. + 18 N. Oportet itaque & hunc adsumpto 9. facere quadratum. Sed facit 3 Q. + 18 N. + 9. Hóc ergo quadrato æquale est. Fingo quadratum à 2 N. − 3. & fit 1 N. 30. Erit igitur minor 1080. maior verò 3240. & vterque adiecto 9. facit quod postulatur.

IN QVAESTIONEM XVII.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ei qui superiorum omnium quæstionum artificium perfectè comprehenderit, nihil hîc obscurum videbitur. Vnum moneo numeri 3 Q. + 18 N. + 9. latus non solùm fingi posse à quolibet Numerorum numero cuius quadratus superet 3 Q. cùm defectu vnitatum 3. lateris scilicet ipsius 9. vt faciat Diophantus qui ponit hoc latus 2 N. − 3. sed etiam fingi posse à numero Numerorum cuius quadratus superet 3. & cuius sextuplum sit minus quàm 18. adiectis tot vnitatibus quot sunt in latere quadrati dati 9. nimirum 3. Idcirco fingi potest hoc latus 2 N. + 3. vel $2\frac{1}{2}$ N. + 3. & sic ad + 3. adiungi potest quilibet numerus Numerorum qui cadat inter 2. & 3. Hac ratione fingendo huiusmodi latus 2 N. + 3. fit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. æqualis 3 Q. + 18 N. + 9.

& fit 1 N. 6. suntque numeri quæsiti 72. & 216. qui satisfaciunt postulatis.

Sed & sine magna perplexitate, quicquid dicat Xilander, per duplicatam æqualitatem solui quæstio potest. Nam ponatur minor numerus 1 N. est ergo maior 3 N. Quare vtrique adiciendo 9. sunt quadrato æquandi 1 N. + 9. & 3 N. + 9. Horum interuallum est 2 N. Sumendi ergo sunt duo numeri quorum mutuo ductu fiant 2. N. ita tamen vt tam in semisse summæ quàm in semisse interualli eorum reperiatur 3. latus quadrati adiecti 9. vt scilicet in æquationis vtraque parte reperiantur 9. vnitates, quibus vtrimque ablatis, maneat æquatio inter numeros & quadratos. Oportet ergo inuenire duos numeros, quorum mutuo ductu fiant 2. N. ita vt in eorum summa, & in eorum interuallo reperiantur vnitates 6. Quare sunt huiusmodi numeri 6. & $\frac{1}{3}$ quorum interualli semissis $3 - \frac{1}{6}$ N. cuius quadratus 9 − 1 N. + $\frac{1}{36}$ Q. æquatur 1 N. + 9. & fit 1 N. 72. suntque quæsiti numeri vt supra 72. & 216. Sed sanè hac ratione operando vnica tantum reperiri potest solutio, cùm alij numeri præter 6. & $\frac{1}{3}$ N. sumi non possint, quorum mutuo ductu fiant 2 N. ob causam allatam. Quare maluit Diophantus aliam inire viam, qua infinitæ solutiones contingunt. Cæterùm ex hac vltima operatione formari potest Canon satis expeditus.

Denominatorem rationis vnitate multatum diuide per quadruplum lateris propositi quadrati, per quotientis quadratum diuide rursus semissem denominatoris vnitate aucti, orietur minor quæsitorum numerorum.

Quoniam verò hîc desiderari videntur aliquot quæstiones non inelegantes, & ad hanc tractationem pertinentes, placet illas subnectere.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, cuius denominator sit quadratus numerus, vt vterque cum numero qui proponetur faciat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque adscito 10. faciat quadratum. Fingatur quadratus ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus superet 10. puta ab 1 N. + 4. fiet quadratus 1 Q. + 8 N. + 16. vnde auferendo 10. residuum 1 Q. + 8 N. + 6. statuatur pro minore quæsitorum numerorum, is enim adscito 10. quadratum facit. Itaque maior erit 4 Q. + 32 N. + 24. qui adscito 10. fiet 4 Q. 32 N. + 34. æquandus quadrato, quod facilè fiet, quia quadratorum numerus est quadratus, fingatur enim latus eius 2 N. − tot vnitatibus quarum quadratus superet 34. puta 2 N. − 6. & fiet 1 N. $\frac{1}{28}$. Ad hypostases. Minor numerus est $\frac{4929}{784}$. maior $\frac{19716}{784}$. & vtrique addendo 16. fiunt quadrati $\frac{12769}{784}$ & $\frac{27556}{784}$ quorum latera $\frac{113}{28}$ & $\frac{166}{28}$. Posset etiam hæc quæstio per duplicatam æqualitatem solui, sed vtendum esset eo modo duplicatæ æqualitatis quem tradit Diophantus quæstione decima octaua tertij, cuius hic explicandi locus non est. Quare ipsam operationem hîc non afferam, sed Canonem pulcherrimum qui ab ea elicitur non dissimulabo.

Ducito denominatorem rationis vnitate multatum in datum numerum, Tum cape duos quadratos hoc producto differentes, ab horum minore si auferas datum numerum, relinquetur maior quæsitorum.

Vt in nostra hypothesi ducito 3. in datũ numerum 10. fit 30. Cape duos quadratos quorum interuallũ sit 30. per Canonem vndecimæ huius, ita tamẽ vt minor illorũ excedat 10. Infinitos tales reperies, quales sunt $\frac{169}{4}$. & $\frac{49}{4}$. Igitur si à minore auferas 10. relinquitur $\frac{9}{4}$. maior quæsitorum numerorum, quare patet minorem esse $\frac{9}{16}$. & vtrique si addas 10. fiunt quadrati $\frac{49}{4}$. & $\frac{169}{16}$.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, cuius denominator sit quadratus numerus, vt vterque multatus dato numero relinquat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque detracto 5. relinquat quadratum. Ponatur minor 1 Q. + 5. nam detracto 5. relinquet quadratum, erit ergo maior 4 Q. + 20. vnde auferendo 5. relinquitur 4 Q. + 15. æquandus quadrato, fingatur eius latus 2 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus sit minor quàm 15. vel etiam 2 N. – tot vnitatibus, quarum quadratus superet 15. Fingatur ergo 2 N. + 3. erit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. æqualis 4 Q. + 15. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. sunt ergo quæsiti numeri 5 $\frac{1}{4}$. & 21. qui satisfaciunt proposito. Potest etiam sicut & præcedens per duplicatam æqualitatē solui quæstio. Sed ob causam allatam omissa ipsa operatione, canonem inde depromptum afferre sufficiet, nimirum,

Denominatorem rationis vnitate multatum ducito in datum numerum; Tum cape duos quadratos hoc producto differentes, maiori adde datum numerum, fiet maior quæsitorum.

QVAESTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros in data ratione cuius denominator sit quadratus numerus, vt vterque detractus à dato numero relinquat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque detractus à 20. relinquat quadratum. Ponatur minor 20 – 1 Q. hic enim detractus à 20. relinquit quadratum. Ergo maior erit 80 – 4 Q. quem si à 20. detrahas, relinquitur 4 Q. – 60. æquandus quadrato fingatur eius latus a 2 N. – tot vnitatibus, vt hypostasis quadrati reperiatur minor quàm 20. quia scilicet alter quæsitorum numerorum positus est 20 – 1 Q. Cùm igitur in huiusmodi æquatione valor Numeri fiat ex quodam quadrato adiciscente 60. & diuiso per quadruplum sui lateris, valor autem numeri debeat esse minor quàm latus ipsius 20. putà quàm 4 $\frac{1}{2}$. eò redacti sumus vt inueniamus quadratum, qui auctus numero 60. & diuisus per quadruplum sui lateris det quotientem minorem quàm 4 $\frac{1}{2}$. Esto is 1 Q. ergo $\frac{Q. + 60}{4 N.}$ minor est quàm 4 $\frac{1}{2}$. & omnia in 4 N. fit 1 Q. + 60. minor quàm 18 N. qua resoluta æquatione fit 1 N. 9 + ℞. 21. vel 9 – ℞. 21. seu per radicis approximationem 13 $\frac{1}{2}$. vel 4 $\frac{1}{2}$. Hinc ergo patet latus quadrati qui quæritur cadere necessariò inter 4 $\frac{1}{2}$. & 13 $\frac{1}{2}$. Ponatur igitur 10. & fingatur quadratus à latere 2 N. – 10. erit is 4 Q. – 40. N. + 100. æqualis 4 Q. – 60. & fit 1 N. 4. suntque quæsiti numeri 4 & 16.

Non secus etiam ac præcedentes soluetur hæc quæstio per duplicatam æqualitatem, & Canon huiusmodi ex illa operatione formabitur.

Datum numerum ducito in denominatorem rationis vnitate multatum. Tunc cape duos quadratos hoc producto differentes, & minorem aufer à dato numero. Residuum erit maior quæsitorum.

QVÆSTIO XVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, καὶ ἔτι δοθέντα ἀριθμὸν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι τὸ πέμπτον, καὶ ἔτι μονάδας ϛ. τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον καὶ μονάδας ζ. τὸν δὲ τρίτον τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον καὶ μο η. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος

INVENIRE tres numeros, vt si quisque proximè ipsum sequenti partem sui quæ imperatur tribuat, & præterea datum numerum, dantes & accipientes æquales fiant. Imperetur vt primus det secundo sui quintantem, & adhuc vnitates 6. secundus tertio sui sextantem, & præterea 7. Tertium primo sui septantem & vnitates 8. Ponatur primus 5 N. se-

eundus

cundus ſimiliter 6 N. & ſecundus accipiens à primo 1 N. + 6. fit 7 N. + 6. Dans autem tertio ſui ſextantem, puta 1 N. & præterea 7. remanent 6 N. − 1. Supereſt vt & reliqui datis acceptiſque quæ imperantur fiant 6 N. − 1. ſed primus dans ſui quintantem, & præterea vnitates 6. relinquitur 4 N. − 6. Oportet ergo vt accipiendo à tertio ſeptantem, & vnitates 8. fiat 6 N. − 1. ſed ſi 4 N. − 6. accipiant 2 N. + 5. fiunt 6 N. − 1. Igitur 2 N. + 5. eſt pars ſeptima tertij, & præterea 8. Si ergo à 2 N. + 5. abſtulero 8. reſiduum 2 N. − 3. eſt pars ſeptima tertij. Ipſe igitur tertius eſt 14 N. − 21. Supereſt vt & hic accipiens à medio ſextantem, & vnitates 7. dans autem ſui ſeptantem & vnitates 8. fiat 6 N. − 1. ſed dando ſui ſeptantem & vnitates 8. reſiduum eſt 12 N. − 26. accipiendo verò ſextantem medij & vnitates 7. fit 13 N. − 19. Hoc igitur æquatur 6 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{18}{7}$. Erit ergo primus $\frac{90}{7}$ ſecũdus autem $\frac{108}{7}$. Tertius denique $\frac{105}{7}$. & hi ſoluunt quæſtionẽ.

ςς ε̄. ὁ δὲ δεύτερος ὁμοίως ςς ς̄. καὶ μένει ὁ δεύτερος παρὰ μὲν τοῦ πρώτου λαβὼν ςον ἕνα μο ς̄. ἀριθμοὶ ζ̄. μονάδες ς̄. δοὺς δὲ τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον ςον ἕνα, καὶ μο ζ̄. γίνονται ἀριθμοὶ ς̄ λείψει μονάδος μιᾶς. [λοιπόν ἐστι καὶ τοὺς λοιποὺς δόντας καὶ λαβόντας γίνεσθαι ςς ς̄ λείψει μονάδος μιᾶς.] ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος τὸ ἑαυτοῦ πέμπτον καὶ ἔτι μονάδας ς̄. γίνεται ςς δ̄ λείψει μο ς̄. δεήσει ἄρα καὶ λαβόντα αὐτὸν παρὰ τοῦ τρίτου τὸ ἕβδομον καὶ μο η̄. γίνεσθαι ςς ς̄ λείψει μονάδας μιᾶς. ἀλλ᾽ ἐὰν ςοι δ̄ λείψει μο ς̄ προσλάβωσιν ςςοὺς β̄ μο ε̄. γίνονται ςςοι ς̄ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀριθμοὶ ἄρα β̄ μο ε̄. μέρος ἕβδομον εἰσὶ τοῦ τρίτου καὶ ἔτι μονάδες η̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ςς β̄ μο ε̄. ἀφέλω μονάδας η̄. λοιποὶ ςςοι β̄ λείψει μο γ̄. ἕβδομον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἔσται ςς ιδ̄ λείψει μο κα. λοιπὸν ἄρα δεήσει καὶ τοῦτον λαβόντα παρὰ μὲν τοῦ μέσου τὸ ἕκτον καὶ μο ζ̄. δόντα δὲ τὸ ἕβδομον καὶ μο η̄. γίνεσθαι ἀριθμοὺς ς̄ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀλλὰ δοὺς μὲν τὸ ἕβδομον καὶ μο η̄. λοιπός ἐστι ςς ιβ̄ λείψει μο κς̄. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ μέσου τὸ ἕκτον, καὶ μο ζ̄. γίνονται ςςοι ιγ̄ λείψει μο ιθ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμοῖς ς̄ λείψει μονάδος μιᾶς, καὶ γίνεται ὁ ς ιη ζ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϙ ζ. ὁ δὲ δεύτερος ρη̄ ζ. ὁ δὲ τρίτος ρε̄ ζ. καὶ οὗτοι ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVIII.

Hæc quæſtio parum differt à vigeſimaquinta primi, vt iam ibi monuimus. Nam quæruntur eo loco tres numeri, quorum quiſq; vbi proximè ſequẽti dederit certam ſui partem, inter dantes & accipientes fiat æqualitas. Hîc vero præterea requiritur, vt pręter certam ſui partem quilibet det ſequenti certum etiam numerum, quod parum aut nihil difficultatis adiicit operationi. Cæterùm quid de hac quæſtione, & decima nona ſentiam, dicam ad ſequentem.

QVÆSTIO XIX.

ΤΟΝ * δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμοὺς τρεῖς ὅπως ἕκαστος τὸν ἐκ τῆς διαιρέσεως τῷ ἑξῆς αὐτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, καὶ ἔτι δοθέντα ς″ ἵνα δόντες, καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι. ἐπιτετάχθω δὴ ⓢ π̄. διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ πρῶτος τῷ δευτέρῳ διδῷ τὸ πέμπτον, καὶ ἔτι μονάδας ς̄. ὁ δὲ δεύτερος τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον, καὶ μº ζ̄. ὁ δὲ τρίτος τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον, καὶ μº η̄. ἵνα μετὰ τὴν ἀντίδοσιν γίνωνται ἴσοι. * Τετάχθω ὁ πρῶτος ςς ε̄. καὶ ὁ δεύτερος μº ιβ̄. καὶ μένει ὁ δεύτερος λαβὼν παρὰ μὲν τοῦ πρώτου τὸ πέμπτον ςς ἕνα καὶ μº ς̄ γινόμενος ς″ α̅. μº ιη̄. δοὺς δὲ τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον, καὶ ἔτι μº ζ̄. γίνεται ς″ α. μº θ̄. λοιπόν ἐστι, καὶ τοὺς λοιποὺς δόντας καὶ λαβόντας γίνεσθαι ς″ ἑνὸς μº θ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον καὶ μº ς̄ λοιπός ἐστι ςς δ̄ λείψει μº ς̄. δεήσει ἄρα καὶ αὐτὸν λαβόντα τὸ ἕβδομον τοῦ τρίτου καὶ μº η̄. γίνεσθαι ς″ ἑνὸς μº θ̄. καὶ ἐὰν λάβῃ μº ιε̄ λείψει ςς γ̄. γίνεται ς″ α̅ μº θ̄. μονάδες ἄρα ιε̄ λείψει ἀριθμῶν γ̄. ἕβδομον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου, καὶ ἔτι μονάδες η̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ μονάδων ιε̄ λείψει ἀριθμῶν γ̄. ἀφέλωμεν μº η̄. ἕξομεν τὸ τοῦ τρίτου ἕβδομον μº ζ. λείψει ςς γ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται μº μθ̄ λείψει ςς κα̅. λοιπόν ἐστι καὶ τοῦτον λαβόντα μὲν παρὰ τοῦ μέσου τὸ ἕκτον καὶ μº ζ. δόντα δὲ τῷ

DATVM * numerũ diuidere in tres numeros, quorum quiſque vbi proximè ſequenti dederit partem ſui quæ imperatur, & præterea datum numerum, inter eos exiſtat æqualitas. Inſtitutum ſit numerum 80. diuidere in tres numeros, vt primus ſecundo det ſui quintantem, & præterea 6. Secundus tertio det ſui ſextantem, & vnitates 7. Tertius primo det ſui ſeptantem, & vnitates 8. & poſt mutuam contributionem, fiant çquales. * Ponatur primus 5 N. ſecundus 12. & ſecundus accipiens à primo quintantem, puta 1 N. & prçterea 6. fit 1 N. + 18. dans autem tertio ſextantem ſui & adhuc 7. relinquitur 1 N. + 9. Reſtat vt & reliqui datis & acceptis quæ imperantur, fiant 1 N. + 9. ſed primus cùm dedit ſui quintantem & vnitates 6. remanet 4 N. − 6. Oportet ergo vt accipiens ſeptantem tertij, & vnitates 8. fiat 1 N. + 9. ſed ſi accipiat 15 − 3 N. fit 1 N. + 9. Igitur 15 − 3 N. eſt ſeptima pars tertij, & præterea 8. Quamobrem ſi à 15 − 3 N. ſubducamus vnitates 8. habebimus tertij ſeptantem, nimirum 7 − 3. N. Ipſe igitur tertius erit 49 − 21 N. Supereſt vt & hic accipiens quidem à medio ſextantem & vnitates 7. dans autem

primo sui septantem & vnitates 8. fiat 1 N. + 9 sed datis acceptisque quæ imperãtur, fit 43 − 18 N. Hæc ergo æquantur 1 N. + 9. & fit 1 N. $\frac{34}{19}$. Erit igitur primus $\frac{170}{19}$. Secundus $\frac{228}{19}$. Tertius $\frac{217}{19}$.

πρώτῳ τὸ ἕβδομον, καὶ μ° η. γίνεται ςς ᾱ μ° θ. ἀλλὰ δοὺς καὶ λαβὼν γίνεται μ° μγ λεί ςς ιη. ταῦτα ἴσα ς° ἑνὶ μονάσι θ. καὶ γίνεται ὁ ς λδ ιθ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρο ιθ. ὁ δὲ δεύτερος σκη ιθ. ὁ δὲ τρίτος σιζ ιθ.

IN QVAESTIONES XVIII. ET XIX.

Pedibus eo in Xilandri sententiam suspicantis hanc & præcedentem quæstionem huic quadratorũ tractationi temerè insertas esse, siue ab imperito librario vt putat ille, siue potius vt reor à sciolo quopiam qui è tredecim libris Diophanti nonnullas in vnum colligens quæstiones, eos quos habemus præ manibus Arithmeticorum libros consarcinauit. Sanè si Diophanto tribuendæ sunt, hæ duæ quæstiones, in primum librum retrahendę videntur, & collocandę post vigesimam quintam, à qua parum differunt, vt iam indicauimus; ista præsertim, quæ illius operationem quàm proximè imitatur. Quicquid sit, certissimum est totam huius propositionem adulterinam esse, & verba illa omnia quæ asteriscis inclusimus, esse penitus eliminanda, sufficitque si loco propositionis ei præfigatur Ἄλλως. Verè enim à præcedenti non differt hæc quæstio, sed est eadem prorsus aliter tractata, quod familiare est Diophanto, vt constat ex decima octaua & decima nona primi, ex vigesima & vigesima-prima, & rursus ex vigesima-tertia & vigesima-quarta eiusdem. Ac etiam ex octaua & nona huius: Sed & ipsam hanc operationem non conuenire numero 80. vel etiam alij certo & determinato numero optimè Xilander conuincit, ex eo quod Diophantus secundum quæsitorum ponit 12. quod nequaquam ritè in tali casu fieri posset, nisi iam cognito numero ipso qui quæritur, quod est absurdum. Cæterùm omissa propositione, cætera bene habent, neque vno corrupto vocabulo vel numero aliquo deficiente, & ita benè & ad amussim præcedenti propositioni cuncta conueniunt, vt mirum sit quomodo græculus ille tantum frontis habuerit, qui huic corpori caput alienum imponere tentauit.

Quod si quis fateatur quidem propositionem tractationi reliquæ non respondere, sed contendat nihilominus, ab alia quæstione quæ librariorum incuria exciderit, huc translatam huiusmodi propositionem, non valdè repugnabo, cùm simile quid accidisse libro quinto certissimis argumentis compertum habeam. Huic ergo vt satisfiat, quęstionem quoque, vt in Gręco proposita est, soluemus cum Xilandro, quem sanè immeritò recentiorum quidam arguere conati sunt, & de analyseos inscitia criminari, quia scilicet calculi errore lapsus, falsos exhibuit solutionis numeros. Cùm tamen optimo vtatur logismo, quo saluo calculi error viris doctis non debet imputari. Itaque vt tanto viro debita seruetur reuerentia, in huius quæstionis tractatione ipsamet eius verba referre non pigebit, à mendis duntaxat numerorum, vt par est, expurgata. Cùm tres numeri qui quæruntur, 80. summam conficiant, neque dum eorum partes adduntur detrahunturque, huic summę quicquam decedat, cùm quod vni aufertur, alteri adijciatur, & nihil excidat amittaturue; intelligere licet, æqualitatem trium numerorum vltimò existentem eam fore, vt quiuis sit triens ex 80. hoc est 26 $\frac{2}{3}$. Hoc animaduerso ponamus primum esse 1 N. ab eoque auferamus quæ dat secundo $\frac{1}{5}$ N. + 6. relinquitur $\frac{4}{5}$ N. − 6 hoc cum septante tertij & 8 æquabitur 26 $\frac{2}{3}$. Ergo à 26 $\frac{2}{3}$ auferas $\frac{4}{5}$ N. − 6 relinquuntur 32 $\frac{2}{3}$ − $\frac{4}{5}$ N. quod est 8. & septans tertij. Aufer 8. relinquitur septans tertij 24 $\frac{2}{3}$ − $\frac{4}{5}$ N. Ergo tertius est 172 $\frac{2}{3}$ − $\frac{3}{5}$ N. Huius & primi summa 172 $\frac{2}{3}$ − 4 $\frac{3}{5}$ N. detracta à 80. vtpote summa trium numerorum, relinquet scilicet secundum 4 $\frac{3}{5}$ N. − 92 $\frac{2}{3}$. Huic sextantem suum & 7. adimemus, nimirum $\frac{23}{30}$ N. − 8 $\frac{4}{9}$ relinquentur $\frac{23}{6}$ N. − 84 $\frac{2}{9}$. His si addamus $\frac{1}{5}$ N. + 6. quod ei à primo accedebat fient $\frac{121}{30}$ N. − 78 $\frac{2}{9}$ æqualia 26 $\frac{2}{3}$ ob causam

suprà demonstratam, adde vtrobique 78. $\frac{2}{3}$ erunt $\frac{363}{30}$ N. æquales $\frac{944}{3}$. hoc est 363 N. æquantur 9440. (alterum per 30. alterum per 9. erat multiplicandum, pro his sume minimos 10. & 3. vt alibi docui) fit 1 N. $\frac{9440}{363}$ primus. Secundus $\frac{9786}{363}$. Tertius ergo $\frac{9814}{363}$ quorum summa $\frac{29040}{363}$ idest 80. Cætera omnia congruere ad postulata quæstionis experiendo deprehendes. Hucusque Xilander.

Verùm longè facilius ad vitandas fractionum molestias instituentur positiones hac arte. Esto tertius 7 N. hic ergo dando sui septantem + 8. remanebit 6 N. − 8. quod cum sextante secundi & 7. æquatur 26 $\frac{2}{3}$. Quare à 26. $\frac{2}{3}$ auferendo 6 N. − 1. remanet sextans secundi nimirum 27. $\frac{2}{3}$ − 6 N. ergo secundus est 166. − 36 N. qui amisso sextante & 7. remanet 131 $\frac{1}{3}$ − 30 N. quod cum quintante primi & 6. æquatur 26 $\frac{2}{3}$. Quare si à 26 $\frac{2}{3}$ detrahas 137. $\frac{1}{3}$ − 30 N. remanet quintans primi, nimirum 30 N. − 110 $\frac{2}{3}$. est ergo primus 150 N. − 553 $\frac{1}{3}$. Restat vt trium summa conficiat 80. at conficit 121 N. − 387 $\frac{1}{3}$. Hæc ergo æqualia sunt 80. & fit 1 N. $\frac{1402}{363}$. Igitur tertius qui positus erat 7 N. erit $\frac{9814}{363}$. & alij qui prius.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μέσου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τῆς ὑπεροχῆς εἶναι τριπλασίονα. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων δυνάμεως μιᾶς. ὁ δὲ μέσος δυνάμεως μιᾶς, ςς β. μονάδος μιᾶς, ἀπὸ πλευρᾶς δηλονότι ς ἑνὸς μονάδος μιᾶς. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ςς η μ δ. δεῖ ἄρα καὶ δύναμιν μίαν ςς η μ δ ἴσα εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ς [ἑνὸς] ἵνα ἔχω τὴν δύναμιν, καὶ ἔτι μ τοσούτων ὡς τὰ λοιπὰ ἐν τῷ τετραγώνῳ γινόμενα εἴδη τῶν ςς καὶ τῶν μ μὴ ὑπερβάλλειν κατὰ τὸ πλῆθος τῶν ςς η. καὶ μ δ ἑκάτερα. ἀλλ' ὁ μὲν ἐλλείπειν, τὸ δὲ πλεονάζειν. ἔστω δὲ μ γ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ςς ς μ θ. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ ςς η μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ς μ β καὶ ἥμισυ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μέγιστος μ λ. δ΄. ὁ δὲ ἐλάχιστος μ ς. δ΄. ὁ δὲ μέσος μ ιβ. δ΄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE tres quadratos, vt interuallum maximi & medij, ad interuallum medij & minimi datam habeat tarionem. Statutum sit interuallum interualli rriplum esse. Ponatur minor 1 Q. Medius vero 1 Q. + 2 N. + 1. à latere nimirum 1 N. + 1. Maximus igitur erit 1 Q. + 8 N. + 4. Oportet igitur 1 Q. + 8 N. + 4. æquari quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. (vt habeam 1 Q.) & prærerea à tot vnitatibus, vt reliquæ species quæ in hoc quadrato reperientur, numetorum videlicet & vnirarum, non vtraque sua multitudine superent 8 N. & 4. vnitares, sed altera deficiat, altera excedat. Esto itaque à 3. vniratibus. Ipse ergo quadrarus erit 1 Q. + 6 N. + 9. æqualis vtique 1 Q. + 8 N. + 4. & fit 1 N. 2 $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit maximus 30 $\frac{1}{4}$. minimus 6 $\frac{1}{4}$. Medius 12 $\frac{1}{4}$. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XX.

OPERATIO Diophanti satis est facilis,& ad docendum accommodata. Quod ait numeri quadrato æquandi 1 Q. + 8 N. + 4. latus fingendum esse ab 1 N. + tot vnitatibus,vt species quæ repenentur in quadrato fictitio non vtraque sua multitudine excedant 8 N. + 4. sic accipiendum est,vt talis statuatur in latere vnitatum numerus, cuius quadratus superet 4. sed cuius duplum sit minus quàm 8. Nam quod ait Xilander non inueniri temerè exemplum, vbi pauciores vnitates, pluresque sint Numeri, non solùm id temerè non inuenietur, sed nec vnquam poterit inueniri. Etenim vt numeri alicuius quadratus sit minor quàm 4. oportet ipsum numerum esse minorem quàm 2. vt verò eiusdem numeri duplum sit maius quàm 8. oportet ipsum numerum esse maiorem quàm 4. At omnino impossibile est eundem numerum esse simul minorem quàm 2. & maiorem quàm 4. superest igitur, vt talis in latere fictitio ponatur vnitatum numerus, cuius quadratus sit maior quàm 4. & cuius duplum sit minus quàm 8. seu quod idem est, debet ille vnitatum numerus esse maior quàm 2. minor quàm 4. quales infiniti reperiuntur inter 2. & 4. sed Diophantus more suo ad vitandas fractiones, sumpsit 3. & finxit hoc latus 1 N. + 3. facilius tamen fingi potest huiusmodi latus absq; tali circumspectione, si ponatur 1 N. – tot vnitatibus quarum quadratus superet 4. vt si ponatur 1 N. – 6. fiet quadratus 1 Q. – 12 N. + 36. æqualis 1 Q. + 8 N. + 4. vnde fit 1 N. 2 $\frac{1}{2}$ vt prius. Cæterùm inuentis semel tribus quadratis proposito satisfacientibus, licebit absque noua operatione infinitos alios reperire idem præstantes, si iam inuenti quadrati ducantur in quemlibet quadratum, nam fient alij quadrati in iisdem rationibus cum iam inuentis quadratis. Quamobrem & eorum interualla eandem inter se rationem habebunt, quam habent interualla iam inuentorum quadratorum. Ita si inuentos quadratos 5 $\frac{1}{4}$. 12 $\frac{1}{4}$. & 30 $\frac{1}{4}$. ducas in quadratum 4. fient tres alij 25. 49. 121. idem præstantes, nam maiorum interuallum 72. triplum est interualli minorum, quod est 24. & sic alios infinitos eiusdem naturæ licebit inuenire.

Per hanc etiam quæstionem reperientur très quadrati in Arithmetica medietate. Hoc enim nil aliud est quàm reperire tres quadratos, vt maiorum interuallum sit æquale interuallo minorum. Quare ponatur minimus 1 Q. medius 1 Q. + 2 N. + 1. erit igitur maximus 1 Q. + 4 N. + 2. cuius latus fingetur 1 N. – tot vnitatibus, quarum quadratus superet 2. Verbi gratia 1 N. – 2 fiet quadratus 1 Q. – 4 N. + 4. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fiet 1 N. $\frac{1}{4}$. erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{1}{16}$ $\frac{25}{16}$ $\frac{49}{16}$. & si eos per eundem quadratum 16. multiplices, fient alij 1. 25. 49. quos si rursus per eundem quadratum 4 multiplices, fient rursus alij 4. 100. 196. & sic infiniti reperientur. Sed & alia operatione subtili sane & iucunda solui potest huiusmodi quæstio, etiamsi requiratur præterea vt medius quæsitorum quadratorum sit quilibet datus quadratus. Sint enim inueniendi tres quadrati in Arithmetica medietate, quorum medius sit 25. sume duplum ipsius 25. nempe 50. Quia ergo 50. componitur ex duobus quadratis 25. & 25. diuidatur rursus idem 50. in duos alios quadratos per decimam huius, sintque hi 1. & 49. dico istos esse minimum & maximum quæsitorum, quorum 25. est medius arithmeticè proportionalis, quia enim summa ipsorum 1. & 49. ex constructione, dupla est ipsius 25., erit 25. inter eos medius in arithmetica medietate. Quod erat propositum. Vnde cùm idem 50. rursus diuidi possit in duos alios quadratos infinitis variis modis, constat infinitos alios duos quadratos reperiri posse, inter quos 25. sit medius arithmeticè proportionalis. 5. 2. poris.

QVÆSTIO XXI.

INVENIRE duos numeros, vt vtriusque quadratus altero numero adiecto, faciat quadratum. Ponatur primus. 1 N.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν λοιπὸν ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ος ἑνός.

ὁ δὲ δεύτερος μονάδος μιᾶς ςς β. ἵν᾽ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιεῖ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον. ποιεῖ δυνάμεις δ ἀριθμοὺς ε μονάδα μίαν. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς β λείψει μ β. αὐτὸς [ἔσται δυνάμεων δ] μ δ λείψει ςς η. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ ιγ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ ιγ. ὁ δὲ δεύτερος ιθ ιγ καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

secundus 1 + 2 N. vt quadratus primi adſumens ſecundum, quadratum faciat. Supereſt vt & quadratus ſecundi primo adiecto faciat quadratum, ſed quadratus ſecundi adiecto primo efficit 4 Q. + 5 N. + 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 2 N. − 2. nempe 4 Q. + 4 − 8 N. & fit 1 N. $\frac{3}{13}$. Erit igitur primus $\frac{3}{13}$. ſecundus $\frac{19}{13}$. & ſoluunt quæſtionem.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος λείψει τοῦ λοιποῦ ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ςς α. καὶ μ ὅσων δή ποτε ἔστω δὴ μονάδος μιᾶς. ὁ δὲ μείζων τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετραγώνου παρὰ δύναμιν μίαν, ἵν᾽ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος λείψει τοῦ μείζονος ποιεῖ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνός ἐστι δυνάμις α ςς β μονὰς α. ὁ ἄρα μείζων ἔσται τῶν μετὰ τὴν δύναμιν ςς β μ μιᾶς, καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τετράγωνος λείψει τοῦ μείζονος ποιῶν τετράγωνον. δεῖ δὴ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος δυνάμεις δ ςς δ μονάδα μίαν, λείψει τοῦ ἐλάττονος ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ποιεῖ δυνάμεις δ ςς γ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάττω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς γ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ ε. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων η ε. ὁ δὲ μείζων ια ε. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE duos numeros vt vtriuſque quadratus, altero numero dempto quadratum faciat. Ponatur minor 1 N. & quotquot libuerit vnitatum, eſto itaque 1 N. + 1. Maior autem ſit quadratus minoris dempto 1 Q. vt minoris quadratus detracto maiore relinquat quadratum. Quia ergo minoris quadratus eſt 1 Q. + 2 N. + 1. vtique maior dempto 1 Q. erit 2 N. + 1. & patet minoris quadratum dempto maiore facere quadratum. Oportet itaque & maioris quadratum, puta 4 Q. + 4 N. + 1. detracto minore facere quadratum; ſed facit 4 Q. + 3 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 3. N. & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. erit igitur minor $\frac{8}{5}$. Maior $\frac{11}{5}$. & ſatisfaciunt propoſito.

IN QVAESTIONES XXI. ET XXII.

NIHIL hîc notatu dignum, quod non satis tum à Scholiaste, tum à Xilandro sit animaduersum.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE duos numeros, vt vtriusque quadratus adscita numerorum summa faciat quadratum. Ponatur minor 1 N. Maior verò 1 N. + 1. vt quadratus minoris, nimirum 1 Q. adsumens vtrumque puta 2 N. + 1. faciat quadratum. Superest vt & quadratus maioris adsumens vtriusque summam faciat quadratum. Sed maioris quadratus adiecta vtriusque summa fit 1 Q. + 4 N. + 2. Hoc ergo æquale est quadrato. Formo quadratum ab 1 N. − 2. ipse igitur quadratus erit 1 Q. + 4 − 4 N. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Esto ergo minor $\frac{1}{4}$. maior $\frac{5}{4}$. & soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς^{ου} ἑνός. ὁ δὲ μείζων ς^{ου} ᾱ μονάδος ᾱ. ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος, τουτέστι δύναμις μία προσλαβοῦσα συναμφότερον, τουτέστιν ςς^{οὶ} β̄ μονάδα ᾱ ποιῇ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνον προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος προσλαβὼν συναμφότερον γίνεται δύναμις ᾱ ςς^{οὶ} δ̄ μ° β̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς^{ου} ᾱ λείψει μ° β̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δύναμις ᾱ μ° δ̄ λείψει ςς^{ῶν} δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς β̄ η^{ων}. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων β̄ η^{ων} ὁ δὲ μείζων ῑ η^{ων}. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OBSCVRVM fortassis alicui videatur, quanam arte suas positiones ita instituat Diophantus, vt summa vtriusque numeri addita quadrato minoris faciat quadratum. Id autem sic consequitur, fingit quadratum ab 1 N. + quotlibet vnitatibus, verbi gratia ab 1 N. + 1. fitque quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Quare si ponamus summam numerorum 2 N. + 1. patet eam additã ad 1 Q. facere quadratum. Sed tunc vt satisfiat vni postulatorum, oportet 1 Q. esse quadratum vnius numerorum quæsitorum. Is ergo erit 1 N. quo detracto ex vtriusque summa quæ posita est 2 N. + 1. manet alter 1 N. + 1. Vnde patet priorem illum quadratum fingi potuisse à quolibet numero Numerorum + quotlibet vnitatibus. Verbi gratia fingatur à 2 N. + 3. fiet quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. Quare ponemus summam numerorum quæsitorum 12 N. + 9. ac proinde alterius quadratus cùm debeat esse 4 Q. erit alter ille 2 N. quo detracto à summa remanet alter 10 N. + 9. Itaque si hac operatione quæstionem absoluere libet, restat vt maioris quadratus, nimirum 100 Q. + 180 N. + 81. adscita vtriusque summa nempè 12 N. + 9. faciat quadratum, facit autem 100 Q. + 192 N. + 90. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus formo abs 10 N. − 30. & fit 1 N. $\frac{45}{44}$ sunt ergo quæsiti numeri $\frac{90}{44}$. & $\frac{846}{44}$.

Quod si velimus vti proprietate numerorum vnitate differentium, quibus accidit vt eorum summa æquetur interuallo quadratorum eorundem (quia scilicet ex summa numerorum in eorum differentiam,[1] fit interuallum quadratorum, & posita

differentia numerorum 1. productum ex summa in differentiam æquatur ipsi summæ) longè minore negatio rem expediemus. Etenim ponatur minor quæsitorum quilibet Numerorum numerus, puta 2 N. Tum ponatur maior idem Numerorum numerus + 1. puta 2 N. + 1. patet ex demonstratis vtriusque summam additam minoris quadrato efficere quadratum maioris. Restat igitur solùm vt eadem summa cum quadrato maioris faciat quadratum &c. Et ad hanc numerorum proprietatem fortasse respexit Diophantus, cùm ponat minorem numerum 1 N. maiorem 1 N. + 1. vnde sanè ex illius operatione facillimum elicio Canonem.

Quemlibet quadratum binario multatum diuide per duplum sui lateris auctum quaternario, orietur minor quæsitorum, & addita vnitate fiet maior.

QVÆSTIO XXIV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετραγώνος λείψει συναμφοτέρου ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς^ος α. [ὁ δὲ μείζων ς^ος α] μονάδος μιᾶς. ἵνα ὁμοίως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετραγώνος λείψει συναμφοτέρου ποιεῖ τετράγωνον. δέησει ἄρα καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἔσται ἄρα δύναμις μία λείψει ςς β μονάδος μιᾶς. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς^ου α λείψει μ^ο γ. δύναμις ἄρα μία, μ^ο θ λείψει ςς ς. ἴσα εἰσὶ δυνάμει μιᾷ λείψει ςς β μονάδος μιᾶς. καὶ γίνεται ὁ ς^ος μ^ο β καὶ ἥμισυ. [ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ^ο β καὶ ἥμισυ.] ὁ δὲ μείζων μ^ο γ καὶ ἥμισυ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros vt vtriusque quadratus dempta vtriusque numeri summa faciat quadratum. Ponatur minor 1 N. maior 1 N. + 1. vt similiter maioris quadratus dempta vtriusque summa faciat quadratum. Oportet igitur & minoris quadratum dempta summa vtriusque facere quadratum. Facit autem 1 Q. − 2 N. − 1. hoc æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 1 N. − 3 Igitur 1 Q. + 9 − 6 N. æquatur 1 Q. − 2 N. − 1. & fit 1 N. 2 $\frac{1}{2}$. erit igitur minor 2 $\frac{1}{2}$. maior 3 $\frac{1}{2}$. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM XXIV.

Hîc etiam euidens est Diophantum vsum proprietate numerorum quotum interuallum est vnitas, quibus, vt ostensum est, accidit summam ipsorum æquari interuallo quadratorum ab ipsis, vnde si quæsiti numeri ponantur vnitate differentes, patet eorum summam à maioris quadrato detractam relinquere quadratum minoris. Porro ex ipsa operatione elicitur huiusmodi Canon.

Quadratum quemlibet vnitate auctum diuide per duplum sui lateris binario multatum, orietur minor quæsitorum, cui addita vnitate fiet maior.

Possunt tamen etiam aliter institui positiones nulla habita ratione numerorum vnitate differentium. Nam ponatur primus Numerorum numerus quilibet + quotlibet vnitatibus. Verbi gratia, ponatur 1 N. + 3. erit eius quadratus 1 Q. + 6 N. + 9. Quare statuatur summa vtriusque 6 N. + 9. vt detracta à primi quadrato relinquat quadratum. Igitur cùm primus sit 1 N. + 3. hunc auferendo à 6 N. +

9. remanebit secundus 5 N. + 6. Restat vt ab huius quadrato qui est 25 Q. + 60 N. + 36. detrahendo summam vtriusque, nimirum 6 N. + 9. relinquatur quadratus, at remanent 25 Q. + 54 N. + 275. Hæc ergo æquantur quadrato sit eius latus 5 N. – 9. fiet 1 N. $\frac{1}{2}$. eruntque quæsiti numeri 3 $\frac{1}{2}$ & 7 $\frac{1}{2}$.

QVÆSTIO XXV.

INVENIRE duos numeros, vt summæ illorum quadratus, adiecto alterutro quadratum faciat. Quandoquidem 1 Q. siue ei adiicias 3 Q. siue 8 Q. quadratum facit. Pono quæsitorum numerorum alterum 3 Q. alterum 8 Q. quadratum verò summæ 1 Q. sic enim quadratus summæ adiecto alterutro facit quadratum. Et quia summa vtriusque est 11 Q. quadratus summæ erit 121 QQ. sed est quoque 1 Q. Igitur 121 QQ. æquantur 1 Q. Quamobrem & latus lateri æquale est. Proinde 1 N. æqualis est 11 Q. Omnia per numerum diuidantur. 11 N. æquales erunt 1. & fit 1 N. $\frac{1}{11}$. Ad positiones erit alter $\frac{3}{121}$ alter $\frac{8}{121}$. Quadratus verò summæ $\frac{121}{14641}$. Et satisfit quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συναμφοτέρου προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ δύναμις μία ἐάν τε προσλάβῃ δυνάμεις γ. ἐάν τε δυνάμεις η ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τῶν ἐπιζητουμένων ἀριθμῶν τὸν μὲν δυνάμεις γ. τὸν δὲ δυνάμεις η. τὸν δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου δυνάμεως μιᾶς, καὶ μένει ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῶν τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ συναμφότερός ἐστι δυνάμεις ια. ὁ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου ἔσται δυναμοδυνάμεων ρκα. ἀλλ' ἐστὶ καὶ δυνάμις μία. δυναμοδυνάμεις ἄρα ρκα ἴσαι δυνάμει μιᾷ, ὥστε καὶ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ ἴση. ἀριθμὸς ἄρα εἷς ἴσος δυνάμεσιν ια. καὶ πάντα παρὰ ἀριθμόν. ςς ἄρα ια. ἴσοι μονάδι μιᾷ [καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς] $α^{ια}$. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν $γ^{ρκα}$. ὁ δὲ ἕτερος $η^{ρκα}$. ὁ δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου $ρκα^{α\,δχμα}$. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXV.

POTERAT analysis Diophantæa breuius explicari sic. Quandoquidem 1 Q. siue ei adiicias 3 Q. siue 8 Q. quadratum facit. Pono quæsitorum numerorum alterum 3 Q. alterum 8 Q. Quadratum verò summæ 1 Q. erit ergo ipsa summa 1 N. Sed etiam 11 Q. Igitur 1 N. æquatur 11 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{11}$ Porro manifestum est loco 3. & 8. sumi posse quoslibet alios quadratos vnitate multatos, veluti 15. 24. 35. quorum duo quilibet nota Quadrati affecti, statui possunt pro quæsitis numeris, posito scilicet summam illorum esse semper 1 N. & eius quadratum 1 Q. Nam & quadratus summæ variari potest, & loco 1 Q. poni quilibet quadratorum numerus quadratus, vt 4 Q. 9 Q. 16 Q. Sed tunc oportet quæsitos numeros, statui quadratos multatos eodem ipso quadrato qui ponitur pro quadrato summæ, vt si ponatur quadratus summæ 4 Q. Ponentur quæsiti numeri 5 Q. & 12 Q. & sic de aliis. Praeterea dignum est animaduersione hanc quæstionem non ad duos tantùm, sed ad quotlibet numeros extendi posse, eadem prorsus artificio. Quærantur enim quatuor numeri, vt summæ illorum quadratus quolibet ex ipsis adiecto quadratum fa-

ciat. Pone quæsitos numeros 3 Q. 8 Q. 15 Q. 24 Q. & quadratum summæ 1 Q. erit ergo summa 1 N. sed est quoque 50 Q. Igitur fit 1 N. $\frac{1}{50}$ & sunt quæsiti numeri $\frac{3}{2500}$. $\frac{8}{2500}$. $\frac{15}{2500}$. $\frac{24}{2500}$. quorum summa $\frac{1}{50}$ cuius quadratus quolibet illorum adiecto quadratos facit, vt patet. Ex his demum Canonem eliciemus.

Sume tot quadratos, eodem aliquo quadrato multatos, quot petuntur numeri, hos ducito sigillatim in ablatitium quadratum, producta seorsim diuisa per quadratum summæ sumptorum numerorum quæsitos exhibent numeros.

QVÆSTIO XXVI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου λείψας ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον. λαμβάνω πρότερον τινὰ τετράγωνον. ἀφ᾽ οὗ ἀφελὼν δύο τινὰς ἀριθμοὺς καταλείπω τετράγωνον. ἔστω δὲ ὁ ις. αὐτὸς γὰρ ἐάν τε λείψῃ μονάδας ιβ γίνεται τετράγωνος. ἐάν τε πάλιν μο ζ. γίνεται τετράγωνος. τάσσω οὖν πάλιν αὐτοὺς ἐν δυνάμει, καὶ τὸν μὲν δυνάμεων ιβ. τὸν δὲ δυνάμεων ζ. τὸν δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου δυνάμεων ις. καὶ μένει ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου λείψας ἑκατέρου ποιῶν τετράγωνον. δεήσει λοιπὸν τὸν ἀπὸ συναμφοτέρου ἴσον γίνεσθαι δυνάμεσι ις. ὥστε καὶ τὴν πλευρὰν τῇ πλευρᾷ, τουτέστι δυνάμεις ιθ ἴσας ἀριθμοῖς δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ^{τξα}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρϟβ^{τξα}. ὁ δὲ δεύτερος ριβ^{τξα}. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros vt summæ illorum quadratus, vtroque dempto faciat quadratum. Primùm accipio aliquem quadratum, à quo auferendo duos aliquos numeros, supersit quadratis. Esto 16. is enim detractus siue 12. siue 7. relinquit quadratum. Statuo ergo illos in quadrato, & alterum quidem pono 12 Q. alterum 7 Q. At summæ quadratum 16 Q. sic enim summæ quadratus, vtroque dempto relinquit quadratum. Oportet itaque summæ quadratum æqualem esse 16 Q. Quare & latus lateri, hoc est 19 Q. æquari oportet 4 N. & fit 1 N. $\frac{4}{19}$. erit igitur primus $\frac{192}{361}$. secundus $\frac{112}{361}$. & satisfaciunt proposito.

IN QVÆSTIONEM XXVI.

VARIARI possunt hîc positiones sicut in præcedente. Nam posito quadrato summæ 16 Q. statuemus pro quæsitis duos quoslibet numeros, qui detracti à 16. sigillatim relinquant quadratos, quales infiniti reperiuntur, si ponas eos 7 Q. & 15 Q. fiet eorum summa 22 Q. æqualis 4 N. & erit 1 N. $\frac{2}{11}$. & quæsiti numeri $\frac{28}{121}$ & $\frac{60}{121}$. Rursus autem loco 16 Q. statui potest quadratus summæ quilibet alius quadratus, puta 25 Q. 36. Q. & sic in infinitum. Vnde sanè diuersarum solutionum ampla seges suppetit.

Potest etiam huiusmodi quæstio ad quotlibet extendi numeros. Vt si petantur quatuor numeri vt summæ quadratus quolibet illorum detracto relinquat quadratum. Ponatur summæ quadratus 25 Q. ipsi verò sint 21 Q. 16 Q. 9 Q. 24 Q. horum summa fit 70 Q. æqualis 5 N. est ergo 1 N $\frac{1}{14}$ suntque quæsiti numeri $\frac{21}{196}$ $\frac{16}{196}$ $\frac{9}{196}$ $\frac{24}{196}$. quorum summa $\frac{5}{14}$ à cuius quadrato si auferantur sigillatim inuenti numeri semper relinquitur quadratus. Hinc quoque fiet huiusmodi Canon.

Sume quadratum numerum, à quo aufer sigillatim tot alios quadratos, quot petuntur numeri, residua ducito sigillatim in sumptum quadratum, producta seorsim diuisa per quadratum summæ eorundem residuorum, quæsitos exhibent numeros.

Cæterùm hîc desiderari videtur huiusmodi quæstio, quæ soluitur eodem artificio.

Inuenire duos numeros, vt summæ illorum quadratus à quolibet illorum detractus, quadratum relinquat.

Ponatur summæ quadratus 1 Q. quem auferendo tum à 5 Q. tum à 10 Q. eùm relinquantur quadrati, ponantur quæsiti numeri 5 Q. & 10 Q. Erit igitur illorum summa tum 1 N. tum 15 Q. Quare fit 1 N. $\frac{1}{15}$. suntque quæsiti numeri $\frac{1}{45}$. & $\frac{2}{45}$. & satisfaciunt proposito. Variari positiones possunt iisdem modis, quibus & præcedentium quæstionum. Et eodem modo ad plures numeros extendetur quæstio, & demum formabitur iste Canon.

Quadratum quemlibet adde totidem aliis quadratis, quot petuntur numeri. Aggregata ducito sigillatim in addititium quadratum, producta seorsim diuisa per quadratum eorundem aggregatorum, quæsitos exhibent numeros.

QVÆSTIO XXVII.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorũ multiplicatione adscito alterutro quadratum faciat, quadratorum autem latera iuncta datum conficiant numerum. Imperetur vt faciant 6. Iam cùm duo sunt numeri, quorum maior est quadruplum alterius vnitate deminutum, productus eorum multiplicatione adscito minore facit quadratum. Pono ergo minorem 1 N. maiorem verò 4 N. − 1. & contingit productum multiplicationis addito minore fieri quadratum. Oportet ergo similiter eundem productum adscito maiore, puta 4 N. − 1. fieri quadratum, cuius latus sit 6. cum defectu numerorum qui sunt latus minoris quadrati, vt scilicet (quod requirit quæstio) duorum latera coniuncta faciant 6. sed productum multiplicationis adiecto maiore facit 4 Q. + 3 N. − 1. Quadratus

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. τῶν δὲ τετραγώνων αἱ πλευραὶ συντεθεῖσαι ποιῶσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν. ἐπιτετάχθω δὴ ποιεῖν τὸν ς. ἐπεὶ οὖν ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονός ἐστι τετραπλασίων παρὰ μονάδα, ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν ἐλάττονα ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν ἐλάσσονα ςοῦ ἑνός, τὸν δὲ μείζονα ςς δ λείψει μονάδος μιᾶς, καὶ συμβαίνει τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ ὁμοίως τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν μείζονα τουτέστιν ςςοῖς δ λείψει μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ ἡ μονάδων ς λείψει τῶν τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐλάσσονος ἀριθμῶν, ἵνα μετὰ τὸ πρόβλημα συντεθεῖσαι τῶν δύο αἱ πλευραὶ ποιῶσι μονάδας ς. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ δυνάμεις δ ςςοῖς γ λείψει μονάδος μιᾶς. ὁ δὲ ἀπὸ

μονάδων ϛ λείψει ἀριθμῶν β. δυνάμεις δ μονάδας λϛ λείψει ςς κδ. ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς λζ κζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ἐλάσσονα ἀριθμοῦ ἑνός, ἔσται λζ κζ. τὸν δὲ μείζονα ςς δ λείψει μονάδος α. ἔσται ρκα κζ. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

autem à latere 6 – 2 N. est 4 Q. + 36 – 24 N. Hæc ergo æquantur inter se, & fit 1 N. $\frac{37}{27}$. Ad positiones. Posueram minorem 1 N. erit ergo $\frac{37}{27}$. maiorem verò posueram 4 N. – 1. erit igitur $\frac{121}{27}$. & constat propositum.

IN QVAESTIONEM XXVII.

Bene monet Scholiastes lemma quod assumit Diophantus, non de solis quadruplis, sed de omnibus numeris iotelligendum esse qui sint plaoi similes. Quare sic vniuersaliter propooendum est & demonstrandum.

Datis duobus numeris, quorum maiori desit vnitas, quo minus ad minorem habeat rationem quadrati ad quadratum, productus ex mutua datorum multiplicatione adsumpto minore illorum quadratus fit.

Siot duo numeri A B & D, tales vt addita vnitate B C maiori A B, fiant plani similes A C. & D. dico productum ex A B in D adscito ipso D fieri quadratum.

1. noni.
2. secundi.

A . . . . B . C
D 2.

Quia enim A C. & D sunt plani similes, [1] productus ex A C in D quadratus est. At productus ex A C in D [2] æquatur productis ex A B & ex B C in D. productus autem ex vnitate B C in D æqualis est ipsi D. Igitur productus ex A B io D adsumpto ipso D. quadratus est. Quod demonstrandum erat.

Hinc patet positiones infinitis aliis modis institui potuisse. Nam posito minore 1 N. poni poterat maiot non solùm 4 N. – 1. vt fecit Diophantus, sed etiam 9 N. – 1. 16 N. – 1. & sic in infinitum. Vel etiam posito mioore 3 N. poni posset maior 12 N. – 1. vel 27 N. – 1. &c. & posito rursus minore 9 N. pooeretur maior 16 N. – 1. vel 25 N. – 1. &c. Ex ipsa autem operatione elicietur iste Canoo.

Quadratum quemlibet vnitate multatum adde duplo producti ex latere ipsius in summam datam laterum, per aggregatum diuide quadratum summæ laterum vnitate auctum, orietur minor quæsitorum, quem si ducas in quadratum initio sumptum, productus vnitate multatus erit maior quæsitorum.

Sit data summa laterum 7. Cape quemlibet quadratum vnitate multatum, puta 8. cui adde 42. qui fit bis ex 7. in latus quadrati sumpti, erit aggregatum 50. per quod diuide quadtatum ipsius 7. vnitate auctum, puta 50. fiet 1. minor quæsitorum, quem si ducas in quadratum 9. initio sumptum, productus vnitate multatus, nimirum 8. erit maior numerus. Itaque 1. & 8. satisfaciunt proposito. Quamobrem in huiusmodi Canone tradendo allucinatus est Raphael Bombellius lib. 3. Problemate 88. & è falso Caoone falsos elicuit solutionis numeros $\frac{14}{49}$ & $\frac{403}{49}$. quos minimè soluere quæstionem experiendo deprehendes.

Cæterùm sicut per suum lemma Diophantus sic suas instituit positiones, vt productus adscito minore oumero faciat quadratum, sic poterimus eas rursus ita instituere, vt productus adscito maiore numero faciat quadratum, tali præmisso lemmate.

Datis duobus numeris, quorum minori desit vnitas quo minus ad maiorem, habeat rationem quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione adsumpro maiore quadratum facit.

A 9.
B . . . C. D

Sit maior A, & B C minor, cui addita vnitate C D fiant A. & B D plani similes, dico productum ex A in B C adsumpro ipso A facere quadratum. Etenim ex A in B D fit quadratus. Sed productus ex A in B D æquatur

æquatur productis ex A in B C. & in C D; & productus ex A in C D æquatur ipsi A. Igitur productus ex A in B C. addito ipso A. fit quadratus. Quod demonstrandum erat.

Hoc supposito statuatur maior 4 N. minor 1 N. – 1. sic enim productus 4 Q. – 4. N. adscito maiore facit quadratum 4 Q. restat vt idem productus adscito minore, faciat quadratum, cuius latus sit 6 – 2 N. facit autem 4 Q. – 3 N. – 1. Hoc ergo æquatur quadrato 4 Q. – 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{37}{21}$ suntque quæsiti numeri $\frac{148}{21}$ & $\frac{16}{21}$. Hinc elicietur Canon alter.

Quadratum quemlibet vnitate multatum aufer à duplo producti ex latere ipsius in summam laterum datam, per residuum diuide quadratum summæ laterum vnitate auctum, orietur minor quæsitorum vnitate auctus, quem sic vnitate auctum si ducas in sumptum ab initio quadratum, fiet maior quæsitorum.

Sit data summa laterum 7. vt prius. Sume quadratum 9. vnde ablata vnitate, residuum 8. auferà 42. qui fit ex ipso 7. bis in latus ipsius 9. relinquitur 34. per quem diuide quadratum ipsius 7. vnitate auctum, nimirum 50. fiet $\frac{50}{34}$ vnde ablata vnitate relinquitur $\frac{16}{34}$ minor quæsitorum; At ducto $\frac{50}{34}$ in quadratum 9. fit maior $\frac{450}{34}$.

Sed & multò vniuersalius proponi potest hæc quæstio, nimirum sic.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, adscito quolibet alterutrius multiplice quadratum faciat, & quadratorum latera iuncta datum conficiant numerum.

Soluetur autem eadem arte auxilio eorundem lemmatum, quæ & ipsa in vnum contracta sic proponentur vniuersalius.

Datis duobus numeris quorum vni desint quotlibet vnitates, quo minus ad alium rationem habeat quadrati ad quadratum; productus ex datorum multiplicatione adsumpto alterius multiplice secundum vnitates quæ alteri desunt, fit quadratus.

Quærantur ergo duo numeri, vt productus eorum multiplicatione adscito alterutrius duplo quadratum faciat, & latera quadratorum conficiant 6. Ponatur minor 1 N. maior per lemma præcedens esto 4 N. – 2. sic enim productus 4 Q. – 2 N. adscito minoris duplo facit quadratum 4 Q. Restat vt idem productus adscito duplo maioris faciat quadratum à latere 6 – 2 N. facit autem 4 Q. + 6 N. – 4. Hoc ergo æquatur 4 Q. – 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{4}{3}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{4}{3}$ & $\frac{10}{3}$ quorum productus $\frac{40}{9}$ adscito sigillatim vtriusque duplo quadratos facit $\frac{64}{9}$ & $\frac{100}{9}$. quorum latera $\frac{8}{3}$. & $\frac{10}{3}$. quorum summa $\frac{18}{3}$ seu 6.

Rursus. Quærantur duo numeri vt productus eorum multiplicatione adscito primi duplo, tum secundi triplo, quadratum faciat, & latera quadratorum conficiant 6. Ponatur primus 1 N. secundus 4 N. – 2. sic enim productus 4 Q. – 2 N. adscito primi duplo facit quadratum 4 Q. Restat vt idem productus adscito secundi triplo faciat quadratum à latere 6 – 2 N. facit autem 4 Q. + 10 N. – 6. Hoc ergo æquatur 4 Q. – 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{21}{17}$ sunt ergo quæsiti numeri $\frac{21}{17}$ & $\frac{50}{17}$ quorum productus $\frac{1050}{289}$ adscito primi duplo & secundi triplo, quadratos facit $\frac{1764}{289}$ & $\frac{3600}{289}$ quorum latera $\frac{42}{17}$ & $\frac{60}{17}$ quorum summa $\frac{102}{17}$ seu 6. Hinc etiam Canon elici potest, quod exercitationis gratia tibi faciendum relinquo.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione detracto alterutro quadratum faciat. At quadratorum latera coniuncta faciant datum numerum. Faciant

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον. τῶν δὲ τετραγώνων αἱ πλευραὶ συντεθεῖσαι ποιῶσι τὸν δοθέντα ἀριθμόν. ἐπιτετάχθω

δὴ (ἀριθμὸς) ε̅. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονός ἐστι τετραπλασίων, καὶ μονὰς μία, ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ ἐλάττονος ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν μείζονα ςς̅ δ̅ μ° α̅. τὸν δὲ ἐλάττονα ς° ἑνός. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει [τοῦ ἐλάττονος ποιεῖ τετράγωνον δυνάμεις δ̅ οὗ ἡ πλευρὰ ςς̅ β̅. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψει] τοῦ μείζονος ποιεῖν τετράγωνον [καὶ τῶν τετραγώνων] πλευρὰς συνάγειν τὰς ἐπιταχθείσας μονάδας ε̅. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ μείζονος γίνεται δυνάμεις δ̅ λείψει ςς̅ γ̅ μονάδος μιᾶς. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μονάδων ε̅ λείψει ςς̅ β̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς κς̅ ιζ. ἔσται ὁ ἐλάττων κς̅ ιζ. ὁ δὲ μείζων ρκα̅ ιζ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

itaque 5. & quoniam si duo sint numeri, quorum maior sit minoris quadruplum auctum vnitate, productus eorum multiplicatione, detracto minore facit quadratum. Pono maiorem 4 N. + 1. minorem verò 1 N. & productus eorum multiplicatione detracto minore facit quadratum 4 Q. cuius latus 2 N. Superest vt idem productus detracto maiore faciat quadratum, & vt quadratorum latera coniuncta conficiant imperatas vnitates 5. sed productus ex multiplicatione illorum dempto maiore, facit 4 Q. − 3 N. − 1. hoc ergo æquatur quadrato à latere 5 − 2 N. & fit 1 N. $\frac{26}{17}$. Erit igitur minor $\frac{26}{17}$. maior $\frac{121}{17}$. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

LEMMA quo vtitur Diophantus sic vniuersaliter proponendum est.

Datis duobus numeris quorum maior vnitate mulctatus, ad minorem sit in ratione quadrati ad quadratum, productus ex datorum mutuo ductu, detracto minore quadratum relinquit.

A . . . . B. C

D 2.

Sit maior A C. & D minor, & à maiori auferendo vnitatem B C. supersit A B qui ad D sit in ratione quadrati ad quadratum, dico productũ ex D in A C, detracto ipso D relinquere quadratum. Etenim productus ex D in A C [a] æquatur productis ex D in A B & in B C. At productus ex D in vnitatem B C æquatur ipsi D. Igitur productus ex D in A C detracto D relinquit productum ex D in A B. Sed productus ex D in A B quadratus est, [a] cùm A B & D ponantur plani similes. Ergo constat propositum.

1. secundi. 1. noni.

Hinc etiam patet positiones infinitis modis variari posse. Nam posito minore 1 N. maior poni poterit non solùm 4 N. + 1. vt fecit Diophantus, sed etiam 9 N. + 1 vel 16 N. + 1 &c. & si minor ponatur 3 N. ponetur maior 12 N. + 1. vel 27 N. + 1 &c. Rursus si ponatur minor 4 N. ponetur maior 9 N. + 1. vel 16 N. + 1. vel 25 N. + 1 &c. Ex ipsa quoque operatione formabitur huiusmodi Canon.

Quadratum quemlibet vnitate multatum aufer à duplo producti ex latere ipsius in summam datam laterum; per residuum diuide quadratum summæ laterum vnitate auctum, orietur minor quæsitorum, quem si ducas in quadratum initio sumptum, productus vnitate auctus, erit maior.

Sit data summa laterum 5. & sumpto quadrato 9. aufer ab eo vnitatem superest 8. quē aufer à 30. duplo producti ex 5. in 3: superest 22. per quē diuide quadratum ipsius

5. vnitate auctum puta 26. fiet $\frac{13}{19}$ minor quæsitorum, quo ducto in quadratum 9. fit $\frac{117}{19}$ cui addendo vnitatem fit maior quæsitorum $\frac{136}{19}$ & satisfaciunt proposito.

Possumus etiam ita instituere positiones, vt productus detracto maiore numero relinquat quadratum, tali præmisso lemmate.

Datis duobus numeris, quotum minor vnitate multatus, ad maiorem sit in ratione quadrati ad quadratum, productus eorum multiplicatione, detracto maiore quadratum relinquit.

Quod demonstratur eadem prorsus modo quo præcedens demonstratum est. Hoc autem præmisso. Ponatur maior 4 N. minor 1 N. + 1. Sic enim productus, nimirum 4 Q. + 4 N. detracto maiore quadratum relinquit 4 Q. cuius latus 2 N. Superest igitur, vt idem quadratus detracto minore quadratum relinquat à latere 5 − 2 N. relinquit autem 4 Q. + 3 N. − 1. hoc ergo æquatur quadrato 25 − 20 N. + 4 Q. & fit 1 N. $\frac{26}{23}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{104}{23}$ & $\frac{49}{23}$. Hinc etiam elicietur alius Canon.

Quadratum quemlibet vnitate multatum adde duplo producti ex latere ipsius in summam datam laterum, per aggregatum diuide quadratum summæ laterum, vnitate auctum, orietur minor quæsitorum vnitate multatus, quem sic multatum ducito in quadratum initio sumptum, fiet maior quæsitorum.

Potest & vniuersalius proponi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, detracto quolibet alterutrius multiplice, quadratum relinquat, & quadratorum latera iuncta, datum conficiant numerum.

Et soluetur eodem prorsus artificio, auxilio lemmatum traditorum, quæ & ipsa in vnum contracta proponentur vniuersalius, hoc pacto.

Datis duobus Numeris quorum vnus quotlibet vnitatibus superat numerum, qui ad alterum rationem habet quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione, detracto alterius multiplice, secundum vnitates quibus alter abundat, quadratum relinquit.

Quærantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione detracto primi duplo, & secundi triplo, quadratũ relinquat, & laterum summa esto 5. Ponatur primus 1 N. secundus 1 N. + 2. sic enim productus 1 Q. + 2 N. detracto primi duplo relinquit quadratum 1 Q cuius latus 1 N. Restat igitur vt idem productus detracto secundi triplo faciat quadratum, cuius latus sit 5 − 1 N. facit autem 1 Q. − 1 N. − 6. Hoc ergo æquatur 1 Q. − 10 N. + 25. & fit 1 N. $\frac{31}{9}$. suntque quæsiti numeri $\frac{31}{9}$ & $\frac{49}{9}$.

Cæterùm hîc desiderari videtur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, detractus à quolibet ipsorum, quadratum relinquat.

Ponatur minor 1 N. maior quilibet Numerorum numerus qui ad minorem rationem habeat quadrati ad quadratum, puta 4 N. erit productus 4 Q. qui detractus à quolibet ipsorum, relinquet 1 N. − 4 Q. & 4 N. − 4 Q. æquales quadrati, & quia Numerorum numeri sunt plani similes, ducatur denominator rationis eorum, in minorem vt Numeri æquentur, fient ergo 4 N. − 16 Q & 4 N. − 4 Q. æquandi quadratis, horum interuallum est 12 Q. Quare sumendi sunt duo numeri, quorum mutuo ductu fiant 12 Q & horum summæ semissis quadratus æquabitur maiori, vel interualli semissis quadratus æquabitur minori, sunto hi 2 N. & 6 N. erit summæ semissis quadratus 16 Q. æqualis 4 N. − 4 Q. & fiet 1 N. $\frac{1}{5}$. Sunt ergo numeri $\frac{1}{5}$ & $\frac{4}{5}$. horum productus $\frac{4}{25}$ detractus ab ipsis numeris relinquit quadratos quæsitos $\frac{1}{25}$ & $\frac{16}{25}$. Quod si cui forte modus iste vtẽdi duplicata æqualitate obscurior videbitur, legat quæ adnotauimus ad quadragesimam tertiam quarti; vbi fusiùs à nobis explicatur.

IN QVAESTIONEM XXIX.

OBSCVRE' loquitur Diophantus, nec tamen à Scholiasta vel à Xilandro satis explicatur. Itaque nos huic quæstioni sic lucem afferemus.

Posito altero quadratorum 1 Q. ponitur alter ad libitum, puta 1 quorum producto, si ipsi sigillatim addantur, fient tum 2 Q. tum 1 Q. + 1. æquandi quadratis, quæ duplicata æqualitas inexplicabilis est. Quamobrem posito primo 1 Q. secundus non est ad libitum ponendus, sed vt saltem vni propositi parti satisfiat per ipsas positiones, talis deligendus est secundus vt ductus in 1 Q. & producto addendo 1 Q. fiat quadratus. Quia verò primus est 1 Q. & vnitas non immutat numerum quem multiplicat, parer eò nos rèduci, vt inueniamus quadratum, cui addendo 1. fiat quadratus. Id ergo fiet per aliam operationem, hoc pacto. Statuatur quæsitus quadratus 1 Q. is adicita vnitate fiet 1 Q. + 1. æquandus quadrato, cuius latus modo in superioribus quæstionibus sæpe vsitato fingetur ab 1 N. + tot vnitatibus quarum quadratus superet 1. Fingit illud Diophantus 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{3}{4}$. & quæsitus quadratus $\frac{9}{16}$. Itaque ad propositam quæstionem redeuntes ponamus primum 1 Q. secundum $\frac{9}{16}$. Sic enim productus $\frac{9}{16}$ Q. adsumpto primo facit quadratum $\frac{25}{16}$ Q. Restat igitur vt idem productus adsumpto secundo quadratum faciat, facit autem $\frac{9}{16}$ Q. + $\frac{9}{16}$. Hoc ergo æquatur quadrato. Sed ad vitandas fractiones, omnia per eundem quadratum 16. multiplicantur, & fit 9 Q. + 9 æquandus quadrato. Nec immutatur per hanc multiplicationem æqualitatis ratio, quia enim quadrato per quadratum multiplicato seu diuiso, semper fit quadratus, patet si 9 Q. + 9. æquetur quadrato, & eius partem decimam sextam, quadratum fore, & è conuerso. Huius igitur latus fingamus à 3 N. − tot vnitatibus quarum quadratus superet 9. puta à 3 N. − 4. fiet 1 N. $\frac{7}{24}$ & solutio est manifesta. Hinc formatur Canon.

Cape duos quadratos quadratum simul conficientes, altero per alterum diuiso, fiet alter quæsitorum. Tum diuisum quadratum aufer à tertio alio quouis quadrato, residui quadratus diuisus per quadruplum producti ex tertio eodem quadrato in quadratum initiò diuisum, alterum exhibebit.

Verbi gratia. Cape quadratos 16. & 9. fiet alter quæsitorum $\frac{16}{9}$. Tum aufer 16. à quouis alio quadrato 36. restat 20. cuius quadratum 400. diuide per quadruplum producti ex 16. in 36, nimirum per 2304. fiet alter quæsitorum $\frac{25}{144}$.

Diuersitas autem tum operationis, tum solutionis è triplici capite oriri potest.

Primò enim vtriusque numeri positione eadem manente, primo scilicet posito 1 Q. & secundo $\frac{9}{16}$; vltimi numeri quadrato æquandi, nimirum ipsius 9 Q. + 9. latus diuersimodè fingi potest, videlicet 3 N. − 4. vel 3 N. − 6. & sic in infinitum.

Secundo. Quamuis primus maneat 1 Q. potest secundus aliter atque aliter poni, cùm inueniri possint infiniti quadrati diuersi ab ipso $\frac{9}{16}$ qui adsumpta vnitate quadratum faciant, quales sunt $\frac{16}{9}$ $\frac{25}{144}$ &c.

Denique primus quoque numerus diuersimodè poni potest, nimirum quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 4 Q. 9 Q. 16 Q. &c. Sed tunc pro secundo sumendus erit quadratus aliquis numerus, quo ducto in primum & producto addendo ipsum primum, quadratus fiat. Vnde prius soluenda erit huiusmodi quæstio.

Dato quadrato, alium inuenire, vt productus horum multiplicatione adsciscens datum quadratum, faciat quadratum.

Datus esto 4. Quæsitus quadratus ponatur 1 Q. horum productus est 4 Q. qui adscito 4. facit 4 Q. + 4. quadrato æquandum, cuius latus esto 2 N. − 3. fiet 1 N. $\frac{5}{12}$. & est quæsitus quadratus $\frac{25}{144}$. quo ducto in 4. & producto addendo 4. fit quadratus $\frac{169}{36}$ à latere $\frac{13}{6}$. Hinc, si libet, facilem elicies Canonem.

Datum quadratum aufer à quolibet quadrato, & per quadruplum producti horum quadratorum diuide residui illius quadratum, vel è conuerso. Vtroque modo orietur quæsitus quadratus.

Vt in hypothesi aufer 4. à 9. & residui 5. quadratum 25. diuide per quadruplum producti ex 4. in 9. nimirum per 144. fiet quæsitus quadratus $\frac{25}{144}$. vel diuide 144. per 25. fiet etiam quæsitus quadratus $\frac{144}{25}$. Nam hîc semper duplex contingit solutio.

Hac præmissa quæstione soluetur Diophantæum problema, hoc pacto. Ponatur primus 4 Q. secundus $\frac{25}{144}$ sic enim satisfit vni parti postulati. Restat vt productus horum multiplicatione, nimirum $\frac{100}{144}$ Q. adscito secundo faciat quadratum, facit autem $\frac{100}{144}$ Q. + $\frac{25}{144}$. Hoc ergo æquatur quadrato, & omnia ducendo in 144. tum diuidendo per 25. fiunt 4 Q. + 1. æquales quadrato, cuius latus esto 2 N − 3. & fiet 1 N. $\frac{2}{3}$. erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{16}{9}$, & $\frac{25}{144}$.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE duos numeros quadratos, vt productus eorum multiplicatione dempto alterutro faciat quadratum. Et si posuero primum 1 Q. alterum 1. erit productus eorum multiplicatione 1 Q. Oportet ergo illum dempta vnitate fieri quadratum, est autem 1 Q. quadratus. Eò itaque redacti sumus, vt quæramus quis quadratus dempta vnitate remaneat quadratus. Est autem huiusmodi quadratus $\frac{25}{16}$. Hic enim demptis $\frac{16}{16}$ relinquit quadratum $\frac{9}{16}$. Pono igitur alterum 1 Q. alterum $\frac{25}{16}$. & productus multiplicationis dempto 1 Q. relinquit quadratum. Superest vt idem productus demptis $\frac{25}{16}$ fit æqualis quadrato. Sed productus demptis $\frac{25}{16}$ fit $\frac{25}{16}$ Q. − $\frac{25}{16}$. Hoc ergo æquatur quadrato. Omnia per sedecim multiplicentur, tum diuidantur per 25. fit 1 Q. − 1. æquandus quadrato. Formo quadratum ab 1 N. − 4. Ipse igitur est 1 Q. + 16. − 8 N. æqualis 1 Q. − 1. & fit 1 N. $\frac{17}{8}$. Erit ergo primus $\frac{289}{64}$. secundus $\frac{100}{64}$. & satisfaciunt postulatis.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ τάξω τὸν μὲν πρῶτον δύναμιν μίαν, τὸν δὲ ἕτερον μονάδα μίαν. ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν δύναμις μία. δεήσει ἄρα αὐτὸν λείψει μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον, καὶ ἔστιν ἡ δύναμις τετράγωνος. ἀπῆκται ἄρα εἰς τὸ ζητῆσαι τίς τετράγωνος λείψει μονάδος μιᾶς ποιεῖ τετράγωνον. ἔστι δὲ τετράγωνος ὁ κε ιϛ^{ων}. οὗτος γὰρ λείψει τὸν τῆς μονάδος ιϛ ιϛ^{ων}. ποιεῖ τετράγωνον τὸν θ ιϛ^{ων}. τάσσω οὖν τὸν μὲν δύναμιν μίαν, τὸν δὲ κε ιϛ^{ων}. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει δυνάμεως μιᾶς ποιεῖ τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψει μ° κε ιϛ^{ων} ἴσον εἶναι τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει μ° κε ιϛ^{ων}. γίνεται δυ κε ιϛ^{ων} λείψει μ° κε ιϛ^{ων}. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πάντα ἑκκαιδεκάκις. * πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛ° α λείψει μ° δ. αὐτὸς ἄρα ἔσται δύναμις α μονάδες ιϛ λείψει ϛϛ η. ἴσος δυ κε λείψει μ° κε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιζ η^{ων}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος σπθ ξδ^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος ρ ξδ^{ων}. καὶ ποιοῦσι τὰ τοῦ προβλήματος.*

IN QVAESTIONEM XXX.

EXTREMA verba huius propositionis, in Græco monstrosè deprauata sunt, vt ex ipsa æquatione manifestum fit, qua numeri 25 Q. — 25. latus fingitur 1 N. — 4. vnde contingit 1 Q. + 16 — 8 N. æquari 25 Q. — 25. & in complexam æquationem deuenitur cùm tandem 41. maneat æqualis 24 Q. + 8 N. & fit solutio irrationalis. Quare nescio quomodo sibi persuadere potuerit Scholiastes hanc esse mentem Diophanti. Nam quod ipse ait valorem Quadrati esse 1. atque adeo 24 Q. idem esse atque 24. sunt meræ nugæ, & puerilius etiam nugatur Xilander, cùm mirificam appellat rationem hanc inueniendæ simplicis æquationis. Si enim 1 Q. est 1. nonne etiam 1 N. debuit esse 1 non autem $\frac{17}{8}$. Si verò modus iste quo vtitur Scholiastes admitendus est, nonne licet etiam ponere latus quadrati 1 N. — 2. & æquare 1 Q. — 4 N. + 4. numero 25 Q. — 25? Sed hac ratione tandē 29. æquatur 24 Q. + 4 N. Quod si, vt somniat choliastes 1 Q. est 1. & 24 Q. sunt 24. fiet valor Numeri $\frac{5}{4}$ eritque alter quæsitorum quadratorum $\frac{25}{16}$ alter rursus $\frac{25}{16}$ qui nequaquam satisfaciunt postulatis, & sic aliis infinitis exemplis pronum est ostendere futilem esse hanc operandi rationem. Nec mihi obiiciat aliquis, valorē Numeri à Scholiasta inuentum nempe $\frac{17}{8}$ satisfacere proposito, nam ex falso verum inferri potest, & ex vno aut altero exemplo non ritè colligitur regula generalis. Falsitatis etiam manifestè arguitur hæc æquatio, ex eo quod per valorem Numeri resoluendo hypostases 1 Q. — 8 N. + 16. non reperitur æqualis 25 Q. — 25. Nam 1 Q. — 8 N. + 16. fit $\frac{225}{64}$ At 25 Q. — 25 fit $\frac{5625}{64}$. Valeat ergo ridiculum scholiastæ commentum, quo non calceus ad pedem, sed pes ad calceum accommodatur.

Porrò tribus modi corrigi potest textus Diophanti. Primo numeri 25 Q. — 25. ponendo latus non 1 N — 4. Sed 5 N. — 1 vnde fiet 1 N. $\frac{13}{5}$ eruntque quæsiti quadrati $\frac{169}{25}$ & $\frac{25}{16}$. Qua ratione numeri solutionis omnes mutandi erunt. Secundò concipiendo Diophantum, numerum $\frac{25}{16}$ Q. — $\frac{25}{16}$ priùs multiplicare per 16. vnde fit 25 Q. — 25. & hunc deinde diuidere per $\frac{25}{16}$ vnde fit 16 Q. — 16. æquandus quadrato, cuius latus fingitur non 1 N. — 4. Sed 4 N. — 1 & fit 1 N. $\frac{17}{8}$ & solutionis numeri non mutantur. Denique, quod maximè mihi arridet, & in mea versione sequutus sum, dici potest Diophantum non solùm multiplicare per 16. numerum $\frac{25}{16}$ Q. — $\frac{25}{16}$ vnde fit 25 Q. — 25. Sed hunc præterea diuidere per 25. vnde fit tandem 1 Q. — 1. æquandus quadrato, quod familiare Diophanto est, vt in minimis numeris facilior sit operatio; & vt iam monuimus quadratus per quadratum multiplicatus & diuisus, quadratus manet. Tum numeri 1 Q. — 1 latus fingit 1 N. — 4. & omnia optimè cohærent, & solutionis numeri omnes congruunt. Non ausus sum tamen in textu Græco tantam inducere mutationem, sed satis habui verba deprauata asteriscis includere, quæ si quis velit ex nostra versione corrigere, id ita commodè fiet. Πάντα ἑκκαιδεκάκις, ἐ παρὰ τὸν κε. γίνεται δυ α. λεῖψει μονάδος α ἴσον τετραγώνῳ, πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςῦ α λεῖψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ἔσται. δύναμις α. μονάδες ις λεῖψει ςς η. ἴσος δυ α. λεῖψει μονάδος α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιζ η.

Variari autem potest operatio & solutio, totidem modis, quot ad præcedentem explicauimus, & pari ratione dato quadrato, inuenietur alius, vt productus eorum mutuo ductu multatus dato quadrato, relinquat quadratum. Et tandem ex operatione Diophanti elicietur huiusmodi Canon.

Cape quadratum ex duobus quadratis compositum, cui adiice alium quemuis quadratum, summæ quadratum diuide per quadruplum producti quadratorum simul additorum; orietur alter quæsitorum, alterum habebis si diuidas quadratum initio sumptum per vtrumlibet eorum ex quibus componitur.

Verbi gratia cape 25. compositum ex 9. & 16. cui adde quadratum 1. fit 26. cuius quadratum 676. diuide per 100. qui fit ex 1 in 25. quater, fiet alter quæsitorum $\frac{169}{25}$. Alter vero est $\frac{25}{9}$ vel $\frac{25}{16}$. Nam hîc semper duplex contingit solutio.

Cæterùm hîc desiderari videtur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos quadratos, vt vterque multatus producto multiplicationis eorum quadratum relinquat.

Ponatur alter 1 Q. alter quadratus aliquis, qui ab vnitate detractus relinquat quadratum, puta $\frac{9}{25}$. sic enim productus $\frac{9}{25}$ Q. detractus ab 1 Q. relinquit quadratum $\frac{16}{25}$ Q. Restat vt idem productus detractus à $\frac{9}{25}$ relinquat quadratum. Relinquit autem $\frac{9}{25} - \frac{9}{25}$ Q. Hoc ergo æquatur quadrato. Omnia per 25. multiplicentur fit 9 − 9 Q. æquandus quadrato. Fingatur eius latus 3 − 4 N. fit 1 N. $\frac{24}{25}$. Est ergo primus $\frac{576}{625}$. secundus $\frac{9}{25}$. & soluunt quæstionem. Hinc fit iste Canon.

Cape duos quadratos quadratum conficientes, horum alterum diuide per eorum summam, fiet alter quæsitorum. Eundem quadratum diuisum adde cuilibet tertio quadrato, & per aggregati quadratum diuide quadruplum producti ex mutuo ductu quadratorum simul additorum, fiet alter quæsitorum.

Verbi gratia cape 9. & 16. & alterum 9. diuide per summam 25. fiet alter quæsitorum $\frac{9}{25}$. Tum eidem 9. adde alium quadratum 4. fiet 13. per huius quadratum 169. diuide quod fit ex 4. in 9. quater, nimirum 144. fiet alter quæsitorum $\frac{144}{169}$.

QVÆSTIO XXXI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείπῃ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ πάντων δύο ἀριθμῶν οἱ ἀπ' αὐτῶν συντεθέντες, ἐάν τε προσλάβωσι τὸν δὶς ὑπ' αὐτῶν, ἐάν τε λείπωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ἀριθμὸν β καὶ ἀριθμὸν γ. καὶ δῆλον ὡς ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μετὰ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν συνάγουσα ποιεῖ τετράγωνον μονάδας κε. καὶ πάλιν ἀπὸ τῆς συνθέσεως τῶν ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρουμένου τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν καταλείπεται τετράγωνος ἡ μονάς. τάσσω οὖν τὸν ὑπ' αὐτῶν δυνάμεις ιγ. τετάχθω οὖν ὁ μὲν ς ἑνός, ὁ δὲ ἀριθμῶν ιγ. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν δυνάμεις ιγ. δυνάμεις ἄρα ιγ ἐάν τε προσλάβωσι δυνάμεις ιβ, ἐάν τε λείπωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. δεήσει ἄρα δυνάμεις ιβ ἴσας εἶναι συναμφοτέρῳ. ἀλλὰ συναμφότερός ἐστιν ς ιδ· δυνάμεις ἄρα ιβ ἴσαι εἰσὶν ςς^{οῖ} ιδ. καὶ γι-

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione summa illorum siue addita, siue detracta quadratum faciat. Iam cùm duorum quorumlibet numerorum quadrati simul iuncti, siue addito, siue detracto duplo producti multiplicationis eorum, quadratum faciant, exponamus duos numeros 2. & 3. & patet quod summa quadratorum ab ipsis addito duplo producti multiplicationis facit quadratum 25. Et rursus ab eadem summa quadratorum detracto eodem duplo producti multiplicationis relinquitur quadratus 1. Pono ergo productum ab iis 13 Q. Ipsorum alterum 1 N. alterum 13 N. & fit ex eorum multiplicatione 13 Q. Atqui 13 Q. siue additis siue detractis 12 Q. faciunt quadratum. Oportet ergo 12 Q. æquari summæ amborum. Sed amborum summa est 14 N. Igitur 12. Q.

æquantur 14 N. & fit 1 N. $\frac{14}{6}$ seu $\frac{7}{3}$. erat itaque primus 1 N. erit ergo $\frac{7}{3}$. At secundus qui erat 13 N. erit iam $\frac{91}{3}$. & soluunt quæstionem.

νεται ὁ ἀριθμὸς ιδ^ς. τουτέστι ζ^ς. ἔστιν οὖν ὁ μὲν πρῶτος ς^ς ἑνός. ἔσται ζ^ς. ὁ δὲ δεύτερος ςς ιγ. ἔσται ϟα^ς. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXI.

LEMMA quod assumit Diophantus, nil aliud continet quàm quod ostensum est quarta secundi Euclidis, & quarta secundi porismatum. Nam altera illarum propositionum demonstratur duplum producti additum summæ quadratorum, efficere quadratum summæ numerorum; altera verò cōcluditur duplum producti detractum à summa quadratorum, relinquere quadratum interualli numerorum. Cæterùm tota operationis & solutionis varietas pendet à duplici capite. Primò enim loco 2. & 3. sumi possunt alij duo quilibet numeri, & aggregatū quadratorum ab ipsis statui pro producto multiplicationis; & duplum producti, pro summa ipsorum numerorum. Vt si sumas 2. & 4. Pones productum multiplicationis 20 Q. summam numerorum 16 Q. Secundo, manente eadem primà positione, ipsi numeri variè poni possunt, vt in hypothesi Diophanti posito producto 13 Q. & summa 12 Q. Ipsi numeri poni possunt duo quilibet quorum mutuo ductu fiant 13 Q. author ad vitandas fractiones posuit 1 N. 13 N. sed poni possent 2 N. & 6 $\frac{1}{2}$ N. vel 3 N. & 4 $\frac{1}{3}$ N. & sic in infinitum. At posito producto 20Q. poni poterunt ipsi numeri 2 N. & 10 N. vel 4 N. & 5 N. vel duo quilibet alij numeri quorum mutuo ductu fiant 20 Q. Canon quoque hinc facilè formabitur, sed parum in eo erit compendij simili quoque artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt summa eorum, producto multiplicationis siue addito, siue dempto quadratum faciat.

Ponatur summa 13 Q. productum 12 Q. ipsi vero numeri 1 N. & 12 N. fiet ergo summa 13 N. æqualis 13 Q. & fit 1 N. 1. suntque quæsiti numeri 1 & 12.

QVÆSTIO XXXII.

INVENIRE duos numeros æquales quadrato, vt productus eorum multiplicatione siue addita, siue dempta ambotum summa quadratum faciat. Quoniam si sint duo numeri in dupla ratione, & duplum producti multiplicationis eorum, quadratus est, & summa quadratorum ab ipsis, siue addito, siue detracto duplo producti quadratum facit, exponamus 4. & 2. & patet quod duplum producti eorum facit quadratum 16. & summa quadratorum ab ipsis puta 20. siue addito 16. siue dempto facit

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ, ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ οὖν ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐστὶ διπλασίων, [καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν δὶς τετράγωνός ἐστι, καὶ] οἱ ἀπ' αὐτῶν συντεθέντες ἐάν τε λείπωσι τὸν δὶς ἀπ' αὐτῶν. ἐάν τε προσλάβωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. ἐκτίθεμαι τὸν δ. καὶ τὸν β. [καὶ δῆλον ὡς ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον τὸν ις. καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν κ. ἐάν τε προσλάβῃ τὸν ις ἐάν τε λείπῃ ποιεῖ

τετράγωνον τόν τε λϛ. καὶ τὸν δ.] τετάχθωσαν οὖν ἐν δυνάμει. καὶ ἔστω ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν δυνάμεις κ. ὁ δὲ συναμφότερος δυνάμεις ιϛ. ἔστω δὲ ὁ μὲν [ϛϛ β] ὁ δὲ ϛϛ ι. συναμφότερος δὲ ϛϛ ιβ. ἀλλὰ καὶ δυνάμεις ιϛ. δυνάμεις ἄρα ιϛ. ἴσαι ϛϛ ιβ. [καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιβ ιϛ.] τουτέστι γ δ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϛ δ. ὁ δὲ δεύτερος λ δ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

quadratos 36. & 4. Ponantur ergo in quadrato. & esto productum multiplicationis 20 Q. summa verò numerorum 16 Q. sit autem alter 2 N. alter 10 N. ergo vterque simul 12 N. sed & 16 Q. Proinde 16 Q. æquantur 12 N. & fit 1 N. $\frac{12}{16}$. hoc est $\frac{3}{4}$. eritque primus $\frac{6}{4}$. secundus $\frac{30}{4}$. & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM XXXII.

LEMMA hîc assumptum idem ferè est cum illo quod in præcedente explicatum est, cui tamen superaddit, expositos numeros debere esse in ratione dupla, vt duplum producti eorum sit quadratus numerus, cuius rei ratio euidens est, quia ducere numerum aliquem bis in suum duplum, idem est atque ducere eundem numerum in suum quadruplum: At numeri in ratione quadrupla sunt plani similes[1]. Quare patet ex eorum mutuo ductu fieri quadratum. Variari autem potest operatio & solutio totidem modis, quot & præcedentis, & easdem ob causas vt manifestum est.

1. noni.

Cæterùm etiam aliter operari possumus, hac arte. Sumantur duo numeri qui sint latera circa rectum trianguli rectanguli, seu quorum quadrati simul quadratum conficiant, quod fiet per tertiam tertij porismatum, sintque hi 3. & 4. Eritque summa quadratorum 25. duplum producti 24. Et statuantur in Quadratis, ponaturque productum 25 Q. summa numerorum 24 Q. Ipsi verò numeri 1 N. & 25 N. vel alij duo quilibet quorum mutuo ductu fiant 25 Q. erit ergo summa 26 N. æqualis 24 Q. & fit 1 N. $\frac{13}{12}$. suntque quæsiti numeri $\frac{13}{12}$ & $\frac{325}{12}$.

Hîc etiam desiderari videtur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, æquales quadrato, vt summa eorum, producto multiplicationis siue addito siue dempto, quadratum faciat.

Ponatur summa numerorum 25 Q. productum 24 Q. ipsi verò numeri statuatur duo quilibet, quorum mutuo ductu fiant 24 Q. puta 4 N. & 6 N. fiet summa 10 N. æqualis 25 Q. & fit 1 N. $\frac{2}{5}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{8}{5}$ & $\frac{12}{5}$.

Cæterùm huc quoque pertinere videtur talis quæstio.

Inuenire quadratum cui siue addatur, siue adimatur suum latus, fiat quadratus.

Ponatur quæsitus quadratus 25 Q. latus illius 24 Q. igitur 24 Q. æquantur 5 N. & fit 1 N. $\frac{5}{24}$. Est ergo quæsitus quadratus $\frac{625}{576}$.

Eodem artificio reperietur quadratus, cui addendo & adimendo suum latus quoties quis iusserit, fiat quadratus. Vt si quæratur quadratus, cui addendo & adimendo quater suum latus, fiat quadratus. Ponatur quæsitus quadratus 25 Q. Tum ipsius 24 sumpto quadrante, statuatur latus 6 Q. Nam eius quadruplum 24 Q. additum vel ademptum ipsi 25 Q. quadratum facit. Igitur 6 Q. æquantur 5 N. fitque 1 N. $\frac{5}{6}$. Est ergo quæsitus quadratus $\frac{625}{36}$.

QVÆSTIO XXXIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον.

INVENIRE tres numeros, vt cuiusuis illorum quadratus adsciito proximè subsequente numero, faciat quadratum.

Ponatur primus 1 N. & quoniam si numerus numeri duplus fuerit, & adhuc vnitate maior, quadratus minoris adscito maiore facit quadratum, ponatur secundus primi duplus & vnitate maior, erit itaque 2 N. + 1. Rursumque tertius huius duplus & vnitate maior, erit vtique 4 N. + 3. & accidit quadratum primi adscito secundo fieri quadratum 1 Q. + 2 N. + 1. & similiter secundi quadratum adsumpto tertio facere quadratum 4 Q. + 8 N. + 4. Oportet ergo & tertij quadratum adiecto primo facere quadratum. Sed tertij quadratus adiecto primo facit 16 Q. + 25 N. + 9. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 4 N. − 4. Ipse igitur erit 16 Q. + 16. − 32 N. & fit 1 N. $\frac{7}{57}$. Erit ergo primus $\frac{7}{57}$. secundus $\frac{71}{57}$. tertius $\frac{199}{57}$. & soluunt quæstionem.

Τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ςˢ α. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ᾖ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, καὶ ἔσται δηλονότι ςς β. μονάδος μιᾶς. καὶ ἔτι ὁ τρίτος τούτου διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, καὶ ἔσται ςς δ. μο γ. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον, γίνεσθαι τετράγωνον δυνάμεως μιᾶς ςς β μονάδος μιᾶς. καὶ ὁμοίως τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου προσλαβόντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον δυ δ ςς η μο δ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ δυ ις ςς κε μο θ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ςς δ λείψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ἔσται δυνάμεις ις. μονάδες ις λείψει ςς λβ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ νζ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ζ νζ. ὁ δὲ δεύτερος οα νζ. ὁ δὲ τρίτος ρϟθ νζ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

LEMMA Diophanti prorsus idem est cum decima octaua propositione primi porismatum, vt euidens est. Operatio & solutio dupliciter variari potest. Primò enim ipsi Numeri poni possunt ad libitum, dum sequens contineat semper duplum præcedentis vnitate auctum, ita primo posito 2 N. ponetur secundus 4 N. + 1. tertius 8 N. + 3. & sic in infinitum. vel etiam primo posito 1 N. + 1. erit secundus 2 N. + 3. tertius 4 N. + 7. &c. Deinde vltimi numeri quadrato æquandi latus diuersimodè fingi potest, vt in hypothesi Diophanti, numeri 16 Q. + 25 N. + 9. latus fingi potest 4 N. − quotlibet vnitatibus quarum quadratus superet 9. vt 4 N. − 4. 4 N. − 5. 4 N. − 6. &c. Immo in eadem hypothesi quia numerus vnitatum 9. quadratus est, posset idem latus fingi 3 − quotlibet Numeris, quorum quadratus superet 16. puta 3 − 5 N. 3 − 6 N. &c.

QVÆSTIO XXXIV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λείψας τοῦ ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ διπλασίων παρὰ μονάδα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος λείψας τοῦ μείζονος ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ϛ^{ου} ἑνὸς μ° α. τὸν δὲ δεύτερον ὁμοίως ϛϛ β. μ° α. τὸν δὲ τρίτον ϛϛ δ μ° α. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον ⋔ τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔτι τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου λείψας τοῦ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου λείψας τοῦ πρώτου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνος λείψας τοῦ πρώτου, ποιεῖ δυνάμεις ιϛ ϛϛ^{οι} ζ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛϛ ε. δυνάμεις ἄρα κε ἴσαι δυνάμεσι ιϛ ἀριθμοῖς ζ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ^{θ}. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιϛ^{θ}. ὁ δὲ δεύτερος κγ^{θ}. ὁ δὲ τρίτος λζ^{θ}. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, vt cuiusuis quadratus detracto proximè se sequente numero, faciat quadratum. Quandoquidem si numerus numeri duplo vnitate minor sit, quadratus minoris dempto quadraro maioris, facit quadratum: statuo primum 1 N. + 1. secundum 2 N. + 1. Tertium similiter 4 N. + 1. & accidit quadratum primi dempto secundo facere quadratum, & adhuc quadratum secundi dempto tertio facere quadratum. Restat vt & tertij quadratus dempto primo quadratum faciat. Sed tertij quadratus dempto primo facit 16 Q. + 7 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 5 N. Proinde 25 Q. æquantur 16 Q. + 7 N. & fit 1 N. $\frac{7}{9}$. Erit igitur primus $\frac{16}{9}$. secundus $\frac{23}{9}$. tertius $\frac{37}{9}$. & constat propositum.

IN QVAESTIONEM XXXIV.

LEMMA quod assumit Diophantus nil aliud dicit, quàm quod ostensum est propositione decima nona primi porismatum. Operatio & solutio totidem modis variari potest, quot & præcedentis, vt diutiùs immorandum non sit in re manifesta.

QVÆSTIO XXXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν προσλαβὼν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, καὶ λάβωμεν καθ' ὃν μετρῆται, καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος τοῦ μετροῦντος, καὶ καθ' ὃν

INVENIRE tres numeros, vt vniuscuiusque quadratus adscita summa omnium faciat quadratum. Quandoquidem si numerus numerum metiatur, & sumamus eum per quem metitur; & duorum (metientis scilicet, & eius per quem metitur)

metitur) minorem de maiore auferamus, residui semissis quadratus adsumpto proposito initio ad metiendum numero, quadratum facit. Pono summam quidem trium aliquem quadratorum numerum, qui habeat tres ipsum metientes. Esto itaque 12. Nam ipsum metitur vnitas per 12. & 2. per 6. & 3. per 4. & si detraxero metientem ab eo per quem metitur, & residuorum semisses sumpsero; Ponam tres numeros primum quidem $5\frac{1}{2}$. secundum verò 2. tertium autem $\frac{1}{2}$. & patet horum vniuscuiusque quadratum adscito 12. facere quadratum, nimirum $12\frac{1}{4}$ & 16. & $42\frac{1}{4}$. Statuo igitur illos in numero primum $5\frac{1}{2}$ N. secundum 2 N. tertium $\frac{1}{2}$ N. Oportet autem trium summam æqualem esse 12 Q. sed trium summa est 8 N. Proinde 8 N. æquantur 12 Q. & fit 1 N. $\frac{8}{12}$ seu $\frac{2}{3}$. Erit ergo primus $\frac{11}{3}$ secundus $\frac{4}{3}$. tertius $\frac{1}{3}$ & constat propositum.

μετρεῖ, ἀφέλωμεν ὃ ἐλάττονα, ὁ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ λοιποῦ τετραγώνος προσλαβὼν τὸν ἐξ ἀρχῆς ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἀπὸ δυνάμεων τινῶν ἐχουσῶν μετροῦντας τρεῖς. ἔστω δὲ ιβ. μετρεῖ γὰρ αὐτὸν μονὰς α κατὰ τὸν ιβ καὶ μονάδες β κατὰ τὸν ϛ. καὶ μονάδες γ. κατὰ τὸν δ. καὶ ἐὰν ἀφέλω τὸν μετροῦντα ἀπὸ τοῦ καθ' ὃν μετρεῖ, καὶ τῶν λοιπῶν λάβω τὰ ἡμίσυ. τάσσω τοὺς τρεῖς, τὸν μὲν πρῶτον μο ε καὶ ἥμισυ. τὸν δὲ δεύτερον μο β. τὸν δὲ τρίτον μο τὸ ἥμισυ, καὶ δῆλον ὡς ἀπὸ ἑκάστου τούτων τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ιβ. ποιεῖ τετράγωνον. ὃν μὲν ιβ καὶ α δ'. ὃν δὲ ιϛ. ὃν δὲ μβ. α δ'. τάσσω οὖν αὐτοὺς ἐν ἀριθμοῖς τὸν μὲν πρῶτον ϛϛ ε καὶ ἥμισυ. τὸν δὲ δεύτερον ϛϛ β. τὸν δὲ τρίτον ϛ ἡμίσεως. δεῖ δὴ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἴσον εἶναι δυνάμεσι ιβ.

ἀλλ' ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμοί εἰσιν η. ἀριθμοὶ ἄρα η ἴσοι δυνάμεσι ιβ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς η ιβ ἤτοι δ ϛ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κβ ϛ. ὁ δὲ δεύτερος η ϛ. ὁ δὲ τρίτος β ϛ. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXXV.

LEMMA Diophanti coincidit prorsus eum quinta secundi Euclidis, vel cum secunda secundi porismatum. Solutionis varietas à duplici pendet capite. Primò enim summa numerorum poni potest non solùm 12 Q. sed & quilibet alius quadratorum numerus. Deinde posita eadem summa 12 Q. ipsi numeri diuersimodè poni possunt, prout sumentur semisses interuallorum duorum quorumlibet numerorum, quorum mutuo ductu fiat 12. Nam quod metientes sumendos esse ait Diophantus, id facit facilitatis gratia, ad vitandas fractionum molestias. Cæterùm quinta secundi cui innititur hæc operatio, abstrahit à numeris integris, & à fractis, vt liquet ex ipsius demonstratione.

Hîc si placet formabis huiusmodi Canonem.

Sume quemlibet numerum, tum cape ter duos numeros, quorum mutuo ductu is fiat, interuallorum semisses simul additos diuide per sumptum numerum, quotientem ducito sigillatim in eosdem semisses, fient quæsiti numeri.

Verbi gratia sume 48. qui fit tum ex 2. in 24. tum ex 4 in 12. tum ex 6 in 8. interuallorum semisses sunt 11. 4. 1. quorum summa 16. qua diuisa per 48. fit $\frac{1}{3}$ quo ducto sigillatim in ipsos 11. 4. 1. fiunt quæsiti numeri $\frac{11}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{3}$.

QVÆSTIO XXXVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λοιπὸν τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. τάσσω ὁμοίως ἀριθμόν τινα ὃς μετρούμενος ἔχει τρεῖς. ἔστω πάλιν ὁ ιβ. καὶ προστεθεὶς ὁ μετρούμενος τῷ καθ' ὃν μετρεῖ, καὶ ἥμισυ λαβὼν, τάσσω τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς, ὁ μὲν ςς ϛ καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ ἀριθμῶν δ. τὸν δὲ ςς γ καὶ ἥμισυ. καὶ συμβαίνει τὸ ἀπὸ ἑκάστου τετράγωνον λιπόντα δυνάμεις ιβ ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς εἶναι ἴσους δυνάμεσι ιβ. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσιν ςς^οὺς ιδ. ἀριθμοὶ ἄρα ιδ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι ιβ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ^ς. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος με^ς ∠ ἥμισυ. ὁ δὲ δεύτερος κη^ς. ὁ δὲ τρίτος κδ^ς καὶ ἥμισυ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, vt vniuscuiusque quadratus, multatus summa omnium, faciat quadratum. Pono similiter aliquem numerum qui tres ipsum metientes habeat. Esto rursus 12. additoque metiente ad eum per quem metitur, & semisse summæ capto, statuo tres numeros, primum $6\frac{1}{2}$ N. secundum 4 N. tertium $3\frac{1}{2}$ N. & contingit horum vniuscuiusque quadratum demptis 12 Q. facere quadratum. Superest vt trium summa sit æqualis 12 Q. sed tres simul iuncti faciunt 14 N. Igitur 14 N. æquantur 12 Q. & fit 1 N. $\frac{7}{6}$. Erit ergo primus $\frac{45}{6}$ $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{28}{6}$. tertius $\frac{24}{6}$ $\frac{1}{2}$. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XXXVI.

LEMMA hic assumptum iisdem innititur fundamentis, quibus & lemma præcedentis, vt manifestum est. Solutio quoque totidem modis variari potest. Et ex ipsa operatione formabitur huiusmodi Canon.

Sume quemlibet numerum, tum cape ter duos numeros, quorum mutuo ductu is fiat, aggregatorum semisses simul additos diuide per sumptum numerum, quotientem ducito sigillatim in eosdem semisses, fient quæsiti numeri.

Verbi gratia, sume 48. qui fit tum ex 2. in 24. tum ex 4. in 12. tum ex 6. in 8. Aggregatorum semisses sunt 13. 8. 7. quorum summa 28. qua diuisa per 48. fit $\frac{7}{12}$ quo ducto sigillatim in ipsos 13. 8. 7. fiunt quæsiti numeri $\frac{91}{12}$. $\frac{56}{12}$. $\frac{49}{12}$.

Cæterùm Diophantus more Græcorum vtendo fractionibus fractionum. Primum quidem exhibuit $\frac{45}{6}$. $\frac{1}{6}$. id est $\frac{45}{6}$. & dimidium $\frac{1}{6}$. hoc est $\frac{91}{12}$. Tertium verò $\frac{24}{6}$ $\frac{1}{6}$. id est $\frac{24}{6}$. & dimidium $\frac{1}{6}$. seu $\frac{49}{12}$.

Patet autem eodem prorsus artificio, & hanc & præcedentem ad quotlibet numeros extendi posse, quod vnico exemplo docuisse sufficiet. Quæruntur quatuor numeri, vt vniuscuiusque quadratus multatus summa omnium, quadratus remaneat. Vtendo Canone allato, sumatur 48. qui fit ex 2. in 24 tum ex 3. in 16. tum ex 4. in 12. tum ex 6. in 8. Aggregatorum semisses sunt 13. $9.\frac{1}{2}$. 8. 7. quorum summa $37.\frac{1}{2}$. qua diuisa per 48. fit $\frac{25}{32}$. quo ducto sigillatim in ipsos 13. $9.\frac{1}{2}$. 8. & 7. & omnibus ad eandem reductis denominationem, fiunt quæsiti numeri $\frac{650}{64}$. $\frac{475}{64}$. $\frac{400}{64}$. $\frac{350}{64}$.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ Γ.

DIOPHANTI ALEXANDRINI

ARITHMETICORVM

LIBER TERTIVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE tres numeros, vt vniuscuiusque eorum quadratus à summa triũ numerorũ detractus, faciat quadratũ. Expone duos quadratos, alterum ab 1 N. alterum à 2 N. & fit summa quadratorum ab ipsis 5 Q. Pono ergo summam trium numerorum 5 Q. & quæsitorum primum 1 N. secundum verò 2 N. Ita duabus propositi partibus est satisfactum. Et quoniam habemus 5. qui diuiditur in duos quadratos, nimirum 1. & 4. diuidatur idem rursus, vt supra demonstratum est, in alios duos, quadratos, videlicet in $\frac{4}{25}$. & $\frac{121}{25}$. Pono igitur tertium latus vnius horum, puta $\frac{2}{5}$ N. etenim illius quadratus à summa omnium detractus facit quadratum $\frac{121}{25}$. Q. superest vt

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λειφθεὶς ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. ἐκτίθου δύο τετραγώνους, τὸν μὲν ἀπὸ ς ἑνός. τὸν δὲ ἀπὸ ςς β. καὶ γίνονται οἱ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι δυ ε. τάσσω τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν δυ ε. καὶ τῶν ἐπιζητουμένων ἀριθμῶν, τὸν μὲν πρῶτον ς ἕνα, τὸν δὲ δεύτερον ςς β. καὶ ἔστι δύο τῶν ἐπιταγμάτων λελυμένα. καὶ ἐπεὶ ἔχομεν τὸν ε. διαιρούμενον εἰς δύο τετραγώνους τήν τε μονάδα καὶ τὴν τετράδα, ἔστω μετὰ τὸ διελεῖν αὐτὸν ὡς προδέδεικται εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους εἰς τε δ κε. καὶ ρκα κε. τάσσω νῦν τὸν τρίτον τῆς πλευρᾶς ἑνὸς τούτων. ἔστω β ε. ἀριθμοῦ. καὶ μένει πάλιν ὁ ἀπ' αὐτοῦ λειφθεὶς ἀπὸ συναμφοτέρου ποιῶν τετράγωνον τὸν ρκα κε. δεήσει τὰς

τρεῖς λοιπὸν ἴσους εἶ) δυνάμεσι ε̄. ἀλλ᾽ οἱ τρεῖς εἰσιν ςς γ̄. καὶ β^ε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς πε ^ρκε. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος πε ^ρκε. ὁ δὲ δεύτερος ρο ^ρκε. ὁ δὲ τρίτος λδ ^ρκε. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

tres simul æquentur 5 Q. sed tres simul efficiunt 3 $\frac{2}{5}$ N. Igitur 1 N. fit $\frac{85}{125}$. Erit ergo primus $\frac{85}{125}$. secundus $\frac{170}{125}$. tertius $\frac{34}{125}$. & satisfaciunt quæstioni.

IN III. LIBRVM DIOPHANTI COMMENTARII.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis est. Numerus ex duobus quadratis compositus, puta 5. rursus diuiditur in alios duos quadratos per decimam secund. Vnde patet hanc quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Etenim quærantur quatuor Numeri, vt cuiuslibet eorum quadratus à summa numerorum demptus, relinquat quadratum. Ponatur summa 5 Q. Primus verò 1 N. secundus 2 N. Diuisoque 5. rursus in duos alios quadratos, quorum latera $\frac{2}{5}$ & $\frac{11}{5}$ ponatur tertius $\frac{2}{5}$ N. Quartus $\frac{11}{5}$ N. erit summa omnium 5 $\frac{3}{5}$ N. æqualis 5 Q. & fit 1 N. $\frac{28}{25}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{140}{125}$. $\frac{280}{125}$. $\frac{56}{125}$. $\frac{308}{125}$. Diuersitas porrò operationis & solutionis è duplici capite oritur. Primò enim summa numerorum poni potest, quilibet quadratorum numerus ex duobus quadratis compositus, puta 10 Q. 13 Q. 17 Q. &c. Deinde manente eadem summa numerorum puta 5 Q. possunt ipsi numeri poni diuersimodè, prout 5. diuidetur in alios atque alios quadratos.

Hinc etiam elicietur Canon vniuersalissimus.

Sume quemlibet numerum ex duobus quadratis compositum, quem rursus diuide toties in duos alios quadratos, donec habeas tot quadratorum latera, quot petuntur numeri. Horum laterum summam diuide per numerum initio sumptum, quotientem ducito sigillatim in ipsa latera, fient quæsiti numeri.

Vt si petantur 4. numeri. Sume 65. quem diuide bis in duos quadratos, erunt horum latera 1. 8. 4. 7. quorum summa 20: qua diuisa per 65. fit $\frac{4}{13}$. quo ducto sigillatim in supradicta latera, fiunt quæsiti numeri $\frac{4}{13}$ $\frac{32}{13}$ $\frac{16}{13}$ $\frac{28}{13}$.

QVÆSTIO II.

EYPEIN τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετράγωνος προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν δυ α̅. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον δυ τριῶν. τὸν δὲ δεύτερον δυ η̄. τὸν δὲ τρίτον δυ ιε̄. ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τουτέστιν ἡ δύναμις μία προσλαβοῦσα ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. ὃν μὲν δυ δ̄. ὃν δὲ

INVENIRE tres numeros, vt quadratus summæ ipsorum, quouis ipsorum adiuncto quadratum faciat. Ponatur quadratus summæ trium numerorum 1 Q. Tunc statuam primum 3 Q. secundum 8 Q. tertium 15 Q. vt quadratus summæ trium, nimirum 1 Q. adscito quolibet ipsorum faciat quadratum, hunc quidem 4 Q. illum verò

9 Q. illum denique 16 Q. Oportet autem & tres coniunctos æquari lateri quadrati summæ omnium, hoc est 1 N. sed tres coniuncti efficiunt 26 Q. fit igitur 1 N. $\frac{1}{26}$ erit ergo primus $\frac{3}{676}$. secundus $\frac{8}{676}$. tertius $\frac{15}{676}$. & soluunt quæstionem.

δυ θ. ὃν δὲ δυ ιϛ. καὶ δέησει τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι τῇ πλευρᾷ τοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν, τουτέστι ϛ ἑνός. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι δυ κϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α κϛ$^{\alpha}$. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ χοϛ$^{\alpha}$. ὁ δὲ δεύτερος η χοϛ$^{\alpha}$. ὁ δὲ τρίτος ιε χοϛ$^{\alpha}$. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM II.

HIC etiam duplici de causa variari potest & operatio & solutio. Primò enim quadratus summæ numerorum statui potest quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 1 Q. 4 Q. 9 Q. &c. Deinde quadrato summæ manente eodem, ipsi numeri ponentur diuersimodè, prout quadratus summæ auferetur à diuersis quadratis, & residua ponentur pro quæsitis numeris. Sic posito quadrato summæ 1 Q. poni possunt ipsi numeri, non solùm vt fecit Diophantus 3 Q. 8. Q. 15 Q. sed etiam 24 Q. 35 Q. 48. Q. & sic in infinitum. Vnde patet eadem arte quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Et hinc quoque formatur Canon vniuersalis.

Sume quemlibet quadratum, quem aufer à totidem quadratis, quot petuntur numeri, per summam residuorum diuide latus sumpti ab initio quadrati, quotientis quadratum ducito sigillatim in ipsa eadem residua, fient quæsiti numeri.

QVÆSTIO III.

INVENIRE tres numeros, vt eorum summæ quadratus, quouis ipsorum detracto, faciat quadratum. Ponatur summa trium 4 N. erit illius quadratus 16 Q. qui detractis tum 7 Q. tum 12 Q. tum 15 Q. facit quadratum. Statuo ergo primum 7 Q. secundum 12 Q. tertium 15 Q. Reliquum est compositum ex tribus æquari summæ illorum. Sed summa trium posita est 4 N. Compositus autem ex tribus est 34 Q. Proinde fit 1 N. $\frac{2}{17}$. Quadratus $\frac{4}{289}$. erit ergo primus $\frac{28}{289}$. secundus $\frac{48}{289}$. tertius $\frac{60}{289}$. & soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετράγωνος λείψας ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ϛϛ δ. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος δυ ιϛ. ὃς λείψας δυνάμεις ζ. καὶ δυνάμεις ιβ. καὶ δυνάμεις ιε ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον δυνάμεις ζ. τὸν δὲ δεύτερον δυνάμεις ιβ. τὸν δὲ τρίτον δυ ιε. λοιπόν ἐστι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἴσον εἶναι τοῖς τρισίν. ἀλλ' ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ὑπόκειται ϛϛ δ. οἱ δὲ τρεῖς εἰσι δυ λδ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς β ιζ$^{\omega\nu}$. ἡ δὲ δύναμις δ σπθ$^{\omega\nu}$. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κη σπθ$^{\omega\nu}$. ὁ δὲ δεύτερος μη σπθ$^{\omega\nu}$. ὁ δὲ τρίτος ξ σπθ$^{\omega\nu}$. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

QVÆSTIO IV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετραγώνος ληφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ϛ^ο ἑνός. ὁ ἄρα ἀπὸ τούτου τετράγωνος δ^υ α̅. καὶ ἔστωσαν οἱ τρεῖς ὃς μὲν δ^υ β̅. ὃς δὲ δ^υ ε̅. ὃς δὲ δ^υ ι̅. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν λείψας τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τουτέστι τὴν δ^υ α̅. ποιῶν τετράγωνον, καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν πλευρὰν [ἔχει] δῆλον ὅτι ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν. ἡ ἄρα σύνθεσις τῶν τριῶν ἐστὶν ϛ^ο ἑνός, ἀλλὰ καὶ δυνάμεων ιζ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α̅ ιζ^ων. ἡ δὲ δύναμις α̅ σπθ^ων. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος β̅ σπθ^ων. ὁ δὲ δεύτερος ε̅ σπθ^ων. ὁ δὲ τρίτος ι̅ σπθ^ων. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE tres numeros, vt quadratus compositi ex tribus, detractus à quolibet ipsorum faciat quadratum. Ponatur compositus ex tribus 1 N. Quadratus autem illius 1 Q. & sunto tres numeri; hic quidem 2 Q. ille verò 5 Q. tertius 10 Q. Nam horum quilibet detracto quadrato compositi ex tribus, hoc est 1 Q. facit quadratum. Et quia quadratus compositi ex tribus, latus habet, patet hoc esse compositum ex tribus. Summa igitur trium est 1 N. sed est quoque 17 Q. Fit igitur 1 N. $\frac{1}{17}$. quadratus $\frac{1}{289}$. eritque primus $\frac{2}{289}$. secundus $\frac{5}{289}$. tertius $\frac{10}{289}$. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONES III. ET IV.

NVLLA in his difficultas. Eadem ferè hîc dici possunt, quæ ad duas præcedentes sunt adnotata, & Canones eadem facilitate formabuntur. Cæterùm his quatuor quæstionibus idem agit Diophantus in tribus numeris, quod fecit in duobus, libro secundo quæstionibus 23. 24. 25. 26. vnde etiam colligere licet huiusmodi quæstiones ad quotlibet numeros eadem arte extendi.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως συνδύο λαμβανόμενοι, τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι τετραγώνῳ. Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ ἀπὸ ϛ^ο α̅ μ^ο α̅. τουτέστι δ^υ α̅ ϛϛ̅ β̅ μ^ο α̅. ὧν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερεχέτωσαν μ^ο α̅. ὁ ἄρα τρίτος ἔσται δ^υ ἡμίσεος ϛ^ο α̅. ἵνα καὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ὑπερέχωσι τοῦ τρίτου τῇ μ^ο. πάλιν

INVENIRE tres numeros, quadrato æquales, quorum bini reliquum superent quadrato numero. Ponantur tres simul æquales quadrato ab 1 N. + 1. hoc est 1 Q. + 2 N. + 1. Quorum primus & secundus superent tertium vnitate. Erit ergo tertius ½ Q. + 1 N. sic enim primus & secundus superabunt illum vnitate. Rursus se-

cundus & tertius superent primum quadrato, nimirum 1 Q. erit similiter primus 1 N. + ½. Reliquum ergo habemus secundum ½ Q. + ½. superest vt primus & tertius superent secundũ quadrato numero. Sed quo primus & tertius superant secundum sunt 2 N. Hoc ergo æquatur quadrato; puta 16. & fit 1 N. 8. erit igitur primus 8 ½. secundus 32 ½. tertius 40. & satisfaciunt proposito.

ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τοῦ πρώτου ὑπερέχουσι τετραγώνῳ. ὑπερεχέτωσαν δυ. α. ἔσται ὁμοίως ὁ πρῶτος ς α μο ἡμίσεος. καὶ λοιπὸν ἄρα ⓦ δεύτερον ἔχομεν δυνάμεως ἡμίσεος μο ἡμίσεος. λοιπὸν δεῖ τὸν πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου ὑπερέχειν τοῦ δευτέρου τετραγώνῳ. ἀλλ᾽ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου τοῦ μὲν δευτέρου ὑπερέχει ςς β. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ; τουτέστι μο ις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο η. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο η καὶ ἡμίσεος. ὁ δὲ δεύτερος μο λβ καὶ ἡμίσεος. ὁ δὲ τρίτος μο μ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM V.

QVOD supponit hîc Diophantus, tale est.

Datis tribus numeris, si interuallum quo duo ex illis superant tertium auferatur à summa trium numerorum, remanet duplum tertij.

Hoc ipsum verò iam demonstratum est ad decimam octauam primi. Dupliciter autem variari possunt tam operatio quàm solutio. Primò enim quadratus qui ponitur pro summa trium numerorum fingi potest non solùm à latere 1 N. + 1. sed à quotcunque Numeris + quotcunque vnitatibus. Deinde interuallum primi & tertij supra secundum, quod in hypothesi Diophantæa reperitur 2 N. potest æquari cuilibet vnitatum numero quadrato, vt manifestum est.

QVÆSTIO VI.

Aliter.

QVÆRO primùm tres numeros quadratos æquales quadrato. Si autem duos quadratos composuero, vt 4. & 9. & quæsiuero quis quadratus adscito 13. faciat quadratum, inueniam 36. & erunt tres quadrati æquales vni quadrato. Restat vt quæramus tres numeros, vt bini iuncti reliquum superent dato numero, primus scilicet & secundus, tertium superent vnitatibus 4. secundus & tertius primum excedant vnitatibus 9. tertius & primus

Ἄλλως.

ΖΗΤΩ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς [τετραγώνους] ἴσους τετραγώνῳ. ἐὰν δὲ συνθῶ β τετραγώνους αὐτοὺς ⓦ δ καὶ τὸν θ. καὶ ζητήσω τίς τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ιγ. ποιεῖ τετράγωνον. εὑρήσω τὸν λς. καὶ ἔσονται ⓖ τρεῖς τετράγωνοι ἴσοι ἑνὶ τετραγώνῳ. λοιπὸν ἀπῆκται εἰς τὸ ζητῆσαι εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως συνδύο τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι δοθέντι ἀριθμῷ, ὁ μὲν πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου, τοῦ τρίτου μο δ. ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου [τοῦ πρώτου] μο θ. ὁ δὲ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου,

τοῦ δευτέρου μονάδας λϛ. τοῦτο δὲ προδέδεικται. καὶ ἔστιν ὁ μὲν πρῶτος μο κ. ὁ δὲ δεύτερος μο ϛ καὶ ἡμίσεος. ὁ δὲ τρίτος μονάδων κβ καὶ ἡμίσεος. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

secundo superaddant vnitates 36. Hoc autem supra demonstratum est. Et est primus 20. secundus 6 $\frac{1}{2}$. tertius 22 $\frac{1}{2}$. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM VI.

Dvo supponit Diophantus. Primũ reperiri posse tres quadratos, quadratum simul conficientes, quod quidem facilè fit auxilio vndecimæ secundi. Nã sumptis duobus quibuslibet quadratis puta 4. & 9. quorum summa 13. Iam quæro per vndecimã secundi duos quadratos quorum interuallum sit 13. & horum minor 36. est tertius quæsitus. Secundò supponit author tres excessus binorum suprà reliquum, æquari summæ ipsorum numerorum, quod iam à nobis est demonstratum ad decimam octauam primi. Porrò tum ex hac operatione, tum ex Canone decimæ octauæ primi eruitur huiusmodi Canon.

Sume tres quadratos quadratum conficientes, ab eorum summa aufer sigillatim vnumquemque ipsorum, residuorum semisses erunt quæsiti numeri.

Sed & non vulgari artificio quæstio extendetur ad quatuor numeros, & sic proponetur.

Inuenire quatuor numeros quadrato æquales, quorum terni reliquum superent quadrato numero.

Ponatur summa numerorum quilibet numerus quadratus, puta 4. Quia ergo vt ostensum est ad vigesimam primi, summa excessuum dopla est summæ numerorum, erit excessuum summa 8. Restat ergo vt 8. diuidatur in quatuor quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 4. Id autem facilè fiet si 4. diuidatur bis in duos quadratos per octauam secundi, eruntque hi $\frac{36}{25}$ $\frac{64}{25}$ $\frac{100}{169}$ $\frac{576}{169}$. Itaque applicando hîc Canonem vigesimæ primi, hoc est à semisse excessuum qui est 4. auferendo singulos excessus, & residuorum capiendo semisses, fient quæsiti numeri $\frac{32}{25}$ $\frac{18}{25}$ $\frac{50}{169}$ $\frac{288}{169}$. sic licebit quæstionem ad quotlibet numeros extendere, sed aliquando vtendum erit artificio quo duodecima quinti vtitur Diophantus. Vt si quærantur quinque numeri quadrato æquales, quorum quaterni reliquum superent quadrato numero. Quare quæstionis huius explicationem reiicimus in decimam septimam quinti, vbi commodius afferetur.

QVÆSTIO VII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ἵνα σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ δυ α [ςς β μο α. καὶ ἔστω] ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου [δυ α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ςς β μο α. ἔστω δὲ καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου] δυ α μο α ⋔ ςς β. ἀπὸ πλευρᾶς ς α λείψει μο α. καὶ εἰσὶν οἱ τρεῖς δυ α ςς β μο α. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςς δ. ἀλλὰ καὶ σὺν τῷ δευτέρῳ τέτακται δυ α.

Inuenire tres numeros æquales quadrato, vt bini iuncti faciant quadratum. Statuantur tres simul æquales quadrato 1 Q. + 2 N. + 1. & esto primus cum secundo 1 Q. relinquetur ergo tertius 2 N. + 1. Esto autem secundus cum tertio 1 Q. + 1 − 2 N. à latere 1 N. − 1. Et quia tres simul sunt 1 Q. + 2 N. + 1. relinquetur vtique primus 4 N. sed primus cum secundo positus est 1 Q.

erit igitur secundus 1 Q. − 4 N. Oportet itaque & primum tertio iunctum, nempe 6 N. + 1. æquari quadrato. Sit ergo is 121. & fit 1 N. 20. erit igitur primus 80. secundus 320. tertius 41. & soluunt quæstionem.

ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται δ^ϒ ᾱ λεί ψει ςς̄ δ̄. δεήσει ἄρα καὶ τὸν πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου συναγόμενον ςς̄ ϛ̄ μ° ᾱ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ. ἔστω ἴσος μ° ρκα. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° κ̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° π̄. ὁ δὲ δεύτερος μ° τκ̄. ὁ δὲ τρίτος μ° μᾱ. καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

QVÆSTIO VIII.

Aliter.

PONANTVR tres simul 1 Q. + 2 N. + 1. & sint primus & secundus 1 Q. relinquitur ergo tertius 2 N. + 1. Esto rursus secundus cum tertio 1 Q. + 1. − 2 N. horum ergo tertius cùm sit 2 N. + 1. relinquitur secundus 1 Q. − 4 N. est autem & primus cum secundo 1 Q. quorum secundus est 1 Q. − 4 N. Relinquitur ergo primus 4 N. & tres coniuncti faciunt imperatum quadratum 1 Q. + 2. N. + 1. & primus cum secundo, itemque secundus cum tertio faciunt quadratum. Oportet itaque & tertium cum primo iunctum, nimirum 6 N. + 1. æquari quadrato. Esto quadrato 36. & fit 1 N. $\frac{35}{6}$. Erit ergo primus $\frac{140}{6}$. hoc est $\frac{840}{36}$. secundus $\frac{385}{36}$. tertius $\frac{456}{36}$. & soluunt quæstionem.

Ἄλλως.

ΤΕΤΑΧΘΩΣΑΝ οἱ τρεῖς δ^ϒ ᾱ ςς̄ β̄ μ° ᾱ. καὶ ἔστω ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος δ^ϒ ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς̄ β̄ μ° ᾱ. ἔστω δὲ καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου δ^ϒ ᾱ μ° ᾱ λεί ψει ςς̄ β̄. ὧν ὁ τρίτος ςς̄ β̄ μ° ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δ^ϒ ᾱ λεί ψει ςς̄ δ̄. ἔστι δὲ καὶ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου δ^ϒ ᾱ. ὧν ὁ δεύτερος δ^ϒ ᾱ λεί ψει ςς̄ δ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςς̄ δ̄. καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον δ^ϒ ᾱ ςς̄ β̄ μ° ᾱ. καὶ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου, καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου ποιοῦσι τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου συναγόμενον ςς̄ ϛ̄ μ° ᾱ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ. ἔστω μ° λϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς λε^ϛ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρμ^ϛ. τουτέστι ωμ^λϛ. ὁ δὲ δεύτερος τπε^λϛ. ὁ δὲ τρίτος υνϛ^λϛ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONES VII. ET VIII.

INTER has duas propositiones nulla omnino vel perexigua est differentia; eadem fermè est operatio aliter atque aliter explicata. Diuersitas in eo consistit, quod in septima inuenta prius tertij numeri hypostasi, inuenit deinde hypostasim primi, vnde elicit hypostasim secundi. At in octaua inuento prius tertio, inde elicit secundum, atque inde primum. Eodem tamen recidit vtraque operatio, vt manifestum est. Itaque vt omnia explicentur dilucidè, & varietas omnis tum operationis tum solutionis perfectè comprehendatur.

Aduerte primò, vt benè monet Xilander, pro quadrato quem tres nnmeri simul constituunt statui posse quemlibet quadratum, cuius latus constet ex quolibet Numerorum numero + quotlibet vnitatibus. Posuit Diophantus latus illius 1 N. + 1. sed poni poterat 1 N. + 2. vel 1 N. + 3. &c. vel etiam 2 N. + 1. 2 N. + 2, 2 N. + 3. &c.

Aduerte secundò pro summa secundi & tertij statui posse quadratum quemlibet minorem quadrato, qui positus est pro summa trium numerorum. Sic Diophantus posita summa trium 1 Q. + 2 N. + 1. posuit summam secundi & tertij 1 Q. − 2 N. + 1. sed si ponatur summa trium 1 Q. + 4 N. + 4. poni poterit summa secundi & tertij 1 Q. + 2 N. + 1. vel etiam 1 Q. − 2 N. + 1. vel 1 Q. − 4 N. + 4. & sic in infinitum.

Aduerte tertiò summam primi & tertij quæ quadrato æquanda manet, æquari debere tali quadrato, vt inde auferendo vnitates quæ continentur in eadem summa, & diuidendo residuum per numerum Numerorum eiusdem summæ, prodeat quotiens maior numero Numerorum, qui reperiuntur cum signo defectus in hypostasi secundi numeri. vt in hypothesi Diophantæa, vbi summa primi & tertij 6 N. + 1. est æquanda quadrato, quia hypostasis secundi est 1 Q. − 4 N. Oportet inuenire quadratum qui vnitate multatus, & diuisus per 6. det quotientem maiorem quàm 4. Id autem vt arte certa consequamur. Ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. vnde ablata vnitate, fiet 1 Q. − 1. quo diuiso per 6. fiet $\frac{1}{6}$ Q. − $\frac{1}{6}$. maior quàm 4. & supplendo defectum, fiet $\frac{1}{6}$ Q. maior quàm 4 $\frac{1}{6}$. & omnia per 6. multiplicando, fiet 1 Q. maior quàm 25. Quamobrem æquabimus 6 N. + 1. cuilibet quadrato maiori quàm 25. In prima operatione Diophantus æquauit 6 N. + 1. quadrato 121. In secunda verò, quadrato 36. Eodemque artificio reperietur terminus suprà quem consistere debet talis quadratus, si primæ positiones aliter instituantur.

Porro ex operatione Diophanti elicio satis artificiosum Canonem.

Cape duos quadratos quorum ratio sit maior quàm 25. ad 1. horum interualli bessis constituet primum quæsitorum: Quem si auferas à quadrato quotientis qui fit diuidendo idem interuallum per sextuplum minoris lateris, orietur secundus. Denique si eiusdem interualli trienti addas minorem quadratum, fiet tertius.

Verbi gratia cape quadratos 121. & 1. horum interuallum est 120. cuius $\frac{2}{3}$ sunt 80. primus numerus. Tum dinide 120. per 6. sextuplum minoris lateris fiet 20. cuius quadratus 400. vnde auferendo 80. fit 320. secnndus numerus. Denique trienti ipsius 120. qui est 40. adde minorem quadratum 1. fiet 41. tertius numerus. sunt ergo tres quæsiti numeri 80. 320. 41.

QVÆSTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς [τετραγώνους] ἵνα ὦσιν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὧν τὸ ἥμισυ τῆς συνθέσεως τῶν τριῶν μείζων ἐστὶν ἑκάστου. τετάχθω οὖν ὁ μὲν πρῶτος δυνάμεις α̅. ὁ δὲ δεύτερος δυ α̅ ςς β̅ μο α̅. καὶ ἐστὶν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ ςς β̅ μο α̅. ἐὰν δὲ προσθῶ τῷ δευ-

INVENIRE tres numeros in æquali interuallo, vt bini iuncti quadratum efficiant. Quæro primùm tres quadratos numeros æqualibus interuallis distantes, quorum summæ semissis maior sit quouis ipsorum. Ponatur igitur primus 1 Q. secundus autem 1 Q. + 2 N. + 1. & est ipsorum interuallum 2 N. + 1. si autem addidero se-

cundo 2 N. + 1. fiet tertius 1 Q. + 4 N. + 2. Hæc æquantur quadrato à latere 1 N. − 8. fitque quadratus 1 Q. + 64 − 16 N. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fit 1 N. $\frac{62}{20}$. hoc est $\frac{31}{10}$. Erit ergo primus 961. secundus 1681. tertius denique 2401. & satisfaciunt proposito, sunt enim tres quadrati æquali interuallo distantes, & semissis summæ illorum, quouis ipsorum est maior. Venio nunc ad id quod quæritur, scilicet quo pacto tres numeri inueniantur eodem interuallo se superantes, quorum bini coniuncti quadratum faciant. Primùm quæro tres quadratos in æquali interuallo, vti iam demonstratum est, & sunt huiusmodi quadrati. Primus 961. secundus 1681. tertius 2401. inueniendum iam est quomodo primus & secundus facere possint 961. secundus & tertius 2401. (nam ob interualli æqualitatem inuertitur ordo) tertius & primus 1681. Statuatur trium summa 1 N. Cùm ergo tres simul sint 1 N. si inde detraxero summam primi & secundi nimirum 961. habebo tertium 1 N. − 961. & rursus si ab 1 N. abstulero summam secundi & tertij, nempe 2401. habebo primum 1 N. − 2401. si autem ab 1 N. dempsero summam tertij & primi, nimirum 1681. habebo secundum 1 N. − 1681. Restat vt tres simul iuncti æquales sint 1 N. & fit 1 N.

πρὸς τῷ τοῦ ςς^ων β μ° α. γίνεται ὁ τρίτος Δ^Υ α ςς δ μ° β. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς α λείψει μ° η. γίνεται ὁ τετράγωνος Δ^Υ α μ° ξδ λείψει ςς ις. ἴσος Δ^Υ α ςς δ μ° β. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ξβ κ^ων. τουτέστι λα ι^ων. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϡξα. ὁ δὲ δεύτερος ͵αχπα. ὁ δὲ τρίτος ͵βυα. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα τὸ ζητούμενον. τουτέστι τρεῖς τετραγώνους ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, καὶ ἔστι τῶν τριῶν τὸ ἥμισυ μείζων ἑκάστου αὐτῶν. νῦν ἔρχομαι ἐπὶ τὸ προβεβλημένον, τουτέστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως συνδύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τρεῖς τετραγώνους ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶν οἱ τετράγωνοι ὁ πρῶτος ϡξα. ὁ δεύτερος ͵αχπα, ὁ τρίτος ͵βυα. νῦν δεῖ εὑρεῖν ὅπως ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος ποιῶσι μ° ϡξα. ὁ δὲ δεύτερος, καὶ ὁ τρίτος ͵βυα. ἐνήλλακται γὰρ διὰ τὴν [ἴσην] ὑπεροχήν. ὁ δὲ τρίτος, καὶ ὁ πρῶτος μ° ͵αχπα. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ς ἑνός, καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσιν ς ἑνός, ἐὰν ἄρα ἀφέλω τὰς τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου μ° ϡξα. ἕξω τὸν τρίτον ς α ⋔ μ° ϡξα. καὶ πάλιν ἐὰν ς ἑνός, ἀφέλω τὰς τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου μονάδας ͵βυα. ἕξω τὸν πρῶτον ς α λείψει μ° [͵βυα. ἐὰν δὲ ς ἑνὸς ἀφέλω τὰς τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου μονάδας ͵αχπα. ἕξω τὸν δεύτερον ς α] λείψει μ° ͵αχπα. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους εἶναι ἀριθμῷ α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς

,βφκα καὶ ἥμισυ. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

2521 $\frac{1}{2}$ & factum est quod imperabatur.

IN QVAESTIONEM IX.

Hic multa obseruanda sunt quæ minimè attigit Xilander, sine quibus operatio Diophanti nequit perfectè intelligi.

Primò, quærit tres quadratos æqualibus interuallis distantes, quorum summæ semissis maior sit quolibet ipsorum, quia vult vt quæsiti numeri bini & bini constituant huiusmodi quadratos. Id autem fieri non potest, nisi trium quadratorum summæ semissis quolibet ipsorum sit maior, vt demonstratum est ad decimam sextam primi, ad quam tandem reducitur hæc quæstio, vt liquet ex vltima operatione quæ prorsus eadem est cum operatione decimæ sextæ primi. vnde etiam vti posses Canone ibidem tradito.

Secundò, sumit huiusmodi quadratos æqualibus interuallis distantes, quia inde sequitur ipsos tres numeros quæsitos, qui bini hos quadratos constituunt, distare etiam inter se interuallis æqualibus, vt postulat quæstio. Quod pendet à tali propositione.

Si fuerint tres numeri, qui bini constituant summas æqualibus interuallis distantes, & ipsi numeri æqualibus distabunt interuallis, & è conuerso.

A 2. B 5. C 8.
D 7. E 10. F 13.

Sint tres A B C. quorum A B simul faciant D. At A C simul componant E, & B C. simul constituant F. sintque D E F. æqualibus distantes interuallis. Dico & ipsos A B C. æqualibus interuallis distare, imò iisdem prorsus quibus distant ipsi D E F. Etenim quia idem A. additus vtrique B. & C. facit D & E. erit idem interuallum inter D & E. quod est inter B & C. (nam idem numerus duobus inæqualibus additus, summas facit eodem interuallo inæquales.) Similiter quia idem C. additus vtrique A & B. componit ipsos E & F. erit eandem ob causam, idem interuallum ipsorum E F. quod est ipsorum A B. Quare constat propositum. vnde etiam innotescit inuersio illa ordinis de qua loquitur Diophantus, nam primus & secundus constituunt D. At secundus & tertius faciunt F. Ac demum tertius & primus componunt E. Quare & ipse in quadratis inuentis ordinem inuertit, vult enim primum quadratum esse summam primi & secundi numeri. At tertium quadratum esse summam secundi & tertij numeri. Ac demum secundum quadratum esse summam tertij & primi numeri,

Tertiò numeri quadrato æquandi 1 Q. + 4 N. + 2. latus fingit Diophantus 1 N. − 8. tali arte vt resoluendo hypostases per valorem Numeri, fiant quadrati quæsiti quales postulantur, nimirum vt quilibet ipsorum, minor sit semisse summæ eorundem. Id autem quomodo certa scientia consequi possimus non statim apparet. Et Xilander quidem experiendo didicit latus fictitium esse non posse 1 N. − 6. Sed non docuit modum inueniendi terminum supra quem consistere debet vnitatum numerus in dicto latere ponendus cum defectu, quem sanè si esse 8. existimauit, allucinatus est, cùm optimè fingi possit latus illud 1 N. − 7. vt mox patebit. Itaque vt rem à fundamentis aperiamus. Quia si sint tres numeri quorũ quilibet minor sit semisse summæ illorum, hoc idem est, atque si duo quilibet ex ipsis maiores sint reliquo vt manifestum est. At duo quilibet maiores erunt reliquo, si duo minores simul superent maximum. Eo redacti sumus vt inueniamus tres quadratos in medietate Arithmetica, vt medius & minimus simul excedant maximũ. est autem minimus 1 Q. medius 1 Q. + 2 N. + 1. Horum ergo summa 2 Q. + 2 N. + 1. debet esse maior maximo qui est 1 Q. + 4 N. + 2. & auferendo vtrinque similia, remanet 1 Q. maior quàm 2 N. + 1. qua æquatione resoluta, fit 1 N. maior quàm ℞. 2 + 1. seu quàm 2 $\frac{1}{2}$. Quamobrem in fingendo latere quadrati 1 Q. + 4 N. + 2. curandum est vt valor numeri non sit minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. Atqui valor Numeri fiet à quodam quadrato, multato binario, & diuiso per duplum sui lateris quaternario auctum. Inueniendus ergo est huiusmodi quadratus. Ponatur is 1 Q. Igitur $\frac{1 Q. - 2}{2 N. + 4}$. non minor esse debet quàm 2 $\frac{1}{2}$. & omnia

ducendo

ducendo in 2 N. + 4. fit 1 Q. – 2. non minor quàm 5 N. + 10. & tandem 1 Q. non minor quàm 5 N. + 12. Quare æquabimus 1 Q. numero paulò maiori quàm 5 N. + 12. puta 5 N. + 14. & fiet 1 N. 7. Itaque in latere fictitio ponentur vnitates non minores quàm 7. Quod si fingatur latus illud 1 N. – 7. fiet quadratus 1 Q. – 14 N. + 49. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fiet 1 N. $\frac{47}{18}$. sunt ergo quæsiti quadrati 2209. 4225. 6241.

Hinc ad soluendum hoc lemma elicitur huiusmodi Canon.

Sume quemuis numerum non minorem quàm 7. & eius quadratum binario multatum diuide per duplum sui lateris quaternario auctum, quotientis quadratus est minimus quæsitorum. Cui si addas duplum sui lateris vnitate auctum, fiet secundus, & huic si addas idem interuallum, fiet tertius.

Semel autem inuentis tribus huiusmodi quadratis, reperientur alij infiniti idem præstantes, si iam inuenti per eundem aliquem quadratum multiplicentur vel diuidantur, nam fient quadrati æqualibus quoque interuallis distantes, vt iam monuimus ad vigesimam secundi, quæ causa est cur Diophantus omisso communi denominatore, solis vtatur numeratoribus. Denique hoc lemmate expedito, soluetur iam ipsa quæstio per Canonem decimam-sextam primi, vt euidens est. sic inuentis quadratis 2209. 4225. 6241. horum summam cape fiet 12675. cuius semissis 6337 $\frac{1}{2}$. vnde auferendo sigillatim eosdem quadratos, remanent ordine inuerso quæsiti numeri 4128 $\frac{1}{2}$. 2112 $\frac{1}{2}$. & 96 $\frac{1}{2}$.

QVÆSTIO X.

DATO aliquo numero, inuenire tres alios, vt compositus ex binis quibuslibet adsumpto dato numero faciat quadratum; sed & summa trium dato numero adiecto faciat quadratum. Esto datus numerus 3. Compositus autem ex duobus primis sit 1 Q. + 4 N. + 1. vt adscito 3. faciat quadratum. Duo verò deinceps sint 1 Q. + 6 N. + 6. Tres autem simul 1 Q. + 8 N. + 13. vt & hi adsumpto 3. faciant quadratum. Et quoniam trium summa est 1 Q. + 8 N. + 13. quorum primi duo sunt 1 Q. + 4 N. + 1. Relinquitur vtique tertius 4 N. + 12. Rursus quoniam tres simul sunt 1 Q. + 8 N. + 13. quorum secundus & tertius sunt 1 Q. + 6. N. + 6. relinquitur vtique primus 2 N. + 7. sed & primus & secundus sunt

ΑΡΙΘΜΟΥ τινὸς δοθέντος προσευρεῖν ἑτέρους τρεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔτι δὲ καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες προσλαβόντες τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς μο τριῶν, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ δύο τῶν πρώτων δυνάμεως α ςς δ μο α. ἵνα μετὰ τῶν τριῶν μονάδων ποιῇ τετράγωνον. οἱ δὲ ἑξῆς δύο Δυ α ςς ϛ μο ϛ. οἱ δὲ τρεῖς Δυ α ςς η μο ιγ. ἵνα καὶ οὗτοι μετὰ μο τριῶν ποιῶσι τετράγωνον, καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι Δυ α ςς η μο ιγ. ὧν οἱ πρῶτοι δύο Δυ α ςς δ μο α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἐστὶ ςς δ μο ιβ. πάλιν ἐπεὶ τρεῖς εἰσι Δυ α. ςς η. μο ιγ. ὧν ὁ δεύτερος καὶ τρίτος Δυ α ςς ϛ μο ϛ. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἐστὶ ςς β μο ζ. ἀλλὰ καὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερός εἰσι

δυνάμεως α̅ ςς̅ δ̅ μο α̅. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δυ α̅ ςς̅ β̅ λείψει μο ς̅. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου προσλαβόντα μο τρεῖς ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου προσλαβὼν μο γ̅. γίνονται ςς ς̅ μο κβ̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ρ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ιγ̅. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδες λγ̅. ὁ δὲ δεύτερος μο ρπθ̅. ὁ δὲ τρίτος μο ξδ̅. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

1 Q. + 4 N. + 1. relinquitur ergo secundus 1 Q. + 2 N. − 6. Superest vt primus & tertius adscito 3. faciant quadratum. Sed primus & tertius adscito 3. faciunt 6 N. + 22. Hæc ergo æquantur quadrato. Esto is 100 fit 1 N. 13. Erit igitur primus 33. secundus 189. tertius 64. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM X.

Qvæ monet Xilāder de positionum varietate, verissima sunt. Sed allucinatur cùm ait numerum 6 N. + 22. æquari posse cuilibet quadrato maiori quàm 22. Nam oportet talem quadratum deligi à quo auferendo 22. & residuum per 6. diuidendo fiat quotiens cuius quadratus auctus duplo sui lateris superet 6. aliter habere non posset secundus numerus qui positus est 1 Q. + 2 N. − 6. Ita si ponas 6 N. + 22 æquari quadrato 25. secundus numerus inuenietur minor nihilo. Quamobrem sumendus est quadratus 36. vel quilibet alius maior quàm 36. vt certa ratione facilè concludi potest. Etenim quia 1 Q. + 2 N. debent excedere 6. hac æquatione resoluta, fit 1 N. maior quàm ℞ 7 − 1. seu non minor quàm 1 [illegible]. fit autem valor numeri, vt dictum est à quodam quadrato auferendo 22. & residuum diuidendo per 6. quare quæratur huiusmodi quadratus, & esto 1 Q. Igitur $\frac{1}{6}$ Q. − $\frac{22}{6}$. non minor esse debet quàm 1 [illegible]. & tandem 1 Q reperitur non minor quàm 32 [illegible]. qualis est 36. & alius quilibet suprà 36.

QVÆSTIO XI.

ΑΡΙΘΜΟΥ τινος δοθέντος προσευρεῖν ἑτέρους τρεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν λείψει τοῦ δοθέντος ποιῇ τετράγωνον. ἔτι δὲ καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες καὶ λείψει τοῦ δοθέντος ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω πάλιν ὁ μὲν δοθεὶς μο γ̅. ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ τῶν δύο πρώτων δυ α̅ μο γ̅. ἵνα λείψας τὰς τρεῖς μονάδας ποιῇ τετράγωνον. οἱ δὲ δύο ἑξῆς δυ α̅ ςς̅ β̅ μο δ̅. οἱ δὲ τρεῖς δυ α̅ ςς̅ δ̅. μο ζ̅. ἵνα καὶ οὗτοι λείψει μο γ̅. ποιῶσι τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι δυ α̅ ἀριθμῶν δ̅ μονάδων ζ̅. ὧν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος δυ α̅ μο γ̅. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἐστὶν ςς̅ δ̅ μο δ̅. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ

Dato aliquo numero, inuenire tres alios, vt compositus ex duobus quibuslibet dempto dato numero faciat quadratum, sed & trium summa detracto dato numero faciat quadratum. Esto rursus datus numerus 3. Ponatur compositus ex duobus primis 1 Q. + 3. vt detracto 3. faciat quadratū. Duo verò deinceps sint 1 Q. + 2 N. + 4. Trium verò summa 1 Q. + 4 N. + 7. vt & hi dempto 3. faciant quadratum. Et quoniam summa trium est 1 Q. + 4 N. + 7. quorum primus & secundus faciunt 1 Q. + 3. relinquitur tertius 4 N. + 4. Rursus quia secundus

& tertius sunt 1 Q. + 2 N. + 4. quorum tertius est 4 N. + 4. relinquitur secundus 1 Q. – 2 N. sunt autem primus & secundus 1 Q. + 3. quorum secundus est 1 Q. – 2 N. relinquitur ergo primus 2 N. + 3. Oportet itaque tertium & primum detracto 3. facere quadratum. Sed tertius cum primo, detracto 3. facit 6 N. + 4. Hæc igitur æquantur quadrato. Esto is 64. & fit 1 N. 10. Ad positiones. Erit primus 23. secundus 80. tertius 44. & satisfaciunt quæstioni.

τρίτος εἰσι δ^υ α̅ ςς̅ β̅ μ° δ̅. ὧν ὁ τρίτος ἐστὶ ςς̅ δ̅ μ° δ̅. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δ^υ α̅ λεί^ψει ςς̅ β̅. ἔστι δὲ καὶ ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος δ^υ α̅ μ° γ̅. ὧν ὁ δεύτερός ἐστι δ^υ α̅ λεί^ψει ςς̅ β̅. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςς̅ β̅ μ° γ̅. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον μετὰ τοῦ πρώτου λεί^ψει μ° γ̅. ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου λεί^ψει μ° γ̅. ἐστὶν ςς̅ ς̅ μ° δ̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἔστω τῷ ξδ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° ι̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° κγ̅. ὁ δὲ δεύτερος μ° π̅. ὁ δὲ τρίτος μ° μδ̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XI.

Hic quoque lapsus est Xilander cùm putauit numerum 6 N. + 4. æquari potuisse quadrato 16 sic enim secundus qui positus erat 1 Q. – 2 N. Inuenitur æqualis nihilo. Quare determinandum est de huiusmodi quadraro, hac arre. Vt 1 Q. sit maior quàm 2 N. oportet vtique 1 N. maiorem esse quàm 2. Itaque quia æquando quadrato 6 N. + 4. fit valor Numeri à quodam quadrato auferendo 4. & residuum per 6. diuidendo: Eò redacti sumus vt inueniamus quadratum qui multatus quaternario, & per 6. diuisus det quotientem maiorem quàm 2. Esto is 1 Q. Igitur $\frac{1}{6}$ Q. – $\frac{4}{6}$. maior est quàm 2. & randem 1 Q. reperitur maior quàm 16. Quamobrem numerus 6 N. + 4. æquandus erit quadrato cuilibet maiori quàm 16.

QVÆSTIO XII.

INVENIRE tres numeros vt quem bini mutua multiplicatione producunt, is adscito dato numero faciat quadratum. Datus esto 12. Quoniam igitur postulatur vt productus ex primo in secundum adscito 12. faciat quadratum, si ab aliquo quadrato dempsero 12. habebo productum ex primo in secundum. Esto itaque quadratus 25. Si ergo ab eo detraxero 12. reliquum habebo productum ex primo in secundum, nempe 13. Esto igitur primus 13. secundus autem 1. & statuantur in numeris, ita ta-

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιβ̅. ἐπεὶ οὖν ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου προσλαβόντα τὸν ιβ̅ ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὸν ιβ̅ ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου. ἔστω δὴ ὁ τετράγωνος μ° κε̅. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ιβ̅. λοιπὸν ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μ° ιγ̅. ἔστω οὖν ὁ μὲν πρῶτος μ° ιγ̅. ὁ δὲ δεύτερος μ° α̅. καὶ τετάχθωσαν ἐν ἀριθμοῖς. ὥστε

τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μ° ιγ. καὶ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ςς ιγ. ὁ δὲ δεύτερος αˣ. ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ ἑτέρου τετραγώνου ἀφέλω μ° ιβ. ἕξω τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου. ἔστω ἀπὸ τοῦ ιϛ. λοιπὸς ἄρα ὁ ἀπὸ δευτέρου καὶ τρίτου ἔσται μ° δ. τετάχθωσαν πάλιν ἐν ἀριθμοῖς ὥστε ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν μ° δ. ὧν ὁ δεύτερός ἐστι αˣ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς δ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μετὰ μ° ιβ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δ^ν νβ. δεήσει ἄρα δ^ν νβ μετὰ μ° ιβ ποιεῖν τετράγωνον. καὶ εἰ εἶχον τὸ πλῆθος τῶν ιγ μετὰ τοῦ πρώτου τετράγωνον, εὐχερὴς ἦν ἡ ἴσωσις. ἀλλ' ἐπεὶ οὐ τοῦτο, ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος, καὶ ἑκάτερος μετὰ μ° ιβ ποιῇ τετράγωνον, ἐὰν δὲ αὐτοὶ ἀριθμοὶ εὑρεθῶσι τετράγωνοι, ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος. γέγονεν οὖν εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος μετὰ μονάδων ιβ ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον, καὶ εὐχερὲς ὡς ἔφαμεν ποιοῦν τὴν ἴσωσιν, καί ἐστιν ὁ μὲν δ. ὁ δὲ αˣ. ἑκάτερος γὰρ τούτων μετὰ μονάδων ιβ ποιεῖ τετράγωνον. τούτων εὑρεθέντων ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ἀριθμὸν δ. τὸν δὲ δεύτερον αˣ. τὸν δὲ τρίτον ςς αˣ. καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μετὰ μ° ιβ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δ^ν α. δ^ν ἄρα α μετὰ μ° ιβ ἴσοι ἐστὶ τετραγώνῳ.

men vt productum multiplicationis eorum sit 13. & sit primus 13 N. at secundus $\frac{1}{13}$. Itaque si ab altero quadrato detraxero 12. habebo productum ex secundo in tertium. Esto à quadrato 16. relinquitur ergo productus ex secundo in tertium 4. statuantur rursus in numeris, ita vt productum multiplicationis eorum sit 4. Cùm ergo secundus sit $\frac{1}{13}$. erit vtique tertius 4 N. Oportet igitur & productum ex primo in tertium addito 12. fieri quadratum. Sed productus ex primo in tertium est 52 Q. Proinde 52 Q. + 12. æquantur quadrato. Et si 13. numerus pro primo positus quadratus fuisset, facilis esset æquatio. Quod cùm non sit, eo res deducta est vt duo numeri sint inueniendi, vt productum multiplicationis eorum sit quadratus, & præterea vterque cum 12. faciat quadratum. Sed & si loco numerorum quadratos inueniam, ij sua multiplicatione quadratum producent. Oportet ergo inuenire duos quadratos quorum vterque adscito 12. faciat quadratum. Hoc autem facile est, & æquationem expediet, & est alter 4. alter $\frac{1}{4}$. vterque enim addito 12. facit quadratum. His repertis redeo ad id quod initio actum erat, & pono primum 4 N. secundum $\frac{1}{13}$. tertium $\frac{1}{4}$ N. Restat vt productus ex primo in tertium adiuncto 12. faciat quadratum. Sed productus ex primo in tertium est 1 Q. Proinde 1 Q. + 12. æquatur quadrato

Formo quadratum à latere 1 N. + 3. nempe 1 Q. + 6 N. + 9. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. & constat propositum.	πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς^ο ᾱ μ^ο γ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται δ^υ ᾱ ςς^οι ς μ^ο θ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ^ς. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM XII.

Hæc quæstio cum sequente est de earum numero quas pro deploratis reliquit Xilander, in quam cùm multa infeliciter commentus sit, textum tamen Diophanti leuiter admodum deprauatum restituere non potuit. Sanè tota deprauatio in eo est, quod fractionem Numericam $\frac{1}{N}$. imperitus librarius ambigue semper expressit, nam primo loco sic eam exhibet ς^ου ᾱ. deinde passim ς^ι. cùm tamen aliarum fractionum more potiùs fuisset sic exprimenda α^ς. Hinc erroris ansam accipiens Xilander, vertit vbique 1 N. loco $\frac{1}{N}$. vnde in difficultates inextricabiles seipsum coniecit.

Porrò dupliciter variari possunt positiones & solutio, nam loco ipsorum 4. & $\frac{1}{4}$. infiniti alij quadrati inueniri possunt per vndecimam secundi, qui adscito 12. quadratum faciant. Deinde numeri quadraro æquandi 1 Q. + 12. latus diuersimode fingi potest, videlicet ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus sit maior quàm 12. Diophantus æquauit quadrato à latere 1 N. + 3. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. suntque quæsiti numeri 2. 2 $\frac{1}{8}$.

Placet etiam in artis specimen aliam tradere analysim, Diophantæa vtique non deteriorem, quàm excogitaueram priusquam mihi contigisset Græcum videre Codicem. Sit datus numerus 20. quæratur quadratus qui adsumpto 20. faciat quadratum, is erit 16. Iam ergo statuantur. Primus & secundus duo quilibet Numeri, quorum mutuo ductu fiat 16. Et sit primus 8. secundus 2. nam euidens est sic vni parti propositi satisfieri. Tum verò statuatur pro tertio certus quadratorum numerus, qui ductus in secundum 2. faciat quadratum, puta 2 Q. vel 8 Q. vel 18 Q. &c. & adiiciatur ei defectus tot vnitatum, vt hæ multiplicatæ per eundem secundum numerum 2. faciant datum numerum 20. Hunc vnitatum numerũ reperies diuidẽdo 20. per 2 vnde fit 10 Quamobrem ponetur tertius 2 Q. − 10. sic enim eo ducto in secundum 2 fit 4 Q. − 20. cui addendo datum numerum 20. fit quadratus 4 Q. Superest vt productus primi in tertium adsumpto 20. faciat quadratum, facit autem 16 Q. − 60. Hoc ergo æquatur quadrato. Esto eius latus 4 N. − 2. fiet 1 N. 4. sunt ergo quæsiti numeri 8. 2. 22. & satisfaciunt proposito.

Hac ratione operando poni possunt primus & secundus duo quilibet numeri, quorum mutuo ductu fiat quadratus qui adsumpto dato numero quadratum faciat. Vnde iam duplex oritur variatio, tum quia huiusmodi diuersi quadrati infiniti reperientur per vndecimam secundi, tum quia eodem sumpto quadrato sumentur alij atque alij duo numeri, quorum mutuo ductu is fiat. Præterea in hypostasi tertij poni potest quilibet quadratorum numerus, qui ad vnitates secundi rationẽ habeat quadrati ad quadratum, vt in nostra hypothesi, poni poterat tertius non solùm 2 Q. − 10. sed etiam 8 Q. − 10. 32 Q. − 10. &c. Denique vltimi quadrati latus puta ipsius 16 Q. − 60. diuersimode fingi potest, nimirum à 4 N. − quotlibet vnitatibus. Vnde sanè infinita solutionum diuersarum suppetit sylua.

Canones ex his operationibus elici possent, sed non adeò expediti. Quare præstat duos alios elegantissimos afferre, qui ex quibusdam propositionibus libri secundi porismatum manifestè deducuntur. Primus itaque Canon esto.

Datum numerum aufer à duobus quadratis, vtrumque residuum diuide per interuallum laterum eorundem quadratorum, duo quotientes vnà cum prædicto laterum interuallo quæsitos exhibebunt numeros.

Verbi gratia datus numerus esto 12. aufer eum à quadratis 36. & 64. remanent 24. & 52. quæ si diuidas per 2. interuallum laterum, fient quotientes 12. & 26. sunt ergo quæsiti numeri 12. 26. 2. Huius Canonis demonstratio facilis est. Nam ex ipsa constructione manifestum est, ducto 2. in ipsos 12. & 26. & productis 24. & 52. addito eodem 12. fieri

quadratos 36. & 64. Rursus productum ex 12. in 26. adsumpto 12. facere quadratum, demonstratum est vndecima secundi porismatum. Quamobrem ex omni parte patet propositum. Secundus autem Canon est.

Datum numerum aufer a duobus quadratis, vtrumque residuum sigillatim diuide per interuallum laterum, duo quotientes, vnà cum duplo summæ ipsorum, multato supradicto interuallo, quæsitos exhibent numeros.

Itaque duo primi numeri per hunc canonem reperti, sunt iidem cum duobus primis per superiorem Canonem inuentis, sed tertius diuersus est. Ita dato eodem 12. & sumptis iisdem quadratis 36. & 64. fient vt prius primus & secundus 12. & 26. sed erit tertius duplum summæ illorum multatum binario, nimirum 74. Huius Canonis demonstratio integra continetur propositione decima tertia secundi porismatum. Cæterùm vtriusque Canonis simul auxilio licebit propositionem extendere ad quatuor numeros, & pulcherrimum problema à nemine hactenus tentatum enodare, nimirum.

Inuenire quatuor numeros, vt qui producitur ex binorum mutuo ductu adscito dato numero fiat quadratus. Datus esto 3.

Finge duos quadratos ab 1 N. + tot vnitatibus quarum, quadrati superent 3. ita vt interuallum earũdem vnitatum sit quadratus numerus. Verbi gratia finge latera quadratorum 1 N. + 2. & 1 N. + 6. quorum interuallum est quadratus 4. erunt quadrati 1 Q. + 4 N. + 4. & 1 Q. + 12 N. + 36. à quibus aufer sigillatim datum numerum 3. & residua diuide sigillatim per interuallum laterum 4. Et statue primum quæsitorum $\frac{1}{4}$ Q. + 1 N. + $\frac{1}{4}$. Secundum $\frac{1}{4}$ Q. + 3 N. + 8 $\frac{1}{4}$. Tertium duplum summæ vtriusque multatum interuallo 4. nimirum 1 Q. + 8 N. + 13. sic enim productus ex binorum multiplicatione adscito 3. quadratus fit per secundum Canonem. Ponatur denique quartus ipsum interuallum laterum 4. sic enim primus secundus, & quartus si bini inter se ducantur, & producto addatur 3. fit quadratus per primum Canonem. Superest igitur vt producto ex tertio in quartum addendo 3. fiat quadratus. Fit autem 4. Q. + 32 N. + 55. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo eius latus abs 2 N. − tot vnitatibus quarum quadratus superet 55. sitque illud 2 N. − 10. fit 1 N. $\frac{5}{8}$. Ad hypostases. Erunt quæsiti numeri $\frac{249}{256}$. $\frac{2617}{256}$. $\frac{1177}{64}$ & 4. qui satisfaciunt proposito. Nam ex primo in tres reliquos qui producuntur, sigillatim adsumpto 3. faciunt quadratos $\frac{848241}{65536}$. $\frac{342225}{16384}$. $\frac{441}{64}$ quorum latera $\frac{921}{256}$. $\frac{585}{128}$. $\frac{21}{8}$. At ex secundo in tertium & quartum producti, adscito 3. faciunt quadratos $\frac{3129361}{16384}$ & $\frac{2809}{64}$ quorum latera $\frac{1769}{128}$ & $\frac{53}{8}$. Denique ex tertio in quartum qui producitur, adscito 3. quadratum facit $\frac{1225}{16}$ cuius latus $\frac{35}{4}$.

Aliter. Ex quadratis qui exponuntur initio ponatur alter quilibet quadratus numerus maior dato numero 3. puta 4. & fingatur alter ab 1 N. + latere prioris quadrati, nimirum ab 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N. + 4. Tum ab vtroque quadrato auferatur 3. & residua diuidantur per interuallum laterum quod est 1 N. & statuatur primus quæsitorum $\frac{1}{1N}$. secundus 1 N. + 4 + $\frac{1}{1N}$. Tertius horum summæ duplum multatum interuallo laterum 1 N. nimirum 1 N. + 8. + $\frac{4}{1N}$. Quartus autem ipsum interuallum laterum, nimirum 1 N. Constat itaque ex vtroque Canone omnibus postulati partibus satisfieri, si productus ex tertio in quartum adscito 3. faciat quadratum. Facit autem 1 Q. + 8 N. + 7. hoc ergo æquatur quadrato. Esto latus eius 1 N. − 23. & fit 1 N. $\frac{29}{3}$. Ad hypostases. Erunt quæsiti numeri $\frac{3}{29}$. $\frac{1198}{87}$. $\frac{1573}{87}$. $\frac{29}{3}$. qui satisfaciunt postulatis. Etenim ex primo in reliquos tres qui producuntur, adsumpto 3. quadratos faciunt $\frac{3721}{841}$. $\frac{4096}{841}$. 4. quorum latera $\frac{61}{29}$. $\frac{64}{29}$. 2. At ex secundo in tertium & quartum producti, adscito 3. faciunt quadratos $\frac{1907161}{7569}$. & $\frac{1225}{9}$. quorum latera $\frac{1381}{87}$ & $\frac{35}{3}$. Denique productus ex tertio in quartum, adsumpto 3. quadratum facit $\frac{1600}{9}$. cuius latus $\frac{40}{3}$.

Vtraque operatio elegans est, & multam recipit varietatem, vt curioso lectori considerandum relinquo. Videtur ipse Diophantus in hoc problemate hęsisse, vt apparet ex vigesima prima quarti. Qua quærit quatuor Numeros, vt productus ex binorum mutuo ductu adscita vnitate quadratum faciat. Nam eius operatio cuilibet numero applicari nequit, sed solis quadratis, vt ibi docebimus.

QVÆSTIO XIII.

INVENIRE tres numeros vt quem bini mutua multiplicatione producunt, multatus dato numero faciat quadratum. Sit datus 10. Quando volumus productum ex primo in secundum dempto 10. facere quadratum, si alicui quadrato adiecero 10. habebo illum productum. Esto quadrato 4. erit ergo productus ex primo in secundum 14. sit primus 14. secundus igitur erit 1. Statuantur rursus in numeris, ita tamen vt productus multiplicationis faciat 14. & esto primus 14. N. secundus 1. Rursus si alteri quadrato adiecero 10. habebo productum ex secundo in tertium. Adiiciatur quadrato 9. erit ergo productus ex secundo in tertium 19. proinde cùm secundus sit 1. relinquitur tertius 19 N. Oportet igitur & productum ex primo in tertium dempto 10. facere quadratum. Facit autem 266. Q. −10. hæc ergo æquantur quadrato. Quare ob ea quæ in præcedenti dicta sunt, eò deuentum est vt inueniendi sint duo quadrati, quorum vterque dempto 10. faciat quadratum. Hoc autem facilè fit, inuenies enim si quæras quis quadratus dempto 10. faciat quadratum. & quoniam si cui numero additur 1. & summæ dimidium in se ducitur, & à sic facto quadrato numerus initio sumptus detrahitur, relinquitur rursum quadratus. Addo 1. ad 10. & summæ semissem ni-

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ↑ τοῦ δοθέντος ποιῇ τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ι. ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου λείψει μ° ι. ποιεῖν τετράγωνον ἐὰν ἄρα τινὶ τετραγώνῳ προσθῶ μ° ι. ἕξω τὸν ὑπ' αὐτῶν. ἔστω τῷ δ. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου μ° ιδ. ἔστω πρῶτος μ° ιδ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μ° α. καὶ τετάχθωσαν πάλιν ἐν ἀριθμοῖς, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μ° ιδ. καὶ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ςς̃ ιδ. ὁ δὲ δεύτερος α'. πάλιν ἐὰν ἑτέρῳ τετραγώνῳ προσθῶ μ° ι. ἕξω τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου. ἔστω τῷ θ. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου μ° ιθ. ὧν ὁ δεύτερός ἐστιν ὁ α'. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς̃ ιθ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου ↑ μ° ι. [ποιεῖν τετράγωνον.] γίνεται δὲ Δ^Υ σξς ↑ μ° ι. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, καὶ διὰ τὰ ἐν τῷ πρὸ τούτου εἰρημένα, ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος λείψει μ° ι. ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον. εὑρήσεις γὰρ [ἐὰν] ζητήσῃς ἄν τις τετράγωνος λείψει μ° ι. ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐάν τινι ἀριθμῷ προστεθῇ μονάς, καὶ τῶν γινομένων τὸ ἥμισυ τετραγωνίσωμεν, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου τετραγώνου ἀφέλωμεν τὸν ἐξ ἀρχῆς, ὁ λοιπὸς πάλιν τετράγωνος ἔσται. προστίθημι ταῖς μ° ι μ° α. καὶ τῶν γινομένων τὸ ἥμισυ του-

τέσι τὰ ε̄ καὶ ἥμισυ. τετραγωνίσας ἀπὸ τῶν γενομένων μ° λ. α^δ. ἀφελὼν τὰς μ° ῑ ἕξω τετράγωνον μ° κ̄. α^δ. ἀπὸ πλευρᾶς δ̄ καὶ ἡμίσυ. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον λ. α^δ. τὸν δὲ τρίτον Δ^Υ ᾱ. δεήσει ἄρα καὶ ἀπὸ Δ^Υ ᾱ ἀφαιρεθεισῶν μ° ῑ. τὸ λοιπὸν γίνεσθαι τετράγωνον. Δ^Υ ἄρα ᾱ λείψει μ° ῑ ἴση ἐστὶ τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς° ᾱ λείψει μ° β̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται Δ^Υ ᾱ μ° δ̄ λείψει ςς δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° γ καὶ ἥμισυ. ἐπεὶ ἔταξα τὸν τρίτον Δ^Υ ᾱ. ἔσται ιβ̄. α^δ. ἔστι δὲ καὶ ὁ πρῶτος λ. α^δ. οἵτινες λείψει μ° ῑ. ποιοῦσι τετραγώνους. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς ζητούμενον, καὶ τάσσω τὸν πρῶτον ςς λ. α^δ. τὸν δὲ δεύτερον α^{ις}. τὸν δὲ τρίτον ςς ιβ̄. α^δ. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου [λείψει μ° ῑ] γίνεσθαι [τετράγωνον, ὁ δὲ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ] Δ^Υ το. α^ς. α^{ις}. ἔστω ἄρα λείψει μ° ῑ ἴσος ἐστὶ τετραγώνῳ, καὶ ἵνα ὅλαι δυνάμεις ὦσι ποιῶ αὐτὰς ἑκκαιδεκάκις, Δ^Υ ἄρα ͵εϡκθ λείψει μ° ρξ. ἴσαι τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς ςς οζ λείψει μ° β̄. τουτέστι δυνάμεις ͵εϡκθ μ° δ̄ λείψει ςς τη. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° μα^{οζ}. ἔταξα τὸν πρῶτον ςς λ. α^δ. ἔσται ͵ασμ^{οζ}. α^δ. τὸν δὲ δεύτερον α^{ις} ἔσται οζ^{μα}. τὸν δὲ τρίτον ςς ιβ̄. α^δ. ἔσται φβ^{οζ}. α^δ. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

nimirum 5 $\frac{1}{2}$. duco in se, & à producto 30 $\frac{1}{4}$ aufero 10. & habeo quadratum 20. $\frac{1}{4}$ à latere 4 $\frac{1}{2}$. Pono igitur primum 30 $\frac{1}{4}$. tertium autem 1 Q. Oportet ergo vt & ab 1 Q. dempto 10. remaneat quadratus. Quare 1 Q. − 10. æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 1 N. − 2. nimirum 1 Q. + 4. − 4 N. & fit 1 N. 3 $\frac{1}{2}$. Tertius igitur qui positus erat 1 Q. erit 12 $\frac{1}{4}$. est autem & primus 30 $\frac{1}{4}$. nam vterque dempto 10. remanet quadratus. Venio ad id quod initio quærebatur. Et statuo primum 30. $\frac{1}{4}$ N. secundum $\frac{1}{16}$. tertium 12 $\frac{1}{4}$ N. Superest itaque vt productus ex primo in tertium dempto 10. faciat quadratum. Atqui productus ille est 370 $\frac{9}{16}$ Q. Hic ergo dempto 10. æquatur quadrato, & vt quadrati integri sint, multiplicemus eos per 16. ergo 5929. Q. − 160. æquantur quadrato à latere 77 N. − 2. qui est 5929 Q. + 4 − 308 N. & fit 1 N. $\frac{41}{77}$. Statueram primum 30 $\frac{1}{4}$ N. erit igitur $\frac{1240}{77}$ $\frac{1}{4}$. secundum $\frac{1}{16}$. erit igitur $\frac{77}{41}$. tertium 12. $\frac{1}{4}$ N. is erit $\frac{502}{77}$ $\frac{1}{4}$. & constat propositum.

IN QVAESTIONEM XIII.

EADEM ferè dici possunt de hac quæstione quæ de præcedente dicta sunt. Operatio & solutio totidem modis potest variari. Nam infiniti quadrati reperientur per vndecimam secundi, qui multati numero 10. quadratum relinquant. Et vltimi quadrati 5929 Q. − 160. latus diuersimodè fingi potest, nimirum à 77 N. − quotlibet vnitatibus. Cæterùm Diophantus compendium quærens ad vndecimam secundi, hoc vtitur lemmate.

Si dato numero addatur vnitas, & à summæ semissis quadrato aufeatur datus numerus, relinquitur quadratus.

A . . . . . D . . . . B . C

Sit datus numerus A B. cui addatur vnitas B C. & totius A C semissis esto A D. dico quadratum ipsius A D multatum numero A B. relinquere quadratum. [1] Etenim quadratus A D æqualis est producto ex A B in B C vnà cum quadrato ipsius D B. Sed productus ex A B in B C æquatur ipsi A B, quia B C est vnitas. Igitur A B & quadratus ex D B simul æquantur quadrato ex A D. Quare si à quadrato ex A D auferatur A B. relinquetur quadratus ex D B. Quod erat ostendendum. *5. secundi.*

Licet etiam per nostram analysim soluere quæstionem hac arte. Datus esto 20. Quæratur quadratus à quo auferendo 20. supersit quadratus, puta 36. & statuantur pro primo & secundo quæsitorum numerorum, duo quilibet quorum mutuo ductu fiat 36. sit ergo primus 9. secundus 4. Tum ponatur tertius quilibet quadratorum numerus, qui ductus in secundum 4. quadratum faciat, puta 1 Q. eique adiiciantur tot vnitates vt ductæ in eundem secundum 4. faciant datum numerum 20. Et esto totus tertius 1 Q. + 5. sic enim duabus propositi partibus satisfit. Restat vt productus ex primo in tertium detracto 20. faciat quadratum, facit autem 9 Q. + 25. hoc ergo æquatur quadrato, esto latus illius 3 N. + 1. fiet 1 N. 4. sunt ergo quæsiti numeri 9. 4. 21. & constat. Sed & geminum Canonem eliciemus ex libro secundo porismatum. Quorum primus est.

Datum numerum adde duobus quadratis, vtramque summam diuide sigillatim per interuallum laterum, duo quotientes vnà cum eodem interuallo, quæsitos exhibent numeros.

Vt si datus sit 10. adde 10. quadratis 16. & 36. fiunt summæ 26. & 46. quas si diuidas per 2. interuallum laterum, fiunt 13. & 23. duo ex quæsitis numeris, quorum tertius est ipsum interuallum laterum 2. Canonis huius demonstratio in promptu est. Nam constat per cōstructionem ducto 2. in ipsos 13. & 23. fieri 26. & 46. à quibus auferendo datum numerum 10. remanent quadrati 16. & 36. At productum ex 13. in 23. detracto 10. esse quadratum, ostensum est duodecima secundi porismatum. Secundus Canon erit.

Datum numerum adde duobus quadratis, vtramque summam diuide per interuallum laterum: duo quotientes vnà cum duplo summæ illorum multato eodem interuallo quæsitos exhibent numeros.

Itaque sumptis eisdem quadratis, duo primi numeri coincident cum duobus primis per præcedentem Canonem inuentis. Tertius autem diuersus erit. Nam sumptis vt prius quadratis 16. & 36. fient duo primi vt suprà 13. & 23. At tertius erit 70. Huius autem Canonis demonstratio habetur decima quarta secundi porismatum. Porrò vtriusque Canonis ope soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire quatuor numeros, vt productus ex binorum mutua multiplicatione detracto quouis dato numero, quadratus maneat.

Datus esto 10.

Finge duos quadratos, alterum ab 1 N. + aliquo quadrato numero, puta ab 1 N. + 4. erunt quadrati 1 Q. & 1 Q. + 8 N. + 16. His adde sigillatim datum numerum 10. & summas diuide per interuallum laterum 4. Erit ergo primus quæsitorum $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{5}{2}$. Secundus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{13}{2}$ + 2 N. Tertius horum summæ duplum multatum eodem interuallo 4. nimirum 1 Q. + 14 + 4 N. Quartus denique erit idem interuallum, videlicet 4. Sic enim ex vtroque Canone constat quinque propositi partibus abundè satisfieri. Restat vt productus ex tertio in quartum detracto 10. relinquatur quadratus. Relinquitur autem 4 Q. + 46 + 16 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Esto eius latus 2 N. + 6. fiet 1 N. $\frac{5}{4}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri $\frac{185}{64}$. $\frac{601}{64}$. $\frac{329}{16}$. 4. qui satisfaciunt postulatis. Nam ex primo in reliquos tres qui producuntur, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{70225}{4096}$. $\frac{50625}{1024}$. $\frac{25}{16}$ quorum latera $\frac{265}{64}$. $\frac{225}{32}$. $\frac{5}{4}$. At producti ex secundo in tertium & quartum, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{187489}{1024}$ &

[illegible] quorum latera [illegible] & $\frac{21}{4}$. Denique productus ex tertio in quartum, detracto 10. quadratum facit $\frac{289}{4}$ cuius latus $\frac{17}{2}$.

Aliter. Ex quadratis qui exponuntur initio ponatur alter, quilibet quadratus, puta 1. Alter verò fingatur ab 1 N. + latere prioris, nimirum ab 1 N. + 1. erit is 1 Q. + 2 N. + 1. Tum vtrique quadrato addatur datus numerus 10. & summæ diuidantur sigillatim per interuallum laterum 1 N. Et statuatur primus quæsitorum $\frac{11}{1N}$. Secundus 1 N. + 2 + $\frac{11}{1N}$. Tertius horum summæ duplum mulratum interuallo laterum. videlicet 1 N. + 4 + $\frac{44}{1N}$. Quartus denique ipsum interuallum laterum, puta 1 N. Itaque patet ex vtroque Canone quinque postulati partibus esse satisfactum. Restat ergo vt productus ex tertio in quartum detracto 10. maneat quadratus. Manet autem 1 Q. + 4 N. + 34. Hoc ergo æquatur quadrato. Sit eius latus 1 N. − 8. fit 1 N. $\frac{3}{2}$. Ad positiones. Sunt quæsiti numeri. $\frac{22}{3}$. $\frac{65}{6}$. $\frac{209}{6}$. $\frac{3}{2}$. qui soluunt quæstionem. Etenim ex in primo in tres reliquos qui producuntur, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{625}{9}$. $\frac{2209}{9}$. 1. quorum latera $\frac{25}{3}$. $\frac{47}{3}$. 1. At producti ex secundo in tertium & quartum, detracto 10. manent quadrati $\frac{13225}{36}$ & $\frac{25}{4}$. quorum latera $\frac{115}{6}$. & $\frac{5}{2}$. Denique ex tertio in quartum qui producitur, detracto 10. relinquit quadratum $\frac{169}{4}$ cuius latus $\frac{13}{2}$.

Quomodo autem reperiendi sint tres numeri, vt productus ex binorum multiplicatione detractus à dato numero, relinquat quadratum, nondum in vniuersum assequi licuit, sed soluo quæstionem huiusmodi, cùm datus datus numerus vel quadratus est, vel ex duobus quadratis compositus. Sit enim datus 20. sumatur vnus quadratorum, ex quibus 20. componitur, puta 16. & statuantur primus & secundus quæsitorum, duo quilibet numeri quorum mutuo ductu fiat 16. puta 8. & 2. tertius verò ponatur talis vnitatum numerus, qui ductus in secundum 2. faciat datum numerum 20. est is numerus 10. cui addatur defectus tot Quadratorum, vt secundo 2. in eos ducto fiat quadratus. Statuatur ergo tertius 10 − 2 Q. sic enim duabus propositi partibus satisfit. Restat vt productus ex primo in tertium detractus à 20. relinquat quadratum. Sed relinquit 16 Q. − 60. Hoc ergo æquatur quadrato cuius latus fingetur à 4 N. − tot vnitatibus, vt per valorem Numeri resoluendo hypostases fiat 1 Q. minor quàm 5. quia scilicet tertius positus est 10 − 2 Q. Itaque cùm quadratus debeat esse minor quàm 5. oportet valorem numeri minorem esse quàm 2 $\frac{1}{4}$. fiet autem valor Numeri à quodam quadrato adsumente 60. & diuiso per octuplum sui lateris. Quærendus ergo est quadratus qui adsumens 60. & diuisus per octuplum sui lateris, det quotientem minorem quàm 2 $\frac{1}{4}$. sit is 1 Q. Igitur $\frac{1Q. + 60}{8N}$. minor est quàm 2 $\frac{1}{4}$ & omnia ducendo in 8 N. fit 1 Q. + 60 minor quàm 18 N. Quare æquemus 18 N. numero paulò maiori quàm 1 Q. + 60. puta numero 1 Q. + 65. fiet 1 N. 5. vel 13. Proinde oportet latus quadrati fingere 4 N. − tot vnitatibus, quæ non deficiant à 5. nec excedant 13. fingatur 4 N. − 5. fiet 1 N. $\frac{17}{8}$. sunt igitur tres quæsiti 8. 2. $\frac{31}{32}$. & constat.

QVÆSTIO XIV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου προσλαβόντα τὸν λοιπὸν ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἐκθέμενοί τινα τετράγωνον, μέρος μέν τι αὐτοῦ τάξωμεν τὸν τρίτον, τὸν δὲ λοιπὸν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, λύσομεν ἐν τῷ ἐπιτάγματι. πεπλάσθω ὁ τετρά-

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione adiecto reliquo quadratum faciat. Quando quærimus productum ex primo in secundum addito tertio facere quadratum, si exposito aliquo quadrato, partem illius aliquam statuamus pro tertio, residuum autem pro producto multiplicationis primi & secundi vnum postulatorum præstabimus. Formetur quadratus ab

1 N. + 3. erit vtique 1 Q. + 6 N. + 9. esto itaque tertius 9. relinquitur ergo productus ex primo in secundum 1 Q. + 6 N. Ponatur primus 1 N. erit igitur secundus 1 N. + 6. Oportet ergo & productum ex secundo in tertium adsumpto primo, hoc est 10 N. + 54. æquari quadrato, & præterea productum ex tertio in primum adsumpto secundo, nempe 10 N. + 6. æquari quadrato, & fit duplicata æqualitas. Est autem ipsorum interuallum 48. Quamobrem oportet inuenire duos quadratos quotum interuallum sit 48. Quod facile est, & infinitis modis fieri potest; estque minor 16. maior 64. vtri horum æquationem accommodemus, reperiemus quantus sit 1 N. si enim dicamus 64. æquari maiori, puta 10 N. + 54. inuenitur 1 N. 1. Rursus si dicamus minorem 16. æquari 10 N. + 6. fit etiam 1 N. 1. Ad positiones. Erit primus 1. secundus 7. tertius 9. & soluunt quæstionem.

γωνος ἀπὸ ϛ α μ γ. αὐτὸς ἄρα ἔσται δ α ϛϛ ϛ μ θ [ἔστω δὲ ὁ τρίτος μ θ] λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου δ α ϛϛ ϛ. τετάχθω ὁ πρῶτος ϛ α. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται [ϛ α μ ϛ. δεήσει ἄρα τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβόντα τὸν πρῶτον τουτέστι] ϛϛ ι μ νδ ἴσον εἶναι τετραγώνῳ, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα τὸν δεύτερον τουτέστι ϛϛ ι μ ϛ ἴσον πάλιν γίνεσθαι τετραγώνῳ, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης. καί ἐστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ μ μη. δεήσει ἄρα εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ μ μη. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἀπειραχῶς γίνεται. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐλάσσων μ ις. ὁ δὲ μείζων μ ξδ. καὶ πρὸς ὁποῖον ἂν αὐτῶν ποιήσωμαι τὴν ἰσότητα, εὑρήσω τὴν ὑπόστασιν τοῦ ϛ ἐάν τε γὰρ φήσωμεν τὰς τοῦ μείζονος μ ξδ ἴσας εἶναι ϛϛ ι μ νδ. συνάγεται ὁ ϛ μ α. ἐάν τε πάλιν φήσωμεν τὰς τοῦ ἐλάσσονος μ ις ἴσας εἶναι ϛϛ ι μ ϛ συνάγεται ὁ ϛ μ α. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ α. ὁ δὲ δεύτερος μ ζ. ἔστι δὲ καὶ ὁ τρίτος μ θ. καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM XIIII.

BENE monet Xilander hic duplicem contingere posse variationem. Primò enim Quadratus qui ponitur fieri ex producto primi in secundum, adscito tertio fingi potest à certis numeris + quotlibet vnitatibus, finxit Diophantus ab 1 N. + 3. sed fingere potuisset ab 1 N. + 2. vel 1 N. + 4. vel etiam 2 N. + 3. 2 N. + 4. &c. Deinde duplicata æqualitas infinitis modò resolui poterat, sumendo scilicet duos quoslibet quadratos, quorum interuallum sit 48. adhibita tamen cautione quam tradidimus ad duodecimam secundi, vt videlicet maiores sint sumpti quadrati numeris 54. & 6. Verùm quod præcipuum est, non attigit Xilander, quomodo nimirum positiones primi & secundi ita instituat Diophantus, vt tandem in vtroque numero quadrato æquando reperiatur idem Numerorum numerus, puta 10 N. Hoc enim si non curasset, inexplicabilis fuisset æquatio. Cùm enim vnitates 54. & 6. nec æquales sint, nec quadrati numeri, oportuit numerum Numerorum vtrobique eun-

dem reperiri. Itaque cùm productus ex primo in secundum positus sit 1 Q. + 6 N. ex infinitis numeris quorum mutuo ductu gigni poterat 1 Q. + 6 N. tales deligendi fuerunt, vt in eorum vtroque idem esset numerorum Numerus, quales sumpsit Diophantus 1 N. & 1 N. + 6. nec alij proposito satisfacientes sumi potuissent, quia, vt dictum est, oportet ducendo eundem tertium 9. in vtrumlibet ipsorum, & producto addendo reliquum, fieri vtrobique eundem Numerorum numerum, quod fieri non posset, si Numerorum numeri primi & secundi non essent æquales.

QVÆSTIO XV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ πρῶτος ςˢ α. ὁ δὲ δεύτερος ςˢ α μ° δ. ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν ἔσται δ^υ α. ςς̄ δ. δεήσει ἄρα τοῦτον λείψαντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν οὖν τὸν τρίτον τάξω ςς̄ δ. [λύσωμεν ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπὸν δὴ καὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ ἔτι] τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου λείψας τὸν πρῶτον ἐστὶ δ^υ δ ςς̄ ιε ἴσος τετραγώνῳ. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου λείψας τὸν δεύτερον ἐστὶ δ^υ δ λείψει ςˢ ἑνὸς μ° δ ἴσος τετραγώνῳ. καὶ γίνεται πάλιν διπλῆ ἡ ἴσωσις. τῆς γὰρ ὑπεροχῆς αὐτῶν τυγχανούσης ςς̄ ις μ° δ. ζητῶ δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ποιῇ ςς̄ ις μ° δ. εἰσὶ δὲ μ° δ. καὶ ςς̄ δ μ° α. πάλιν οὖν ἢ τῆς συνθέσεως τούτων τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ μείζονι. ἢ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ ἐλάσσονι. καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς κε^κ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κε^κ. ὁ δὲ δεύτερος ρε^κ. ὁ δὲ τρίτος ρ^κ. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione dempto reliquo faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus 1 N. + 4. Productus ipsorum multiplicatione erit 1 Q. + 4 N. Oportet igitur hunc dempto tertio facere quadratum, si ergo ponamus tertium 4 N. satisfactum erit vni postulatorum. Superest itaque vt & productus ex secundo in tertium dempto primo faciat quadratum, & prætetea productus ex tertio in primum dempto secundo faciat quadratum. Sed productus ex secundo in tertium dempto primo est 4 Q. + 15 N. æqualis quadrato. At productus ex tertio in primum dempto secundo est 4 Q − 1 N. − 4. æqualis quadrato. Et occurrit rursus duplicata æqualitas. Cùm itaque interuallum ipsorum sit 16 N. + 4. Quæro duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 16 N. + 4. sunt autem 4. & 4 N. + 1. Rursus ergo vel summæ semissis quadratus æquatur maiori, vel interualli semissis quadratus æquatur minori; & fit 1 N. $\frac{25}{20}$. Erit igitur primus $\frac{25}{20}$. secundus $\frac{105}{20}$. tertius $\frac{100}{20}$. & constat propositum.

IN

IN QVAESTIONEM XV.

NON temerè, vt malè arbitratur Xilander, secundum numerum posuit Diophantus 1 N. + 4. Nam necesse est vnitates secundi numeri, quadratum esse numerum, puta 4. vel 9. vel 16. &c. Cuius rei ratio ex ipsamet operatione subtilius considerata, statim innotescit. Tertius enim numerus semper æqualem Numerorum multitudinem continet, vnitatibus in secundo positis; & posito secundo 1 N. + 4. vel 1 N. + 9. &c. erit tertius 4 N. vel 9 N. &c. Quamobrem rursus ex ductu tertij tam in primum quàm in secundum, in quorum vtroque est 1 N. fient totidem quadrati, vt vides in hypothesi Diophanti, fieri 4 Q. & si secundus positus esset 1 N. + 9. fierent 9 Q. Si autem in numeris quadrato æquandis 4 Q. + 15 N. & 4 Q. – 1 N. – 4. numerus quadratorum 4. non esset quadratus, explicari non posset duplicata æqualitas. Nam si, vt fecit Xilander, ponatur secundus 1 N. + 10. atque adeo tertius 1 N. fient tandem quadrato æquandi 10 Q. + 99 N. & 10 Q. – 1 N. – 10. Quæcunque autem fingas quadratorum latera nunquam produces 10 Q. (cùm nullus sit numerus qui in se ductus efficiat 10. vnde necesse erit in æquationem complexam deueniri, & duas species, vni æquales remanere, ac proinde solutionem vt plurimum contingere irrationalem.

Præterea etiam ritè facta positione secundi numeri, statuendo scilicet in eo vnitatum uumerum quadratum, aduerte, posse te adhuc in easdem cautes impingere, nisi magna cum cautione seligas duos numeros, quorum mutuo ductu fiat interuallum numerorum quadrato æquandorum. Etenim in Diophantæa hypothesi, vbi interuallum est 16 N. + 4. licet id ex infinitorum numerorum mutuo ductu produci possit, nulli tamen idonei sunt quæstioni soluendæ prærer 4 N. + 1. & 4. si enim Verbi gratia, sumas 2 N. + $\frac{1}{2}$ & 8. horum summæ semissis quadratus, puta 1 Q. + 8 $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{289}{16}$ æquabitur 4 Q. + 15 N. vnde fiet solurio irrationalis. Itaque tales seligendi sunt numeri mutuo ductu producentes propositum interuallum, vt in eorum summa contineatur duplum lateris Quadrarorum, qui in numeris quadrato æquandis reperiuntur. Vt in eadem hypothesi, vbi quadratorum numerus est 4 Q. cuius latus 2 N. cuius duplum 4 N. Oportet tales deligi numeros, quorum mutuo ductu fiat 16 N. + 4. vt eorum summa coutineantur 4 N. Quia verò patet primùm illorum necessario constare debere ex Numeris & vnitatibus, secundum autem ex solis vnitatibus, sequitur in primo necesse esse constitui 4 N. atque adeo vt ex secundo in primum fiant 16 N. oportet secundum esse 4. Vt autem præter 16 N. fiant etiam 4. (cùm totum interuallum sit 16 N. + 4.) necesse est primum esse 4 N. + 1. secundum 4. Quoniam autem eodem artificio sæpè in sequentibus vtendu[illegible]erit, vt res tyronum memoriæ firmius inhæreat, age alio eam exemplo illustremus. Posito primo numerorum quæsitorum 1 N. sit secundus 1 N. + 9. tertius 9 N. ducto ergo tertio in primum, & inde ablato secundo remanet 9. Q – 1 N. – 9. æquandus quadrato. Rursus ducto tertio in secundum, & inde ablato primo remanet 9 Q. + 80 N. æquandus quoque quadrato. Horum interuallum est 81 N. + 9. Quare sunt inueniendi duo numeri, quorum mutuo ductu id fiat cum cautione suprà explicata. Itaque cùm quadratorum numerus sit 9 Q. cuius latus 3 N. cuius duplum 6 N. Oportet in primo quæsitorum statui 6. N. Quamobrem vt ex secundo in primum fiam 81 N. necesse est secundum est 13 $\frac{1}{2}$. Rursus autem vt fiat alia pars interualli, puta 9. euidens est primum debere esse 6 N. + $\frac{2}{3}$. secundum 13 $\frac{1}{2}$. Reliquam operationem absolue, si vacat.

Cæterùm moneo totam solutionum diuersitatem, oriri ex illo quadrato qui ponitur in secundo numero. Nam eodem ibidem posito quadrato, licet primus ponatur 2 N. vel 3 N. vel 4 N. &c. eadem tamen semper continger solurio. Quod vno aut altero exemplo fiet manifestum. Ponatur primus 2 N. secundus 2 N. + 4. rertius 8 N. Productus ex secundo in tertium abiecto primo fit 16 Q. + 30 N. æquandus quadrato. Et rursus productus ex primo in terrium abiecto secundo fit 16 Q. – 2 N. – 4. æquandus etiam quadrato. Horum interuallum est 32 N. + 4. qui fit ex 8 N. + 1 in 4. hi enim soli apti sunt proposito ob causas suprà traditas. Horum summæ semissis

quadratus est 16 Q. + 20 N. + $\frac{25}{4}$ æqualis 16 Q. + 30 N. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{1}{4}$. $\frac{21}{4}$. 5. iidem quos inuenerat Diophantus. Rursus pone primum 3 N. secundum 3 N. + 4. Tertium 12 N. fient tandem æquandi quadrato 36 Q. + 45 N. & 36 Q. − 3 N. − 4. quorum interuallum 48. N. + 4. quod fit ex 12 N. + 1 in 4. horum summæ semissis quadratus est 36 Q. + 30 N. + $\frac{25}{4}$ qui æquatur 36 Q. + 45 N. & fit 1 N. $\frac{1}{12}$ suntque quæsiti numeri, vt prius $\frac{1}{4}$. $\frac{21}{4}$. 5.

Denique animaduersione dignum est, qualiscunqne numerus Numerorum statuatur pro primo. Dum idem statuatur pro secundo + aliquot vnitatibus quadratis, & tertius ponatur productus ex primo in vnitates secundi, semper contingere in numeris quadrato æquandis, numerum quadratorum esse quadratum, vt in Diophanti exemplo 4 Q. in proximè allatis 16 Q. & 36 Q. quod ex necessitate fieri, sic demonstrabitur. Esto A numerus Numerorum primi. Et A + B vnitatibus quadratis esto secundus. Et tertius esto D. productus ex A in B. Itaque vt patet ex operationis processu, ex D in A fiet quadratorum numerus qui reperitur in numeris quadrato æquandis, sit is E. Hunc dico esse quadratum. Nam sumptis tribus numeris A. B. A. [1] idem E fiet siue A ducatur in B. & productus D in A. siue A ducatur in A. & quadratus ipsius A in B. Quare cùm & B sit quadratus, patet E productum ex quadrato in quadratum, & ipsum esse quadratum. Quod erat demonstrandum. Sed de his satis.

A 3 N.
A 3 N. + B 4.
D 12 N. E 36 Q.

[1] 5.1 porism.

QVÆSTIO XVI.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν ἀπὸ λοιποῦ τετράγωνον, ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ϛ^ος^ α̅. ὁ δὲ δεύτερος ϛϛ δ̅ μ° δ̅. ὁ δὲ τρίτος μονάδος α̅. ἵνα ἡ λελυμένα δύο τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ποιεῖ δ^υ^ ιϛ̅ ϛϛ λγ̅ μ° ιϛ̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛϛ δ̅ ⋔ μ° ε̅. τουτέστι δ^υ^ ιϛ̅ μ° κε̅ λεῖψει ϛϛ μ̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ° θ̅ ογ̅. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος θ̅. ὁ δὲ δεύτερος τκη̅. ὁ δὲ τρίτος ογ̅. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione adsumpto reliqui quadrato, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus 4 N. + 4. tertius autem 1. vt duabus propositi partibus satisfiat. Superest vt productus ex tertio in primum adsumens quadratum secundi faciat quadratum. Sed productus ex tertio in primum adsumens secundi quadratum facit 16 Q. + 33 N. + 16. Hæc igitur æquanda quadrato, nempe à latere 4 N. − 5. qui est 16 Q. + 25 − 40. N. & fit 1 N. $\frac{9}{73}$. Erit igitur primus 9. secundus 328. tertius 73. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XVI.

FALLITVR hîc etiam Xilander existimans positiones pro arbitrio variari posse, nulla adhibita cautione, hoc enim manifestæ falsitatis arguitur ipso exemplo quo suam nititur comprobare sententiam, ait enim licuisse ponere primum 1 N. secundum 1 N. + 2. tertium 1. Quod nequaquam verum est, nam productus quidem ex primo in secundum adscito quadrato tertij, facit quadratum 1 Q. + 2 N. + 1. At productus ex secundo in tertium adscito quadrato primi facit 1 Q. + 1 N. + 2.

qui quadratus non est, cùm tamen per ipsas positiones duabus propositi partibus satisfieri velit Diophantus. Itaque tali artificio ipsas positiones instituemus. Statuatur pro secundo quilibet numerus Numerorum + quotlibet vnitatibus. Et ponatur primus quadrans Numerorum, tertius quadrans vnitatum secundi. Sic Diophantus posito secundo 4 N. + 4. posuit primum 1 N. secundum 1. Quod si ponas secundum 4 N. + 8. erit primus 1 N. tertius 2. Et si ponas secundum 8 N. + 12. Erit primus 2 N. Tertius 3. & sic de alus. Hoc autem ne quis absque fundamento dictum putet, sic demonstratur.

E 4 N. F 6.
C 2 N. A 8 N. + B 12. D 3.
G 16 Q. + H 24 N. + K 9.
L 4 Q. + M 24 N. + P 36.

Sit secundus certus Numerorum numerus A + vnitatibus B. & sit C primus, quadrans ipsius A. sitque D tertius quadrans ipsius B. & quia C A sunt plani similes, sit medius eorum proportionalis E duplus scilicet ad C, subduplus ad A. Similitérque sit F medius proportionalis inter B D, duplus scilicet ad D, subduplus ad B. Tum ducatur C in A + B. & fiat G + H certus scilicet quadratorum numerus + certo numero Numerorum, hisque adiiciatur K quadratus ipsius D. Dico totum G H K esse quadratum.[1] Quod vt probetur, oportet ostendere ipsos G K esse quadratos, & ex eo- *4. secundi.*
rum lateribus bis inuicem ductis produci H. Et quidem ipse K quadratus est ipsius D. ex constructione.[2] At G. cùm fiat ex mutuo ductu planorum similium C A. qua- *1. noni.*
dratus est medij proportionalis E. Restat ergo probandum ipsum H produci ex E in D bis. Itaque quoniam est A ad C, vt B ad D.[3] qui sub extremis A D continetur, *16. septimi.*
æqualis ei qui sub mediis C B. At ex C in B fit H per constructionem. Igitur ex A in D fit idem H. Quare cùm A sit duplus ipsius E. fiet idem H ex E in D bis. Quod erat probandum. Similiter si D ducatur in A + B. vnde fiat M + P. certus scilicet numerus Numerorum + certis vnitatibus, hisque adiiciatur L quadratus ipsius C. dico totum L M P quadratum esse. Quod iisdem probatur argumentis. Nam L ex constructione quadratus est ipsius C. At P. qui fit ex mutuo ductu planorum similium B D. quadratus est medij proportionalis F. Denique vt ostensum est M, qui producitur ex A in D, producetur etiam ex C in B. hoc est ex C in F bis. Igitur ex omni parte constat propositum.

Ex dictis patet duplici de causa diuersas contingere posse solutiones. Primò prout diuersimodè instituentur positiones cum tradita cautione. Secundò prout producti ex primo in tertium adsumentis quadratum secundi latus diuersimodè fingetur, vt iam sæpe in simili, fieri posse docuimus.

Cæterùm huius quæstionis ope, licebit & sequentes absoluere.

QVAESTIO PRIMA.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, quorum bini mutuo ductu quem producunt, is adscito reliqui quadrato, quadratus fiat. Esto datus 10.

Sumantur tres numeri per superiorem quæstionem inuenti, & statuantur in Numeris. Erunt ergo quæsiti 9 N. 73 N. 328 N. & productus ex binorum multiplicatione adscito reliqui quadrato, quadratum facit. Restat vt eorum summa sit 10. Quamobrē 410 N. æquantur 10. & fit 1 N. $\frac{1}{41}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{9}{41}$ $\frac{73}{41}$ $\frac{328}{41}$ seu 8.

QVAESTIO SECVNDA.

INVENIRE tres numeros, vt producti ex binorum multiplicatione adscito reliqui quadrato quadrotos faciant, & quadratorum latera datum constituant numerum.

Datus esto 25. Statuantur rursus pro quæsitis, numeri per decimam sextam inuenti, nimirum 9 N. 73 N. 328 N. sic enim producti ex binorum multiplicatione adscito reliqui quadrato, quadratos faciunt 108241 Q. 24025 Q. 8281 Q. quorum latera 329 N. 155 N. 91 N. Restat vt horum laterum summa æquetur 25. Quare 575 N. æquantur 25. & fit 1 N. $\frac{1}{23}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{9}{23}$ $\frac{73}{23}$ $\frac{328}{23}$.

QVÆSTIO XVII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. πάντων δὲ δύο τετραγώνων κατὰ τὸ ἑξῆς ὁ ὑπὸ προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω τοίνυν ὁ μὲν πρῶτος μ° δ̅. ὁ δὲ δεύτερος μ° θ̅. ἵνα ὁ ὑπ' αὐτῶν γινόμενος τετράγωνος μ° λϛ̅. προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβόντα συναμφότερον, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. τετάχθω ὁ τρίτος ϛ α̅. καὶ γίνεται ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβὼν συναμφοτέρους ϛϛ ι̅ μ° θ̅ ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἔτι ὁ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβὼν συναμφοτέρους ϛϛ ε̅ μ° δ̅ ἴσος τετραγώνῳ. καὶ γίνεται πάλιν καὶ ἐνταῦθα διπλῆ ἡ ἴσωσις. καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ ϛϛ ε̅ μ° ε̅. ζητῶ οὖν πάλιν δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ἐστι ϛϛ ε̅ μ° ε̅. καὶ εἰσὶν ὃς μὲν ϛ α̅ μ° α̅. ὃς δὲ μ° ε̅. καὶ ὁμοίως τοῖς ἐν τῷ δευτέρῳ, ἢ τῆς συνθέσεως αὐτῶν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι, ἢ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ ἐλάσσονι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° κη̅. καὶ ἔστιν ὁ μὲν πρῶτος μ° δ̅. ὁ δὲ δεύτερος μ° θ̅. ὁ δὲ τρίτος μονάδες κη̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros vt productus ex binorum multiplicatione adsumpta, eorumdem summa quadratum faciat. Enimuero productus multiplicatione duorum quorumlibet quadratorum proximorum, adscita ipsorum summa quadratum facit. Ponatur itaque primus 4. secundus 9. vt productus eorum multiplicatione quadratus, nempe 36. adscita vtriusque summa faciat quadratum. Restat vt & productus ex secundo in tertium, adscito vtroque; itemque productus ex tertio in primum vtroque adsumpto faciat quadratum. Statuatur tertius 1 N. fitque productus ex secundo in tertium, vtroque adsumpto 10 N. + 9. æquandus quadrato. At productus ex tertio in primum adsumens vtrumque fit 5 N. + 4. æqualis quadrato. Hîc quoque rursus duplicata æquatio occurrit; estque interuallum 5 N. + 5. Quæro igitur duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 5 N. + 5. & sunt, hic quidem 1 N. + 1. ille verò 5. Atque vt in secundo libro docuimus, vel summæ horum semissis quadratus æquatur maiori: vel interualli semissis quadratus æquatur minori. Et fit 1 N. 28. Erit igitur primus 4. secundus 9. tertius 28. & satisfaciunt postu- ris.

IN QVAESTIONEM XVII.

DEMONSTRANDVM est Porisma quod assumit Diophantus, nimirum.

Productus ex multiplicatione duorũ quadratorum, quorũ latera vnitate distant, adscita ipsorum quadratorum summa, quadratum facit.

Sunto quadrati A. B. quorum latera C. D. vnitate distent. Et productus ex A in B. esto G. cui addendo summam ipsorum A B. fiat H. Dico H esse quadratum. [1] Quia enim inter quadratos A B. cadit medius proportionalis productus ex C in D. [2] patet G esse quadratum producti ex C in D. At verò summa quadratorum A B [3] æquatur duplo producti ex C in D. & quadrato interualli ipsorum C D, hoc est vnitati. Igitur eadem summa quadratorum æquatur duplo lateris quadrati G vnitate aucto. Quamobrem cùm addendo quadrato G duplum sui lateris vnitate auctum fiat H, [4] patet H esse quadratum, cuius latus vnitate superat latus ipsius G. Quod erat demonstrandum.

C 2. D 3.
A 4. B 9.
G 36. H 49.

[1] 11. octaui.
[2] 20. septimi.
[3] 4. 2. porism.
[4] 18. 2. porism.

Quod autem attinet ad positiones primi & secundi numeri quos Diophantus vult esse quadratos continenter proximos, puta 4 & 9. allucinatur etiam Xilander cùm putat alios quoslibet numeros potuisse poni per trigesimam primam secundi inuentos. Nam si huiusmodi ponantur qui non sint quadrati, hi quidem vni parti proposita satisfacient, sed duplicata æqualitas ad quam per hanc operationem deuenitur, inexplicabilis erit. Etenim vt patet, numeri pro primo & secundo positi, sunt iidem cum vnitatibus quæ reperiuntur tandem in numeris quadrato æquandis, vt in hypothesi Diophanti, cùm primum & secundum posuisset 4. & 9. Inuenit quadrato æquandos 10 N ⊣ 9. & 5 N. ⊣ 4. Quare cùm hîc Numerorum numeri sint inæquales, nec habeant rationem quadrati ad quadratum, necesse est vnitates adiunctas quadratas esse, alioquin resolui non posset æquatio. Cùm enim horum interuallum sit 5 N. ⊣ 5. tales deligendi sunt numeri, quorum mutuo ductu id fiat vt in quadrato semissis summæ illorum reperiantur vnitates 9. & in quadrato semissis interualli reperiantur vnitates 4. Vt scilicet vnitatibus in æquatione se mutuò abolentibus vna species vni æqualis remaneat, puta quadrati Numeris. Hoc autem fieri nequit, nisi in semisse summæ sint vnitates 3. latus in ipsius 9. & nisi in semisse interualli sint vnitates 2. latus ipsius 4. Proinde nisi 9. & 4. quadrati sint, rem perfici non posse est manifestum. Hinc facile est videre cur ad conficiendum interuallum 5 N. ⊣ 5. sumpserit Diophantus numeros 1 N. ⊣ 1. & 5. Nam vt ex dictis constat tales sumendi sunt vt summa vnitatum in ipsis contentarum sit 6. interuallum verò earundem 4. Quare per Canonem primæ primi reperientur vnitates ponendæ in illis numeris esse 1. & 5. Atqui posito altero multiplicatorum 5. euidens est alium esse non posse nisi 1 N. ⊣ 1. vt eorum mutuò ductu fiant 5 N. ⊣ 5. Posset quidem alter poni 1. alter verò 5 N. ⊣ 5. Sed horum summæ & interualli semissis quadrati secundum omnes suas partes maiores sunt propositi ad æquandum quadrato numeris, vnde inuenitur valor Numeri minor nihilo. Quare restat solos 5. & 1 N. ⊣ 1. quæstioni soluendæ idoneos reperiri. Attamen ostendemus ad quadragesimam quintam quarti hanc æquationem etiam infinitis modis resolui posse per modum vtendi duplicata æqualitate à nobis inuentum, quem ibi explicabimus. Quod ad Hypostasim tertij numeri spectat, is non solùm poni potest 1 N. sed etiam quilibet Numerorum numerus. Sed si iidem ponantur primus & secundus eadem semper continget solutio, vt experiendo deprehendes. Quamobrem omnis solutionis varietas pendet ex primi & secundi positione, quæ infinitis modis fieri potest. Cùm sumi possint alij atque alij quadrati continenter proximi.

QVÆSTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione adsumens vtriusque summam faciat quadratum.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως [ὁ ὑπὸ δύο] ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον.

τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ς α. ὁ δὲ δεύτερος μ° γ. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ςς δ μ° γ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, ἔστω μονάσι κε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° ε καὶ ἡμίσεως. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° ε καὶ ἡμίσεως. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων γ. καὶ λέλυται ἓν τῶν ἐπιταγμάτων· ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖ τὸν κε τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. τετάχθω ὁ τρίτος ς α. καὶ γίνεται ὁ μὲν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβὼν συναμφοτέρους πάλιν ςς δ μ° γ. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου [προσλαβὼν συναμφοτέρους] ςς ς καὶ ἡμίσεως μονάδων ε καὶ ἡμίσεως, ἴσος ἑκάτερος τετραγώνῳ. καὶ διὰ τὸ πλεονάζειν ἐν τῷ ἑτέρῳ τὸ πλῆθος τῶν ςς καὶ τῶν μονάδων. καὶ μηδὲ λόγον αὐτοὺς ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. σχολάζει ἡ γεγενημένη ὑπόστασις. ἀπῆκται οὖν (εἰς τὸ) εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἔτι [οἱ μονάδι μείζονες αὐτῶν] πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων, καὶ μονάδων γ μείζων, οἱ μονάδι μείζονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ς α. τὸν δὲ δεύτερον ςς δ μ° γ. δεῖ λοιπὸν τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφο-

Ponatur primus 1 N. ſecundus verò 3. & eſt productus eorum multiplicatione addito vtroque 4 N. + 3. æquandus quadrato. Eſto quadrato 25. & fit 1 N. $5\frac{1}{2}$. ergo primus $5\frac{1}{2}$ erit, ſecundus 3. & vni poſtulatorum eſt ſatisfactum. Nam productus eorum multiplicatione adſumens vtrumque facit quadratum 25. Oportet igitur vt & productus ex ſecundo in tertiũ, itemq; productus ex tertio in primum adſcito vtroque faciat quadratum. Ponatur tertius 1 N. & fit productus ex ſecundo in tertium vtroque adſcito rurſus 4 N. + 3. At productus ex tertio in primum addito vtroque fit $6\frac{1}{2}$ N. + $5\frac{1}{2}$. Horum vterque quadrato æquatur. Sed quia alterius & numerorum & vnitatum multitudo, iis qui ſunt in altero eſt maior, neque eorum inter ſe ratio eſt quæ quadrati ad quadratum, inutilis eſt huiuſmodi poſitio. Eò itaque deuentum eſt vt quærantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione vtroque adſcito faciat quadratum, & præterea ipſorum vnitate auctorum ratio ſit quæ quadrati ad quadratum. Quandoquidem ſi numerus numeri quadruplum ternario excedat, ipſi vnitate aucti rationem habent adinuicem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Pono primum 1 N. ſecundum verò 4 N. + 3. Reſtat vt productus eorum multipli-

catione vtroque addito faciat quadratum. Sed productus eorum multiplicatione vtroque addito est 4 Q. + 8 N. + 3. hic ergo æquatur quadrato. Formo quadratum abs 2 N − 3. & fit quadratus 4 Q. + 9. − 12 N. & fit 1 N. $\frac{6}{20}$ seu $\frac{3}{10}$. erit igitur primus $\frac{3}{10}$. secundus $\frac{21}{5}$ seu 4 $\frac{1}{5}$. Ita postulatorum vni est satisfactū. Superest vt productus ex secundo in tertium, itemque productus ex tertio in primū addito vtroque faciat quadratū. Pono tertium 1 N. Est autem secūdus 4 $\frac{1}{5}$. fit productus eorum multiplicatione addito vtroque 5 $\frac{1}{5}$ N + 4 $\frac{1}{5}$ æquandus quadrato. Esto quadrato 25. Rursus quia tertius est 1 N. primus autem $\frac{3}{10}$. erit productus eorum multiplicatione adsumpto vtroque $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. æquandus quadrato, puta 100. Duco 5 $\frac{1}{5}$ N. + 4 $\frac{1}{5}$ in 25. fiūt 130 N. + 105. æquanda quadrato. Similiter duco $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ in 100 fiunt 130 N. + 30. æquanda rursus quadrato. Et est eorum interuallum 75. & duplicata rursus occurrit æquatio, & fit 1 N. $\frac{7}{10}$. erit igitur tertius $\frac{7}{10}$. erat autem primus $\frac{3}{10}$ secundus $\frac{21}{5}$. & soluunt quæstionem.

τέρων ἴσον εἶναι τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ἐστὶ δ^υ δ ςς η μ^ο γ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς β ⋔ μ^ο γ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δ^υ δ μ^ο θ ⋔ ςς ιβ. καὶ γίνεται ὁ ς^ος ϛ^κ. τουτέστι γ^ι. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ^ι ὁ δὲ δεύτερος μβ^ι. τουτέστι δ. α^ε. καὶ μένει ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου [καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου] μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖν τετράγωνον. τάσσω τὸν τρίτον ς^ο α. ἔστι δὲ καὶ ὁ δεύτερος μ^ο δ. α^ε. γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ςς ε. α^ε. μ^ο δ α^ε. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω μ^ο κε. πάλιν ἐπεὶ ὁ μὲν τρίτος ἐστὶ ς^ο α. ὁ δὲ πρῶτος γ^ι. ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ςς ιγ^ι μ^ο γ^ι. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ· [ἔστω μ^ο ρ] ποιῶ τοὺς ςς^ους ε. α^ε. μ^ο δ. α^ε. ἐπὶ τὸν κε. γίνονται ςς^οι ρλ μ^ο ρε ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ὁμοίως τὰ τῶν ς^ων ιγ^ι. μονάδας γ^ι. ἐπὶ τὸν ρ γίνονται ςς^οι ρλ μονάδες λ. ἴσοι πάλιν τετραγώνῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ μονάδες οε. καὶ ἔστι διπλῆ πάλιν ἰσότης, καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς ζ^ι. ἔσται ὁ μὲν τρίτος ζ^ι. ἦν δὲ καὶ ὁ μὲν πρῶτος γ^ι. ὁ δὲ δεύτερος μβ^ι. καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM XVIII.

SVBTILE est hoc problema, & elegans modus vtendi duplicata æqualitate in eo continetur, quem cùm non perceperit Xilander, mirum non est si parum feliciter eum explicauit. Quamuis corruptos solutionis numeros benè restituerit. Nos ergo triplicem Diophanti positionem percurrentes notatu digna quæque percenseamus, & obscura dilucidemus.

Prima positione quæruntur duo numeri, vt productus illorum multiplicatione adscita summa eorundem, quadratum faciat, & reperiuntur 5 $\frac{1}{3}$ & 3. Quamobrem

hos statuendo pro primo & secundo, ponitur tertius 1 N. quem ducendo sigillatim in priores duos, & productis addendo summam eorum ex quibus producuntur, fiunt quadrato simul æquandi 4 N. + 3. & 6 $\frac{1}{3}$ N. + 5 $\frac{1}{3}$. Hæc autem æquatio inexplicabilis est, quia cùm numeri quadrato æquandi componuntur ex Numeris & vnitatibus, oportet vel numeros Numerorum æquales esse, vt contigit propositione decima quarta huius, vbi æquantur quadratis 10 N. + 54. & 10 N. + 6. vel numero Numerorum in æquali existente, oportet vnitates esse quadratas, vt in præcedente quæstione, vbi æquantur quadratis 10 N. + 9. & 5 N. + 4. vel denique (quod hucusque non accidit) cùm vnitates quadratæ non sunt, nec numeri Numerorum æquales, oportet saltem numeros Numerorum inter se rationem habere quadrati ad quadratum, ob causam quam trademus infrà. Hoc igitur vt consequamur. Videndum est vnde prouenerint Numerorum numeri 4 N. & 6 $\frac{1}{3}$ N. At prouenérunt ex ipsis initio inuentis numeris 3. & 5 $\frac{1}{3}$ vnitate auctis, cùm ducendo sigillatim in ipsos 1 N. & productis addendo 1 N. fiant 4 N. & 6 $\frac{1}{3}$ N. Corrigenda ergo est prima positio, & loco ipsorum 3. & 5 $\frac{1}{3}$ alij duo numeri sunt inueniendi, quorum productus adscita eorundem summa quadratum faciat, ita vt ipsi numeri vnitate aucti rationem inter se habeant quadrati ad quadratum. Id fiet per secundam positionem.

Secunda itaque positione vt inueniantur huiusmodi numeri, & alterum postulatorum per ipsas positiones consequamur, tali vtendum lemmate.

Si fuerint duo numeri quorum maior minoris quadruplum ternario excedat, ipsi numeri vnitate aucti erunt plani similes.

Cuius lemmatis demonstratio facilis est. Sit enim maior A E minor C D. & à maiore auferēdo ternarium B E supersit A B quadruplus ad C D. Dico si vtrimque addatur vnitas E F. D G. totos A F. C G. esse planos similes. Cùm enim B F quaternarius sit qua-

A . . . . B . . . E . F
C . . D . G

11. septimi. druplus vnitatis D G. Est vt A B ad C D, ita B F ad D G. [1] Quare & totus A F ad totum C G est in eadem ratione quadrupla; quod erat propositum. Ponitur ergo primus 1 N. secundus 4 N. + 3. vnde restat vt productus eorum multiplicatione adscita eorum summa quadratum faciat, & peracta æquatione fit 1 N. $\frac{3}{10}$. suntque quæsiti numeri $\frac{3}{10}$ & 4 $\frac{1}{5}$. quibus vtentes tertiam instituemus positionem.

Tertia igitur positione quæsitorum ab initio numerorum ponitur primus $\frac{3}{10}$. Secundus 4 $\frac{1}{5}$. Tertius 1 N. vnde tandem proueniunt quadrato æquandi 5 $\frac{1}{5}$ N. + 4 $\frac{1}{5}$ & $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. Vbi quia Numerorum numeri sunt plani similes, sic explicabitur æquatio, sumantur duo quadrati in eadem ratione illorum numerorum, puta 100. & 25. ductoque minore in maiorem, & maiore in minorem fient iam quadrato æquandi

19. septimi. 130 N. + 105. & 130 N. + 30. vbi numeri Numerorum sunt æquales, [2] quia datis quatuor numeris proportionalibus, ex primo in quartum idem procreatur numerus, qui fit ex secūdo in tertium. Nec per huiusmodi multiplicationem immutatur æqualitatis ratio, quia quadrato per quemlibet quadratum siue multiplicato, siue diuiso, semper fit quadratus, vnde patet si 130 N. + 105. æquetur quadrato, & illius $\frac{1}{25}$ puta 5 $\frac{1}{5}$ N. + 4 $\frac{1}{5}$ fore quadratum. Et si 130 N. + 30. ponatur æquari quadrato, & eius centesimam partem, puta $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ fore quadrato æqualem. Sumpsit autem Diophantus quadratos 25. & 100. potiùs quàm alios quoscunque in eadem ratione, vt vitaret fractiones, alioquin expeditius res ageretur ducendo denominatorem rationis, puta 4. in minorem numerum $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ vnde fierent quadrato æquandi 5 $\frac{1}{5}$ N + 4 $\frac{1}{5}$ & 5 $\frac{1}{5}$ N. + 1 $\frac{1}{5}$. Itaque subtili artificio res deducta est ad primum modum duplicatæ æqualitatis, quo vsus est Diophantus tum duodecima, & decima quarta secundi, tum decimá quarta huius. Etenim ipsorum 130 N. + 105. & 130 N. + 30. Interuallum est 75. qui fit, si libet, ex 3. in 25. quorum summæ semissis quadratus 196. æquatur maiori 130 N. + 105. & fit N. $\frac{7}{10}$.

Cæterùm varietas in operatione & in solutione à multis oritur capitibus.

Primò enim inueniri possunt infiniti duo numeri, quorum productus adscita eorum summa quadratum faciat, quique vnitate aucti fiant plani similes. Tum quia, vt bene monet Xilander, quod de quadruplis asserit Diophantus, potest congruenter applicari omnibus aliis numeris seruantibus rationem quadrati ad quadratum; simi-

licet enim si numerus numeri noncuplum superet octonario, addita vtrimque vnitate fient plani similes; & si numerus numeri sedecuplum excedat numero 15. adscita vterque vnitate, fient etiam plani similes, & sic de aliis. Tũ quia numeri quadrato æquandi, qualis est in hypothesi Diophanti 4 Q. + 8 N. + 3. latus diuersimodè fingi potest, vt patet. Secundò rursus in secunda eadem positione alia varietas considerari potest. Primus enim non solùm potest poni 1 N. sed & quilibet Numerorum numerus lemmate tamen tradito vtendo congruenter in positione secundi. Vt si ponatur primus 2 N. erit secundus 8 N. + 3. vel 32 N. + 15. &c. si ponatur primus 3 N. erit secundus 12 N. + 3. vel 27 N. + 8 &c.

Tertio in tertia positione iisdem manentibus primo & secundo potest etiam tertius infinities variari; & poni non solùm 1 N. sed & quilibet Numerorum numerus, sed ad hoc intelligenius ampliari lemma traditum hoc pacto.

Si fuerint duo numeri, quorum maior quadruplum minoris ternario superet, & vterque ducatur in tertium numerum, productisq; addatur idem tertius, fient duo plani similes.

Quod ita demonstrabitur.

A........B...C				
D..	E		F	5
G	55.		H	10
K	60		L	15

Sit A C superans ternario B C ipsum A B quadruplum ipsius D E. & tertius quilibet numerus F ductus in ipsos A C. D E. faciat G H. quibus addendo sigillatim ipsum F. fiant K L. dico ipsos K L esse in ratione quadrupla, atque adeò planos similes. Etenim quia G. qui fit ex F. in A C.[1] æquatur productis ex F. in A B. & B C. At productus ex F. in A B. quadruplus est producti ex F. in D E seu ipsius H. (cùm A B. D E. sint in quadrupla ratione) productus autem ex F. in ternarium B C. triplus est ipsius F. patet G. continere quadruplum ipsius H. & triplum ipsius F. Quare si eidem G. addatur F. summa K. quadrupla est ipsorum H F. seu ipsius L. Quod demonstrandum erat. Non aliter idem ostẽdetur de alia qualibet ratione quadrati ad quadratum. Vt si A C. ponatur excedere noncuplum vel sedecuplum ipsius D E. ternario, concludetur & K ipsius L esse noncuplum vel sedecuplum, & sic de aliis. Quare manifestum est iisdem manentibus primò & secundò puta $\frac{1}{10}$. & $4\frac{4}{5}$. Tertium poni posse 1 N. vel 2 N. vel 3 N. &c.

[1] secundi.

Denique ipsa duplicata æqualitas infinitis modis resolui potest, prout sumentur alij atque alij numeri, quorum mutuo ductu fiat 75. dummodo horum summæ & interualli semissis quadrati maiores sint ipsis 105. & 30. vt docuimus ad duodecimam secundi.

QVÆSTIO XIX.

INVENIRE tres numeros, ita vt binorum multiplicatione productus dempta ambotum summa sit quadratus. Vt in præcedenti ponatur primus 1 N. secundus vnitatum quotuis, & eodem modo in difficultatem inexplicabilem incidemus. Vt ergo multitudinem Numerorũ ad multitudinem Numerorum habeamus sub ratione quadrati ad quadratum, eò deuoluitur res vt quærantur duo numeri, quorum mutuo ductu qui fit dempta ambotum summa sit

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον, ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου. τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ος α. ὁ δεύτερος μ^ο ὅσων δή ποτε καὶ ἐλεύσομαι ὡσαύτως εἰς ἀπορίαν. ἵνα οὖν τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν ἔχωμεν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀπῆκται εἰς τὸ ζητῆσαι δύο ςς^ους, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ↑ συναμφότερον ποιῇ

τετραγώνους. [καὶ ἔτι οἱ μονάδι ἐλάσσονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον·] καὶ ἐπεὶ ὁ ἀριθμὸς ἐὰν ἀριθμοῦ τετραπλασίων ᾖ παρὰ μονάδας τρεῖς, καὶ μονάδι αὐτῶν ἐλάσσονες πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐπειδήπερ καὶ τῆς μ° α. ἀφ' ἑκατέρου ἀφαιρουμένης γίνεται ἐλάττωσις μ° δ καὶ α. καὶ δῆλον ὅτι ἀπὸ τετραπλασίων, λόγου τετραπλασίονος ἀφαιρουμένου, καὶ ὁ καταλειπόμενος ἔσται τετραπλασίων, τουτέστι [ὡς] τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον ς α μ° α. τὸν δὲ δεύτερον ςς δ μ° α. καὶ μένει ὁ ὑπ' αὐτῶν τοῦ συναμφότερον δ^Υ δ λείψει μ° α ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β λείψει μ° β. τουτέστι δ^Υ δ μ° δ τοῦ ςς η. καὶ γίνεται ὁ ς ε. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιγ. ὁ δὲ δεύτερος κη. καὶ λέλυται ἐν τῶν ἐπιταγμάτων. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν πρῶτος ἐστι ιγ. ὁ δὲ δεύτερος γ καὶ ἥμισυ. τάσσω τὸν τρίτον ς α. καὶ ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου συναγόμενος ςς γ α λείψας τὸν συναμφότερον ς α μ° γ α. μένει ςς β. α λείψει μ° γ. α. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω μονάσι δ. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου γίνεται ςς ιγ. λείψας συναμφότερον γίνεται ςς ε λείψει μονάδων ιγ. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω ις. ταῦτα ἑκκαιδεκάκις γίνονται ςς ι λείψει μονάδων κς. ἴσοι τετραγώνῳ καὶ ὁμοίως καὶ ςς β. α λείψει μ° γ α τετράκις, γίνονται ςς ι λείψει μ° ιδ ἴσοι πάλιν τετραγώνῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπερο-

quadratus, & præterea ipsi vnitate multati rationem habeant quam quadratus ad quadratum. Enimuero si numerus alterum quater, dempto ternario continet, ij vnitate multati rationem habent inter se quam quadratus ad quadratum; quia scilicet vtrimque ablata vnitate, fit diminutio hinc quaternatij, inde vnitatis; & patet si à quadruplis quadtupla, auferantur, residua esse quadrupla, atque ideo in ratione quadrati ad quadratum. Pono igitur primum 1 N. + 1. secundum 4 N. + 1. & fit productus eorum multiplicatione, dempto vtroque 4 Q. − 1. æqualis quadrato à latere 2 N. − 2. hoc est 4 Q. + − 4. − 8 N. & fit 1 N. $\frac{5}{8}$. erit ergo primus $\frac{13}{8}$ secundus $\frac{28}{8}$. & satisfit vni postulatorum. Et quoniam primus est $\frac{13}{8}$ secundus 3 $\frac{1}{2}$. pono tertium 1 N. & fit ex secundo in tertium 3 $\frac{1}{2}$ N. & vtroque detracto, puta 1 N. + 3 $\frac{1}{2}$ restat 2 $\frac{1}{2}$ N. − 3 $\frac{1}{2}$ æquandus quadrato, Esto quadrato 4. Qui autem fit ex tertio in primum est $\frac{13}{8}$ N. & vtroque dempto restat $\frac{5}{8}$ N. − $\frac{13}{8}$ æquandus quadrato. Esto ipsi 16. & per hunc istud multiplicetur fit 10 N. − 26. æquandus quadrato. Similiter 2 $\frac{1}{2}$ N. − 3 $\frac{1}{2}$. ducátur in 4. fit 10 N. − 14. æqualis quadrato. Horum interuallú 12.

quod fit mutuo ductu ipsorum 2. & 6. quorum summæ semissis in se facit 16. æqualem maiori, puta 10 N. – 14. & fit 1 N. 3. Ergo tertius est 3. seu 24/8. habebamus autem primum 16/8. secundum 3 1/2 seu 28/8. & soluunt quæstionem.

χὴ μ° ιβ̄. οὔσα τὸ ὑπὸ μ° β̄ καὶ μ° ϛ̄ συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται μ° ιϛ̄ ἴσαι τῷ μείζονι. τουτέστιν ϛϛ^οι ῑ λείψει μ° ιδ̄. καὶ γίνεται ϛ° μ° γ̄. ἔσται ὁ μὲν τρίτος μ° γ̄. τουτέστι κδ^η. ἔχομεν δὲ τὸν μὲν πρῶτον μ° ιϛ^η. τὸν δὲ δεύτερον μονάδος γ̄. α^ς. τουτέστι κη^η. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XIX.

OMNIA quæ ad præcedentem adnotata sunt, hîc etiam locum habent. Modus vtendi duplicata æqualitate idem est, & lemma quod assumit Diophantus eadem ratione demonstratur, ipsiusque demonstrationis fundamentum attigit Diophantus his verbis. *Quia scilicet vtrimque ablata vnitate, fit diminutio hinc quaternarij, inde vnitatis, & patet si à quadruplis quadrupla auferantur, residua esse quadrupla.*

Operationis quoque & solutionis varietas totidem modis contingere potest, vt diutius pigeat immorari in re manifesta.

QVÆSTIO XX.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione siue alterutrum, siue summam ipsorum adsciscat, faciat quadratum. Ponatur alter 1 N. alter 4 N. – 1. Quoniam si numerus sit numeri quadruplus dempta vnitate, productus eorum multiplicatione adsumens minorem facit quadratum. Iam duo postulatorum restant implenda, vt scilicet productus eorum multiplicatione adscito secundo, & vtroque simul faciat quadratum. Sed productus adsumens secundum fit 4 Q. + 3 N. – 1. æqualis quadrato. Eridem productus vtroque addito fit 4 Q. + 4 N. – 1. æquandus quadrato. Et est duplicata æqualitas. Horum interuallum 1 N. quod fit ex 1/4 in 4 N. & fit 1

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ϛ° ᾱ. ὁ δὲ ϛϛ δ̄ ⋔ μ° ᾱ. ἐπειδήπερ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων παρὰ μονάδα, ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ τετράγωνον. ἑξῆς δεῖ καὶ τὰ λοιπὰ δύο ἐπιτάγματα κατασκευάσαι. ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα [τὸν δεύτερον, καὶ ἔτι] συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν δεύτερον γίνεται δ^υ δ̄ ϛϛ^οι γ̄ λείψει μ° ᾱ. ἴσος τετραγώνῳ. ὁ δὲ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν συναμφότερον γίνεται δ^υ δ̄ ϛϛ δ̄ λείψει μ° ᾱ. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, καὶ ἔστι αὐτῶν ὑπεροχὴ ἀριθμὸς εἷς, καὶ περιέχεται ὑπὸ μ° α^δ. καὶ ἀριθμῶν δ̄. καὶ συνά-

γίνεται ὁ ς' ξε σκδ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ξε σκδ. ὁ δὲ δεύτερος λς σκδ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

N. $\frac{65}{224}$ Erit igitur primus $\frac{65}{224}$. secundus $\frac{36}{224}$. & soluunt quæstionem.

IN QUAESTIONEM XX.

MAGNA est conformitas huius quæstionis cum vigesima-septima secundi. Vbi quæruntur duo numeri, quorum productus adscito alterutro quadratum faciat. Sed hîc præterea postulatur vt idem productus adsumpta amborum summa faciat quadratum. Itaque suas positiones eodem modo instituit Diophantus, & eorundem lemmatum quæ ibi demonstrauimus hîc vsus esse potest.

Porro notandus hic modus vtendi duplicata æqualitate, cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum constat ex solis numeris. Tunc enim nec esse est in numeris quadrato æquandis reperiri quadratorum numerum quadratum, vt hîc 4 Q. Numeros autem quorum mutuo ductu fiat interuallum 1 N. accipit Diophantus 4 N. & $\frac{1}{4}$ ob similem causam illius quã attulimus ad decimam quintam huius. Oportuit enim talem sumi numerorum numerum, cuius semissis quadratus efficeret 4 Q. Quare debuit pro altero sumi 4 N. vnde sequitur alterum necessario esse $\frac{1}{4}$ vt eorum mutuo ductu fiat 1 N.

Cæterùm tota diuersitas in primis positionibus consistit, quas diuersimodè fieri posse constat auxilio lemmatum ad vigesimam septimam secundi allatorum.

QVÆSTIO XXI.

EYPEIN δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε λήψῃ ἑκάτερον, ἐάν τε συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ς' α μ' α. ὁ δὲ ςς δ. ἐπειδήπερ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων παρὰ μ' δ. ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον. λοιπὸν δὴ τὸν ὑπ' αὐτῶν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔτι τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν ἐλάσσονα γίνεται δ' δ ςς γ λείψει μ' α. ὁ δὲ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον δ' δ λείψει ς' α μ' α. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ ςς δ. τάσσω τὸν μὲν ςς δ. τὸν δὲ μ' α. καὶ γίνεται ὁ ς μ' α. α δ. καὶ ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ' β. α δ. ὁ δὲ δεύτερος μ' ε. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione siue alterutro siue vtriusque summa multatus quadratum faciat. Ponatur alter 1 N. + 1. alter 4 N. Quandoquidem si numerus numeri sit quadruplus, demptis quatuor vnitatibus, productus eorum multiplicatione detracto maiore quadratum facit. Restat itaque vt productum multiplicationis siue minore, siue vtriusque summa multatus, faciat quadratum. Sed productum illud dempto minore fit 4 Q. + 3 N. − 1. Et idem productum dempto vtroque fit 4 Q. − 1 N. − 1. Horum vtrumque quadrato æquale est. Interuallum 4 N. Statuo illud mutuo ductu producentes 4 N. & 1. & fit 1 N. 1 $\frac{1}{4}$. Erit ergo primus 2 $\frac{1}{4}$. secundus 5. & manifesta est demonstratio.

IN QVAESTIONEM XXI.

EADEM aut similia dici possunt de hac quæstione, quæ de superiore dicta sunt. vide quàm sit conformis vigesimæ octauæ secundi, & quomodo vtrobique eodem vtens lemmate Diophantus, eodem modo suas instituat positiones. Modus vtendi duplicata æqualitate idem est, quo vsus est in præcedente, & easdem ob causas ad conficiendum interuallum 4 N. sumpsit 4 N. & 1.

QVÆSTIO XXII.

INVENIRE quatuor numeros vt compositi ex omnibus quadratus, singulorum tam adiectione quàm detractione faciat quadratum. Quoniam in quolibet triangulo rectangulo quadratus hypotenusæ siue auctus, siue multatus duplo eius quod fit è multiplicatione laterum circa rectum, facit quadratum. Quæro primum quatuor triangula rectangula æquales habentia hypotenusas. Hoc ipsum verò est, quadratum aliquem diuidere quater in duos quadratos. Atqui didicimus datum quadratum diuidere in duos quadratos infinitis modis. Nunc ergo exponamus duo triangula rectangula in minimis numeris, quales sunt 3. 4. 5. & 5. 12. 13. & multiplicetur vnumquodque ipsorum per hypotenusam alterius, & erit primum triangulum 39. 52. 65. secundum 25. 60. 65. & sunt rectangula æquales habentia hypotenusas. Adhuc autem suapte natura numerus 65. diuiditur bis in duos quadratos, nempe in 16. & 49. Et rursus in 64. & 1. quod ei contingit quia fit ex multiplicatione mutua 5. & 13. quorum vterque in duos diui-

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τεσσάρων τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ ἕκαστον, ἐάν τε λείψῃ [ποιῇ] τετράγωνον. ἐπεὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν δὶς ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἐάν τε λείψῃ ποιεῖ τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. τὸ δ' αὐτό ἐστι τετράγωνόν τινα διελεῖν [τετράκις] εἰς δύο τετραγώνους. καὶ ἐμάθομεν τὸν δοθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς β τετραγώνους ἀπειραχῶς. νῦν οὖν ἐκθώμεθα δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὑπὸ ἐλαχίστων ἀριθμῶν οἵ εἰσι γ. δ. ε. ε. ιβ. ιγ. καὶ πολλαπλασίασον ἕκαστον τῶν ἐκκειμένων ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἑτέρου, καὶ ἔσται τὸ μὲν πρῶτον τρίγωνον λθ. νβ. ξε. τὸ δὲ δεύτερον κε. ξ. ξε. καὶ ἔστιν ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποθεινούσας. ἔτι δὲ φυσικῶς ὁ ξε. διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους διχῶς εἴς τε τὸν ις. καὶ τὸν μθ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν ξδ. καὶ τὴν μονάδα. τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐπεὶ ὁ ξε ἀριθμὸς περιέχεται ὑπὸ τοῦ ιγ καὶ τοῦ ε. ὧν ἕκαστος διαιρεῖται εἰς δύο

τετραγώνοις. νῦν τῶν ἐκκειμένων τούτε μθ. καὶ τοῦ ις. λαμβάνω τὰς πλευράς, εἰσὶ δὲ ζ καὶ δ. καὶ πλάσσω τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο τούτε ζ καὶ τοῦ δ. καὶ ἔστι λγ. νϛ. ξε. ὁμοίως καὶ τοῦ ξδ. καὶ τῆς μονάδος αἱ πλευραὶ η καὶ α. καὶ πλάσσω πάλιν ἀπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ αἱ πλευραὶ ις. ξγ. ξε. καὶ γίνεται τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. ἐλθὼν οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα, τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν τεσσάρων ςς ξε. ἕκαστον δὲ τούτων τῶν τεσσάρων δυνάμεων τοσούτων, ὅσων ἐστὶ τετραπλασίων τοῦ ἐμβαδοῦ. τὸν μὲν πρῶτον [δ^ν δνϛ. τὸν δὲ δεύτερον δ^ν γ. τὸν δὲ τρίτον] δ^ν γχϟϛ. καὶ ἔτι τὸν τέταρτον δυνάμεις βιϛ. καὶ εἰσὶν οἱ τέσσαρες δ^ν μυ. α. βψξη. ἴσοι ςς ξε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° ξε μυ. α. μο. βψξη. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μυ. αψιγ. μονάδες ϛχ. ὁ δὲ δεύτερος μυ. ασξζ. μ° ε μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τρίτος μυ. αφξα. μ° εχ. μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τέταρτος μυ. ωνα. μ° ζχ. μορίου τοῦ αὐτοῦ, τὸ δὲ μόριον μυ. α. μυ. ϛτβ. μ° αωκδ.

ditur quadratos. Nunc expositorum 49. & 16. sumo latera, sunt autem 7. & 4. & formo triangulum rectangulum à duobus numeris 7. & 4. & est 33. 56. 65. Similiter ipsorum 64. & 1. latera sunt 8. & 1. à quibus rursus formo triangulum rectangulum, cuius latera sunt 16. 63. 65. & fiunt quatuor triangula rectangula æquales habentia hypotenusas. Refero me igitur ad propositam initio quæstionem, & pono compositum ex quatuor numeris 65 N. Quemlibet verò ipsorum quatuor pono tot quadratorum quot continet vnitates quadruplum areæ. Primum quidem 4056 Q. Secundum autem 3000 Q. Tertiú 3696 Q. Quartum denique 2016 Q. & est illorum summa 12768 Q. æqualis 65 N. & fit 1 N. $\frac{65}{12768}$. Ad positiones. Erit primus 17136600. Secundus 12675000. sub eiusdem partis denominatione. Tertius 15615600. sub eiusdem partis denominatione. Quartus 8517600. sub eiusdem partis denominatione. Est auté partis denominator 163021824.

IN QVAESTIONEM XXII.

PVLCHERRIMVM est hoc problema & raræ subtilitatis, in quo cùm multum desudarit Xilander, perfectam tamen eius enodationem afferre non potuit, destitutus scilicet ope porismatum quæ ad hoc requiruntur. Quoniam ergo gloriam rei perobscuræ explicandæ nobis libenter reliquit, nos eam libentius amplectamur. Et vt omnia clariora fiant, singula quæque notatu digna ordine prosequamur.

Aduerte itaque primò lemma quod assumit Diophantus de triangulis rectangulis

idem ferè esse, licet aliis verbis enunciatum, quod iam vsurpauit trigesima prima secundi, vbi & monuimus, quod hîc repetere non pigebit, illo nil aliud contineri, quàm quod ostenditur quarta secundi Euclidis, & quarta secundi porismatum. Etenim per quartam secundi, constat summam quadratorum à duobus numeris adsumpto duplo producti laterum efficere quadratum summam laterum. At per quartam secundi porismatum patet duplum producti laterum detractum à summa quadratorum, relinquere quadratum interualli laterum. Quare cùm in triangulo rectangulo quadratus hypotenusæ sit æqualis quadratis laterum circa rectum, manifestum est, quod ait Diophantus, quadratum hypotenusæ siue adsumpto, siue detracto duplo producti laterum circa rectum, facere vtrimque quadratum. Proinde rectè Diophantus summam quatuor quæsitorum numerorum constituit hypotenusam alicuius trianguli rectanguli, vnumquemque verò ipsorum numerorum ponit duplum producti laterum circa rectum, seu quadruplum areæ trianguli, vt constat ex tertia definitione tertij porismatum, sic enim optimè satisfit postulatis. Quamobrem vt ipsi numeri diuersi reperiantur, superest vt inueniamus quatuor triangula rectangula, quorum eadem sit hypotenusa.

Aduerte igitur secundò, vt benè monet Diophantus, reperire quatuor triangula rectangula eandem habentia hypotenusam, nil aliud esse quàm quadratum quemlibet diuidere quater in duos quadratos. Quare nisi fractiones in operando vitare voluisset, poterat rem absoluere per octauam secundi, qua docuit quadratum quemlibet infinities diuidere in duos quadratos. Vt autem fractiones in operatione vitentur, subtili sanè artificio quadratum inuestigat author, qui quater diuidatur in duos quadratos integros. Exponit scilicet duo triangula rectangula non similia, puta 3. 4. 5 & 5. 12. 13. Tunc vtriusque latera per alterius hypotenusam multiplicans, inuenit alia duo triangula, quorum eadem est hypotenusa, nimirum 39 52. 65. & 25 60. 65. Nam & hæc esse latera trianguli rectanguli patet per primam tertij porismatum, cùm fiant lateribus trianguli rectanguli per eundem numerum multiplicatis. Quod autem dixi exponenda esse triangula non similia, id factum est, quia si triangula similia sint, non iam alia duo hac ratione formabuntur ab his triangula, sed vnicum duntaxat. Quod sic demonstratur. Sint triangula similia A B C. D E F. & ducta hypotenusa F in singula alterius latera fiat triangulum G. H. K. dico idem triangulum G H K, & non aliud, fieri, si hypotenusa C ducatur in singula latera alterius D E F. Nam primo ex hypothesi ex C in F fiet K. Deinde [1] quia est A ad D vt C ad F, fiet, vtique [2] idem G ex C in D qui fit ex A in F. similiter quia est B ad E vt C ad F. fiet rursus idem H ex C in E qui fit ex B in F. Quare constat propositum.

A 3.	B 4.	C 5.
D 6.	E 8.	F 10.
G 30.	H 40.	K 50.

[1] defin. 4. 3. porism.
[2] 1. septimi.

Aduerte tertiò. Vt rursus inueniantur alia duo triangula, quorum sit eadem hypotenusa 65. Diophantum vti porismate, quod demonstrauimus propositione septima libri tertij nimirum. Si duo numeri ex duobus quadratis compositi inter se ducantur, productus componetur bis ex duob[us q]uadratis. Hac de causa triangula initio exposita ita delegit author, vt cuiuslibet [hy]potenusa componatur ex duobus quadratis, puta 5. ex quadratis 1. & 4. ac 13. ex quadratis 4. & 9. vnde optimè concludit 65. componi bis ex duobus quadratis, nimirum semel ex 16. & 49. Atque iterum ex 1. & 64. Hi autem quadrati vt reperiantur ostendit septima tertij porismatum. Sed illius limitationes attendendæ sunt, quarum prima requirit, vt quilibet expositorum numerorum componatur ex duobus quadratis inæqualibus, nam si alter ex duobus æqualibus quadratis compositus sit, productus eorum multiplicatione componetur tantùm semel ex duobus quadratis, vt si sumantur 5. & 8. quorum 8. componitur ex æqualibus quadratis 4. & 4. erit productus 40. semel tantùm ex duobus quadratis compositus, puta ex 36. & 4. secunda verò limitatio requirit, vt expositi numeri componantur ex quadratis minimè proportionalibus, alioquin idem sequitur incommodum, vt si sumantur 5. & 20. compositi ex quadratis proportionalibus 1. 4. 4. 16. erit productus 100. ex duobus quadratis semel duntaxat compositus, videlicet ex 64. & 36. Quæ omnia loco citato demonstrantur.

Aduerte quartò. Inuentis quadratis 16. & 49. itemque 1. & 64. ex quibus 65. componitur ex iis Diophantum formare triangula rectangula duo, quorum eadem

est hypotenusa 65. eò quem demonstrauimus modò tertia vel quinta tertij porismatum. Etenim si per tertiam libeat operari à quadratis 16. & 49. fiet triangulum cuius hypotenusa erit summa ipsorum puta 65. basis verò interuallum eorundem puta 33. Perpendiculum autem erit duplum medij proportionalis, puta 56. Rursus à quadratis 1. & 64. formabitur triangulum, cuius hypotenusa erit summa ipsorum, puta 65. Basis verò interuallum eorundem, puta 63. Perpendiculum autem erit duplum medij proportionalis, puta 16. & sic habebuntur triangula duo quæsita 33. 56. 65. & 16. 63. 65. Quæ eadem reperientur per quintam tertij porism. Verùm hîc notandus est Casus, cùm productus ex mutuo ductu duorum numerorum ex duobus quadratis compositorum, componitur quidem bis ex duobus quadratis, sed vna compositione componitur ex duobus quadratis æqualibus, vt sumptis 5. & 10. productus 50. componitur quidem semel ex quadratus 1. & 49. inæqualibus. Sed componitur iterum ex æqualibus 25. & 25. Vnde per hanc compositionem inutilis redditur operationi Diophanti, non enim inde concludi potest eius quadratum componi ex duobus quadratis, cùm ipsorum 25. & 25. nullum sit interuallum, quod deberet esse latus vnius quadratorum illorum. Porrò id semper accidit, quando tales sumuntur duo numeri ex duobus quadratis compositi, vt quod fit ex interuallo laterum vnius, in interuallum laterum alterius, æquetur duplo producti ex minore latere in minus latus. Quod ita demonstratur. Sint A B latera quadratorum vnius, quorum interuallum C. & sint D E latera quadratorum alterius, quorum interuallum F. & productus ex C in F æquetur duplo producti ex A in D. Porro compositus ex quadratis ipsorum A B esto M. & productis ex quadratis ipsorum D E esto N. dico productum ex M in N. componi quidem bis ex duobus quadratis, sed vna compositione componi ex duobus equalibus quadratis. Etenim ducto D in ipsos A B. fiant G H. & ducto E in eosdem A B. fiant K L. Patet ex demonstratis septima tertij porismatum, productum ex M in N. componi tum ex quadrato summæ amborum G L. & ex quadrato interualli ipsorum H K. Tum ex quadrato summæ amborum H K. & ex quadrato interualli ipsorum G L. Verùm aio summam ipsorum H K. æquari interuallo ipsorum G L, ac proinde productum ex M in N. hac compositione constare ex duobus quadratis æqualibus. Quia enim L fit ex E in B. seu ex duobus D F. in duos A C. si hinc auferatur productus ex D in A. puta G. patet interuallum ipsorum G L. æquari productis ex A in F, ex C in D, & ex C in F. & loco producti ex C in F. sumendo duplum producti ex A in D illi æqualem ex hypothesi, erit prædictum interuallum æquale duplo producti ex A in D. & productis ex D in C. & ex A in F. Sed eisdem productis patet æqualem esse summam ipsorum H K. Nam H fit ex D in B. seu ex D in A. & ex D in C. At K fit ex A in E. seu ex A in D. & ex A in F. Vnde constat duorum H K. summam æquari duplo producti ex A in D, & productis ex D in C. & ex A in F. Igitur ipsorum H K summa æquatur interuallo ipsorum G L. Quod demonstrandum erat.

	C 6.		
A 3.	B 9.	M 90.	
	F 1.		
D 1.	E. 2.	N 5.	
G 3.	H 9.	K 6.	L 18.

Aduerte quintò. Textus Græci lacunas à me esse repletas, tum deficientes numeros restituendo, tum coruptos emendando, & ne fortè hæreas in numeris Græcis, moneo Diophantum maximos numeros in quibus ingens Myriadum multitudo continetur, sic exprimere vt Myriadas à reliquis vnitatibus distinguat perspicuitatis ergo, signum autem Myriadibus apponit μυ̅ Myriadibus myrandum μμ. duplex μ. At reliquis vnitatibus signum consuetum μ°. Sic vides numerum 163021824. sic ab eo exprimi, μμα̅. idest Myrias vna myradum. μυ̅. ͵ςτβ id est Myriades 6302. μ° ͵αωκδ. idest vnitates 1824. Et sic de aliis.

Aduerte postremò, sine porismate Diophanti æquè benè inueniri posse in integris quatuor triangula rectangula eandem habentia hypotenusam, auxilio decimæ tertij porismatum. Etenim expositis triangulis non similibus 3. 4. 5 & 5. 12. 13. si cum Diophanto formes ex his alia duo ducendo vtramque hypotenusam in alterius latera, habebis 39. 52. 65. & 25. 60. 65. Tum si per decimam tertij porism. ex iisdem triangulis prius expositis formes alia duo modo ibi tradito, fient vtique 33.

56. 65. & 16. 63. 65. Immò ex ibi demonstratis licebit ampliare Porisma Diophanti, & illud extendere nō solùm ad numeros ex duobus quadratis compositos, sed etiam ad duos ex duobus planis similibus compositos, & vniuersalissimè proponere.

Si numerus ex duobus planis similibus compositus, ducatur in alium ex duobus planis similibus compositum, qui non sint proportionales iis ex quibus primus componitur; producetur numerus cuius quadratus componetur quater ex duobus quadratis.

A 24. B 45. C 51.
D 9. E 12. F 15.

G 693. K 324.
L 756. M 117. T 765
N 675. P 360.
Q 612. R 459.

Sint enim C F ex duobus planis similibus vterque compositus, qui non sint proportionales. Et ex C in F fiat T. dico T quater componi ex duobus quadratis. Etenim quia C componitur ex duobus planis similibus, erit hypotenusa trianguli rectāguli per tertiam tertij porismatum. Sint ergo latera circa rectum A. B. similiter F ostenditur hypotenusa trianguli rectanguli, cuius latera circa rectum D E. Igitur à duobus triangulis A B C D E F. formentur alia duo ducendo hypotenusam vtramque in alterius latera, erunt triangula N P T. Q R T. Rursus formentur alia duo per decimam tertij porismatum, erunt hæc G K T. L M T. Quare constat propositum.

Cæterùm animaduersione quoque dignum est, quæstionem hanc ad quotlibet numeros eadem arte extendi posse, cùm si fractiones quidem minimè vtentur, quilibet quadratus infinitis modis diuidi possit in duos quadratos. Si verò etiam per integros rem absoluere libeat, facilè sit Diophanti artificium imitando quadratum reperire, qui quoties quis iusserit componatur ex duobus quadratis integris, quandoquidem per porisma quod assumit Diophantus, quodque demonstratum est septima tertij porismatum licet numerum inuenire quoties quis iusserit ex duobus quadratis compositum. Nam sicut per illud porisma inuenitur numerus bis compositus ex duobus quadratis, ducendo numerum semel ex duobus quadratis compositum, in alium item semel ex duobus quadratis compositum, ita si numerus bis compositus vt 65. ducatur in alium semel compositum, quales sunt 5 13. 10. 17. productus ter aut quater ex duobus quadratis componetur, ter quidem si 65. ducatur in 5. vel in 13. ex quorum mutuo ductu ipse fit, vel in aliquem illorum multiplicem. Quater autem si secus. Verbi gratia productus ex 5. in 65. puta 325. ter tantum componitur ex duobus quadratis, nempe ex 225. & 100. ex 324. & 1. ex 289. & 36 Quod accidit quia 5 & 65. componuntur ex duobus quadratis. Quare si intelligamus 65. componi ex 49. & 16. necesse est productum ex 5 in 65. puta 325. componi ex duobus quadratis qui sunt 225. & 100. 324. & 1. Rursus verò si capiamus 65. vt compositum ex 64. & 1. necesse est productum ex 5. in 65. puta 325. componi etiam bis ex duobus quadratis, nimirum ex 289 & 36. & ex 225. & 100. Sed quia hi coincidunt cum duobus ob priorem multiplicationem inuentis, constat 325. ter tantùm diuidi in duos quadratos. At si ducas 17. in 65. fiet 1105. quater compositus ex duobus quadratis, nimirum ex 576. & 529. quorum latera 24. 23. ex 1024. & 81. quorum latera 32. 9. ex 961. 144. quorum latera 31. & 12. Ac demum ex 1089. & 16. quorum latera 33. & 4.

Quod si velis numerum sexies compositum ex duobus quadratis, sume aliquem ter compositum vt 325. eumque ducito in semel compositum, dum non sit aliquis eorum qui metiuntur 325 vel multiplex eorum, sed sume v. g. 17. quo ducto in 325. fit 5525. sexies cōpositus ex duobus quadratis, nempe ex 3025. 2500. quorum latera 55. 50. ex 3844. 1681. quorum latera 62. 41 ex 4900. 625. quorum latera 70. 25. ex 5041. 484. quorum latera 71. 22. ex 5329. 196. quorum latera 73. 14. Ac demum ex 5476. 49. quorum latera 74. 7.

Ita si velis numerum octies ex duobus quadratis compositum, duces compositum quater in compositum semel, vel bis compositum in bis compositum, dummodo inter eos nulla sit communicatio. & sic in infinitum. Qua de causa si ducas 5525. sexies compositum, vt ostensum est, in 1073. bis compositum, nimirum ex binis quorum latera 32. & 7. Et rursus ex binis quorum latera 28. 17. fiet 5928325. compositus (quod mirabile est) viceties & quater ex duobus quadratis, quorum accipe binorum latera.

2110	2426	2417	2390	2362	219t	1985	2118
1215	207	294	465	591	1062	1410	1201
2319	2335	1823	1953	2415	2434	2271	2385
742	690	1614	1454	310	63	878	490
2282	2202	2065	2238	1746	1890	1633	2433
849	1039	1290	959	1697	1635	1806	94

QVÆSTIO XXIII.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον. ὃς λείψας ἑκάτερον τῶν διῃρημένων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς μ° ῑ. τετάχθω ὁ προσευρισκόμενος τετράγωνος δ̄ ᾱ ςς β̄. μ° ᾱ. ἐπεὶ ἐὰν μὲν λείψῃ ςς β̄ μ° ᾱ. καταλείπεται τετράγωνος. ἐὰν δὲ ςς δ̄. πάλιν καταλείπεται τετράγωνος. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον ςς β̄. μ° ᾱ. τὸν δὲ δεύτερον ςς δ̄. ταῦτα δεῖ συντεθέντα ποιεῖν τὸν δοθέντα, ἀλλὰ συντεθέντα ἐστὶ ςς ϛ̄ μ° ᾱ. ταῦτα ἴσα μ° ῑ. καὶ γίνεται ὁ ς μ° ᾱ. α^ς. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° δ̄. [ὁ δὲ δεύτερος μ° ϛ̄] ὁ δὲ τετράγωνος μ° ϛ̄. α^δ.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, qui dempta vtraque parte diuisi faciat quadratum. Esto datus 10. Ponatur inueniendus quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Is siue ei adimas 2 N. + 1. siue 4 N. remanebit quadratus. Statuo igitur primum 2 N. + 1. secundum 4. N. Oportet horum summam æquari dato numero. Sed horum summa est 6 N. + 1. Hoc ergo æquatur 10. & fit 1 N. $1\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit primus 4. Secundus 6. Quadratus autem $6\frac{1}{4}$.

IN QVAESTIONEM XXIII.

MIROR Xilandrum non aduertisse quæstionem hanc eandem esse cùm decima sexta secundi, sicut & sequens non differt à decima quinta eiusdem libri. Operatio quidem est paulò diuersa. Sed eodem fermè recidit.

Cæterùm varietas solutionis in eo consistit quod quadrati inueniendi latus potest fingi diuersimodè, nimirum ab 1 N. + quotlibet vnitatibus, quarum quadratus sit minor numero diuidendo, puta in hypothesi Diophanti 1 N. + 1. vel 1 N. + 3. vel 1 N. + quotlibet vnitatibus, quarum quadratus sit minor quàm 10. sic enim totidem diuersæ contingent solutiones quot modis variabitur vnitatum numerus, prætérquàm in vno casu, cùm scilicet tales duo sumētur vnitatum numeri, vt vtriusq; quadratum auferendo à dato numero, & residua diuidendo per sextuplum sumptorum numerorum, fient quotientes eodem distantes interuallo, quo distant sumpti numeri. Vt si sumantur numeri 1. & 2. in nostra hypothesi; nam ab eodem 10. auferendo quadratos eorum, puta 1. & 4. remanent 9. & 6. quibus diuisis per sextuplum ipsorum numerorum, puta 9. per 6. & 6. per 12. fiunt quotientes $\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ quorum interuallum idem est atque ipsorum 1 & 2. Quamobrem siue fingas latus quadrati quæsiti 1 N. + 1. siue 1 N. + 2. eadem continget solutio, cuius symptomatis causam ex ipsa operatione paulò attentius considerata facilè deprehendes.

Sed & animaduersione dignum est eodem posito vnitatum numero in latere Quadrati, eandem semper contingere solutionem, quantumlibet varietur Numerorum numerus. Sic in hypothesi Diophanti, siue latus fingatur 1 N. + 1. siue 2 N. + 1. siue 3 N. + 1 &c. semper eadem fiet solutio, eruntque quæsitæ partes 6. & 4. & quadrati latus $2\frac{1}{2}$. Similiter siue quadrati latus ponatur 1 N. + 3. siue 2 N. + 3. siue 3 N. + 3. &c. semper erit eadem solutio, quippe quæsitæ partes inuenientur $\frac{2}{9}$ & $9\frac{7}{9}$. At quadrati latus $\frac{55}{18}$. Huius quoque symptomatis caussam ex ipsamet operatione deprehendes, & ab huiusmodi theoremate.

Si fuerint tres numeri, & à primo detrahatur quadratus secundi, & residuum diuidatur per sextuplum producti ex secundo in tertium, ac quotiens ducatur in tertium, idem semper procreatur numerus quantumlibet varietur tertius primo & secundo inuariatis.

Hoc verò nil aliud est quàm ex eodem numero per sextuplum eiusdem numeri diuiso eundem semper procreari numerum, vt tibi considerandum relinquo. Porro hinc talem elicio Canonem.

A dato numero aufer quadratum quemlibet, residuum diuide per sextuplum lateris illius, quotiens auctus eodem latere, erit latus quæsiti quadrati: eiusdem verò quotientis quadruplum erit altera quæsitarum partium.

Moneo demum, etiam eodem modo facta positione quæsiti quadrati, ipsarum partium positiones variari posse. Nam posito quadrato 1 Q. + 2 N. + 1. sicut alteram partium Diophantus posuit 4 N. qua detracta à quadrato posito, remanet quadratus 1 Q. − 2 N. + 1. sic & aliam ponere potuisset 6 N. − 3. vel 8 N. − 8. &c. quibus ab eodem quadrato detractis remanent quadrati 1 Q. − 4 N. + 4. & 1 Q. − 6 N. + 9. Ita si ponas quæsitas partes 4 N. & 6 N. − 3. fiet horum summa 10 N. − 3. æqualis 10. & erit 1 N. $\frac{13}{10}$. & quæsitæ partes $\frac{26}{5}$ & $\frac{24}{5}$. latus quadrati $\frac{23}{10}$. Qua ratione operando, necesse non est in quadrato quæsito reperiri plures vnitates quàm in dato numero. Nam ponatur quadratus quæsitus 1 Q. + 8. N. + 16. & ponantur partes quæsitæ 16 N. & 18 N. − 9. nam his ab exposito quadrato detractis, remanent quadrati 1 Q. − 8 N. + 16. & 1 Q. − 10 N. + 25. Partium summa est 34 N. − 9. æqualis 10. & fit 1 N. $\frac{19}{34}$. sunt ergo partes quæsitæ $\frac{304}{34}$ $\frac{36}{34}$. latus verò quadrati $\frac{155}{34}$.

QVÆSTIO XXIV.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, qui vtralibet diuisi parte assumpta faciat quadratum. Esto datus 20. Ponatur quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Huic siue addas 2 N. + 3. siue 4 N. + 8. fit quadratus. Statuatur ergo primus 2 N. + 3. Secundus 4 N. + 8. Erit vtriusque summa 6 N. + 11. Hoc æquatur 20. & fit 1 N. $1\frac{1}{2}$. Erit itaque primus 6. Secundus 14. Quadratus au-

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμοὺς δύο, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον ὃς προσλαβὼν ἑκάτερον τῶν διῃρημένων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο κ̄. καὶ τετάχθω ὁ τετράγωνος δʸ ᾱ. ςς β̄. μο ᾱ. τούτῳ δὲ ἐὰν προστεθῶσιν ςς β̄. μο γ̄. ἐστι τετράγωνος. ἀλλὰ μὴν καὶ ἐὰν προστεθῶσιν ςς δ̄. μο η̄. [τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον ςς β̄ μο γ̄. τὸν δὲ δεύτερον ςς δ̄. μο η̄] συναμφότερος ἄρα ἔσται ςς ϛ̄ μο ια [ταῦτα ἴσα μο κ. καὶ γίνεται ὁ ς ᾱ. α∠.] ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τῶν διῃρημένων μο ϛ. ὁ δὲ δεύτερος μο ιδ. ὁ δὲ

τετράγωνος μ° ϛ̄ α^ς. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

tem 6 $\frac{1}{4}$. & demonſtratio eſt euidens.

IN QVAESTIONEM XXIV.

EADEM eſt hæc quæſtio cum decima quinta ſecundi, ſed operatio aliquantulum diuerſa. Poſitio quadrati variari poteſt infinitis modis, dummodo partes dati numeri ſic ponantur, vt vnitates in iis contentæ ſimul ſumptæ minores ſint dato numero. Pro partibus etiam dati numeri variæ fieri poſſunt poſitiones, ſed cum eadem cautione. Denique Canon ad decimam quintam traditus, ex huius etiam operatione formari poterat.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ
ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ Δ.

DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBER QVARTVS.

QVÆSTIO I.

DATVM numerum diuidere in duos cubos, quorum laterum ſumma data ſit. Oporteat numerum 370. diuidere in duos cubos, quorum latera faciant 10. Ponatur prioris cubi latus 1 N. + 5. hoc eſt dimidium ſummæ laterum. Relinquitur ergo alterius cubi latus 5 − 1 N. Ipſi autem cubi erunt ſimul 30 Q. + 250. Hæc æquantur 370. dato ſcilicet numero, & fit 1 N. 2. Ad poſitiones. Erit prioris cubi latus 7. ſecundi 3. Ipſi autem cubi 343. & 27.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο κύβους ὧν αἱ πλευραὶ εἰσὶ δοθεῖσαι. ἔστω δὴ τὸν τ̄ο̄ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο κύβους, ὧν αἱ πλευραὶ μ° ῑ. τετάχθω ἡ τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς̄ ᾱ μ° ε̄. τουτέστι τὸ ἥμισυ τῶν πλευρῶν. λοιπὸν ἄρα ἡ τοῦ ἑτέρου κύβου πλευρὰ ἔσται μ° ε̄ ⋔ ς̄ ᾱ. αὐτοὶ ἔσονται οἱ κύβοι ΔΥ λ̄ μ° σ̄ν̄. ταῦτα ἴσα μ° τ̄ο̄. τουτέστι τῷ δοθέντι, καὶ γίνεται ὁ ς μ° β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἡ τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ μ° ζ̄. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ° γ̄. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὁ μὲν πρῶτος τμγ̄. ὁ δὲ δεύτερος κζ̄.

IN IV. LIBRVM DIOPHANTI COMMENTARII.

IN QVAESTIONEM PRIMAM.

BINOMIORVM 1 N. + 5. & 5 − 1 N. cubos ſumit Xilander modo communi, ſumendo ſcilicet prius eorum quadratos, & eos ducendo in ipſa binomia. Verùm compendioſius erit, huiuſmodi binomiorum cubos ſumere per vigeſimam ſecundi poriſmatum. Qua oſtenſum eſt cubum totius æquari

cubis partium, & productis ter ex quadrato cuiuslibet in alterum: ita si velis cubum ipsius 1 N. + 5. sumes partium cubos, puta 1 C. & 125. Tum duces ter quadratum primæ partis in secundam, fient 15 Q. Denique duces ter quadratum secundæ partis in primam, fient 75 N. Quamobrem erit cubus totus 1 C. + 15 Q. + 75 N. + 125. Eadem arte inuenies cubum residui 5 – 1 N. nimirum 125 + 15 Q. – 75 N. – 1 C. Vbi animaduersione dignum est in binomij, & in residui cubis duas semper species eodem signo, duas verò contrario affici. Nam partis quæ in vtroque latere afficitur signo + cubus etiam idem signum retinet vt in hypothesi 125. At partis affectæ signo – cubus etiam idem signum habet in cubo residui, puta in 1 C. Productus verò ter ex parte affecta signo + in quadratum alterius, idem retinet signum, puta 15 Q. At productus ter ex parte affecta signo – in quadratum alterius, habet etiam signum – in cubo residui, nimirum 75 N. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiusmodi Canon.

Aufer cubum summæ laterum à quadruplo summæ cuborum, residuum diuide per triplum summæ laterum, orietur quadratus interualli laterum.

Habens itaque summam numerorum, & eorum interuallum, inuenies numeros per primam primi, sed & alium non deteriorem Canonem elicere possumus ex decima nona secundi porismatum. Nimirum.

Aufer summam cuborum à cubo summę laterum, residuum diuide per triplum summæ laterum, orietur planus sub lateribus.

Habens autem summam numerorum, & productum multiplicationis eorundem, inuenies Numeros per trigesimam primi.

Denique tam ex operatione Diophanti, quàm ex priore Canone colligitur huic, quæstioni hanc conditionem debere adiici.

Oporret quadruplũ summæ cuborum, multarũ cubo summæ laterum, diuisum per triplum summæ laterum, quotientem dare quadratũ.

QVÆSTIO II.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ποιῇ δοθέντα [ἀριθμὸν,] καὶ ἔτι ἡ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχή. ἔστω δὲ τὴν μὲν ὑπεροχὴν αὐτῶν ποιεῖν μ° ς̄. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων μ° φδ̄. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ς° ᾱ μ° γ̄ τοῦ δὲ ἐλάσσονος ς° ᾱ ⋔ μ° γ̄. καὶ μένει ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μ° ς̄. λοιπὸν δεῖ τῶν κύβων τὴν ὑπεροχὴν εἶναι μ° φδ̄. ἀλλ' ἡ τῶν κύβων ὑπεροχή ἐστι δ̄ ιη̄ μ° νδ̄. ταῦτα ἴσα μ° φδ̄. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° ε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἡ μὲν τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ἔσται μ° η̄. ἡ δὲ τοῦ ἐλάσσονος μ° β̄. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι ὃς μὲν φιβ̄. ὃς δὲ η̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

Inuenire duos numeros, vt illorum interuallum datum faciat numerum, & cuborum quoque ab ipsis ortorum sit quod præscribitur interuallum. Esto interuallum numerorum 6. interuallum verò cuborum 504. Ponatur rursus maioris cubi latus 1 N. + 3. minoris verò 1 N. – 3. & manet illorum interuallum 6. Superest vt cuborum interuallum sit 504. sed cuborum interuallum est 18 Q. + 54. Hæc ergo æquantur 504. & fit 1 N. 5. Ad positiones. Erit maioris cubi latus 8. minoris verò 2. Ipsi autem cubi 512. & 8. & euidens est demonstratio.

IN QVAESTIONEM II.

Hîc ex operatione Diophanti eliciemus huiusmodi Canonem.

Diuide quadruplum interualli Cuborum multatum cubo interualli laterum, per triplum interualli laterum, orietur quadratus summæ laterum.

Cùm autem habueris summam numerorum & eorum interuallum, inuenies ipsos numeros per primam primi sed & alium Canonem non deteriorem eliciemus ex vigesima prima secundi porismatum, nimirum.

Diuide interuallum cuborum multatum cubo interualli laterum, per triplum interualli laterum, orietur planus sub lateribus.

Porro cùm habueris interuallum numerorum, & productum eorum mulplicatione, inuenies ipsos numeros per trigesimam tertiam primi. Colliges etiam tam ex operatione Diophanti quàm ex priore Canone, huiusmodi conditionem huic quæstioni præscribi debere.

Oportet quadruplum interualli Cuborum multatum cubo interualli laterum, diuisum per triplum interualli laterum, quotientem dare quadratum.

Quæstiones etiam aliquot hîc desiderantur ad hanc materiam pertinentes, quas subiicere non grauabor.

QVAESTIO PRIMA.

Datis duobus cubis, inuenire duos alios, quorum summa æqualis sit datorum interuallo. Oportet autem duplum minoris cubi non superare maiorem.

Sint dati cubi 8. & 1. quorũ interuallum 7. Oportet igitur diuidere 7. in duos cubos. Esto latus vnius, latus maioris datorum cuborum − 1 N. puta 2 − 1 N. & fingatur alterius latus à certo Numerorum numero − latere minoris cubi, dum talis sit numerus Numerorum, vt fiat diuidendo quadratum maioris lateris per quadratum minoris. Esto itaque latus secundi cubi 4 N. − 1. Est ergo summa cuborum 7 + 63 C. − 42 Q. æqualis 7. & fit 1 N. $\frac{2}{3}$. suntque latera quæsitorum cuborum $\frac{4}{3}$ & $\frac{5}{3}$. ipsi cubi $\frac{64}{27}$. $\frac{125}{27}$.

Aliter figatur latus vnius quæsitorum cuborum 1 N. − latere minoris datorum, puta 1 N. − 1. Alterius verò latus ponatur latus maioris cubi − tot Numeris, quot fiũt diuidendo quadratum minoris lateris per quadratum maioris, ponatur itaque 2 − $\frac{1}{4}$ N. fiet summa Cuborum 7 + $\frac{63}{64}$ C. − $\frac{21}{8}$ Q. æqualis 7. & fit 1 N. 2 $\frac{2}{3}$. suntque cubi quæsiti qui prius. Hîc moneo in tyronum gratiam ingeniosè fingi cuborum latera, vt maneat tandem æquatio inter cubos & quadratos. Idcirco statuitur in vno laterum fictiorum maius datorum laterum cum signo +. & in altero latere fictitio ponitur minus datorum laterum cum signo − vt facta additione cuborum, maneant tantùm vnitates 7. quæ aboleantur per æqualem vnitatum numerum, qui est ex alia parte, æquationis. Deinde tales vtrobique ponuntur numeri Numerorum vt in vno cubo totidem inueniantur Numeri cum signo + quot reperiuntur in alio, cum signo −. vt his etiam per additionem se mutuo elidentibus, maneat tandem æquatio inter cubos & quadratos, cùm quadrati ob signum − adiunctum transeant in aliam æquationis partem.

Ex vtraque autem operatione formatur huiusmodi Canon.

Vtrumque datorum cuborum ducito ter in latus alterius, productos diuide per summam cuborum, à maiore quotiente aufer minus latus, & minorem quotientem auferà maiore latere, relinquentur cuborum quæsitorum latera.

Hinc conditionis adiectæ ratio deduci potest. Nam si maior cubus ad minorem

sit in duplatatione, vel etiam in minore, non posse perfici quod iubet hic Canon, sic demonstratur. Sint cubi A minor, & B duplus illius, quorum latera C D. ductoque A in D ter, fiat E. quo diuiso per F summam cuborum A B. fit quotiens G. Ergo per hunc Canonem, vt habeamus latus vnius quæsitorum cuborum, oportet auferre G ab ipso D. Sed hac subtractione nil relinqui sic probatur. Quia B est duplus ipsius A. patet summam ipsorum A B, puta F triplam esse ipsius A. At E est triplum producti ex A in D. Cæterùm idem quotiens G fiet siue E diuidatur per F. siue triens ipsius E per trientem ipsius F. diuidi concipiatur. Sed diuidendo productum ex A in D. per A. fit quotiens D. igitur ipsi D G. sunt æquales, ac proinde auferendo G ab ipso D nil remanet pro latere vnius quæsitorum Cuborum. Quod erat propositum. Multo minus perfici poterit quod iubet Canon, si B ponatur minor duplo ipsius A, tunc enim G maior esse ostendetur quàm D, ac proinde subtractio nullo modo perfici poterit. Si enim B minor est duplo ipsius A. erit & F minor triplo ipsius A. Quare cùm triens ipsius E nempe productus ex A in D. diuidetur per trientem F qui minor erit quàm A quotiens vtique puta G. maior erit ipso D. Nam si productus ex A in D. per A. diuideretur, fieret quotiens D, Quare si idem productus diuidatur per numerum minorem quàm A, fiet vtique quotiens maior quàm D. Quare patet propositum.

A 1. B 2. C 1. D ℞ C. 2.
E ℞ C. 54. F 3. G ℞ C. 2.

Hinc quoque pendet modus inueniendi tres cubos, qui simul additi cubum efficiant, quod fit hac arte.

Sume duos cubos quorum maior superet duplum minoris, & ducito maius latus in summum cuborum, fiet latus cubi summam trium æquantis. Ducito minus latus in summam cuborum. Itemque maius latus in suum cubum multatum duplo minoris cubi. Ac denique minùs latus in duplum maioris cubi multatum minore cubo, fient latera trium quæsitorum cuborum.

Ista pluribus explicare operæpretium fuit, quoniam hæc quæstio, tanquam porisma est ad decimam nonam quinti, vt suo loco docebimus.

QVAESTIO SECVNDA.

Datis duobus cubis, inuenire duos alios, quorum differentia æquet summam datorum.

Sint dati 8. & 1. oporteat inuenire duos alios cubos, quorum interuallum sit 9. Ponatur latus vnius 2 + 1 N. alterius verò 4 N. − 1. ob causas in præcedente explicatas. Erit igitur Cuborum interuallum 9 + 54 Q. − 63 C. æqualis 9. & fiet 1 N. $\frac{6}{7}$. Sunt ergo latera cuborum $\frac{20}{7}$. & $\frac{17}{7}$. Ipsi cubi $\frac{8000}{343}$ & $\frac{4913}{343}$.

Aliter ponatur latus vnius cubi 1 N. − 1. alterius verò 2 − $\frac{1}{4}$ N. erit interuallum cuborum 9 + 3 $\frac{3}{8}$ Q. − $\frac{63}{64}$ C. æqualis 9. vnde fit 1 N. $\frac{24}{7}$. suntque cubi qui prius. Ex vtraque operatione elicitur huiusmodi Canon.

Vtrumque datorum Cuborum ducito ter in latus alterius, productos diuide per interuallum cuborum, & minori quotienti adde maius latus. Atque à maiore quotiente aufer minus latus, summa & residuum exhibebunt quæsitorum latera cuborum.

Hinc etiam alius colligitur modus inueniendi tres cubos, quorum summa cubum faciat, qui talis est.

Sume duos quosuis numeros, & ducito maiorem in suum cubum auctum duplo minoris cubi, fiet latus cubi æquantis summam trium. Rursus ducito eundem maiorem numerum in interuallum cuborum. Itemque ducito minorem numerum, tum in duplum maioris cubi auctum cubo minore: tum in cuborum interuallum, fient latera trium quæsitorum cuborum.

Cæterùm moneo inuentis semel tribus cubis, siue per hanc, siue per præcedentem, quorum

quorum summa cubum faciat, si eorum latera sigillatim per quemlibet numerum vel multiplicentur vel diuidantur, fore vt & productorum & quotientum cubi idem præstent. Quod facile est demonstrare ex eo' quod cubi sunt in triplicata ratione la- 12. octaui.
terum, vnde sequitur numerorum proportionalium cubos esse proportionales, & propositum nullo negotio concluditur. Ita cùm per priorem regulam inuenti sunt cubi à lateribus 9. 12. 15. qui æquantur cubo à latere 18. si singula latera diuidantur per 3. fient rursus latera 3. 4. 5. quorum cubi simul æquabuntur cubo ipsius 6.

QVAESTIO TERTIA.

Datis duobus cubis, inuenire alios duos, quorum differentia æquet datorum differentiam. Oportet autem duplum minoris excedere maiorem.

Sint dati cubi 64. & 125. quorum differentia 61. & quærendi sint alij duo cubi, quorum itidem interuallum sit 61. Ponatur vnius latus 1 N. – latere minoris cubi, puta 1 N. – 4. Et ponatur latus alterius tot Numerorum quot sunt vnitates in quotiente diuisionis quadrati à minore latere per quadratum maioris – latere maioris cubi. Sit ergo huiusmodi latus $\frac{16}{25}$ N. – 5. Cuborum interuallum est $\frac{11529}{15625}$ C. – $\frac{3660}{625}$ Q. + 61. quod æquatur 61. & fit 1 N. $\frac{57187500}{7205625}$ seu in minimis $\frac{500}{63}$. Sunt igitur latera cuborum $\frac{248}{63}$ & $\frac{5}{63}$. Ipsi verò cubi $\frac{15252992}{250047}$ & $\frac{125}{250047}$ quorum interuallum $\frac{15252867}{250047}$ seu 61. vt postulabatur.

Aliter. Ponatur latus vnius cubi 1 N. – 5. alterius verò $\frac{25}{16}$ N. – 4. & eadem reperietur solutio. Quamobrem ex vtraque operatione hic formatur Canon.

Productum ex vtroque cubo ter in latus alterius diuide per summam cuborum. A maiore quotiente aufer minus latus, à minore quotiente aufer maius latus, relinquentur latera quæsitorum cuborum.

Porrò inde conditionis adiectæ ratio patet argumentando eodem prorsus modo quo ad primam istarum factum est. Nam similiter ostendetur si maior cubus sit duplus minoris, minorem quotientem æquari maiori lateri, & si maior cubus minoris sit plus quàm duplus demonstrabitur minorem quotientem, minorem esse maiore latere, ac proinde subtractionem huius ab illo fieri non posse.

Hinc etiam colligitur modus inueniendi quatuor cubos, vt bini binis sint æquales. nimirum.

Sume duos numeros, ita vt duplum cubi minoris superet maioris cubum. Dein ducito minorem numerum tum in duplum cubi maioris multatum cubo minore, tum in summam cuborum, fient latera duorum cuborum quæsitorum. Rursus ducito maiorem numerum, tum in duplum minoris cubi multatum cubo maiore, tum in summam cuborum, fient reliquorum cuborum latera.

Ita si sumas numeros 5. & 4. fient cubi à lateribus 744. 756. æquales cubis à lateribus 945. & 15. Et diuidendo omnia latera per 3. erunt cubi à lateribus 248. & 252. æquales cubis à lateribus 315. & 5.

QVAESTIO QVARTA.

Inuenire duos numeros, vt summa cuborum ab ipsis ortorum, & productus eorum multiplicatione, datos conficiant numeros. Oportet autem vt à quadrato summæ cuborum, auferendo quadruplum cubi producti multiplicationis remaneat quadratus.

Esto summa cuborum 72. productus 8. Pone alterum cuborum 36 + 1 N. alterum 36 – 1 N. Quia igitur productus ex mutuo ductu duorum cuborum æquatur cubo plani sub lateribus, si ducas 36 + 1 N. in 36 – 1 N. fiet 1296 – 1 Q. æqualis 512. Ac proinde 1 N. est 28. suntque cubi quæsiti 64. & 8. & ipsa latera 4. & 2. Hinc fit Canon.

A quadrato semissis summæ cuborum aufer cubum producti, residui latus quadratum adde & adime semissis summæ cuborum, habebis cubos quæsitos,

Vel etiam.

A quadrato summa cuborum aufer quadruplum cubi producti, residui latus quadratum adde & adime summæ cuborum, aggregati & residui semisses quæsitos exhibebunt cubos.

Vnde patet conditionem propositioni adiectam non omnino sufficere, vt solutio contingat rationalis. Sed oportet vt à quadrato summæ cuborum auferendo quadruplum cubi à producto, remaneat quadratus, cuius latus addendo & adimendo summæ cuborum, aggregati & residui semisses sint cubi numeri.

QVAESTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros, vt interuallum cuborum ab ipsis ortorum, & productus eorum multiplicatione datos conficiant numeros. Oportet autem vt quadrato interualli addendo quadruplum cubi producti, quadratus fiat.

Esto interuallum cuborum 56. productus 8. Ponatur alter cuborum 1 N. + 28. alter 1 N. – 28. Ergo productus eorum multiplicatione 1 Q. – 784. æquatur cubo ipsius 8. puta 512. & fit 1 N. 36. Sunt ergo cubi quæsiti 64. & 8. vt prius. Hinc fit Canon.

Quadrato semissis interualli cuborum adde cubum producti, summæ latus quadratum adde & adime semissis interualli cuborum, fient cubi quæsiti.

Vel etiam.

Quadrato interualli cuborum adde quadruplum cubi producti, summæ latus quadratum adde & adime interuallo cuborum, aggregati & residui semisses sunt cubi quæsiti.

Hîc quoque conditio adiecta non sufficit, vt solutio sit omnino rationalis. Sed oportet vt quadrato interualli cuborum, addendo quadruplum cubi producti, fiat quadratus cuius latus addendo & adimendo interuallo cuborum, aggregati & residui semisses sint cubi numeri.

Porrò ex nonnullis harum quæstionum deducuntur Regulæ Algebræ de cubo affecto sub latere, vt abundè docuit Vieta noster libro de Recognitione æquationum.

QVÆSTIO III.

ΕΠΙ τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ πλευρὰν πολλαπλασιάσαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὴν μὲν πλευρὰν κύβον, τὸν δὲ τετράγωνον πλευρὰν τοῦ κύβου. τετάχθω ὁ μὲν τετράγωνος Δ^Υ α. ἡ ἄρα πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ς̄ εἷς, ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς ἔστω μ° κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω ἐν ς^{ου} η. ἐπὶ μὲν οὖν τὰς Δ^Υ α. πολλαπλασιάσαντες, εὑρίσκομεν ςς η. ἐπὶ δὲ τὸν ς α. πολλαπλασιάσαντες εὑρίσκομεν μ° η. θέλομεν δὴ τοὺς ςς η. κυ-

IN quadratum numerum, & in latus eius eundem multiplicare numerum, & facere ex latere quidem, cubum; ex quadrato autem, latus cubi. Ponatur quadratus 1 Q. Erit igitur latus illius 1 N. Qui in hos ducendus est, sit vnitatum cubicatum quotcunque per 1 N. diuisatum, esto $\frac{8}{N}$. Hunc igitur ducentes in 1 Q. inueniemus 8 N. At ducentes in 1 N. inueniemus 8. volumus itaque 8 N. esse la-

tus cubicum de 8. Proinde 2. æquantur 8 N. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Ad positiones. Erit quidem quadratus $\frac{1}{16}$. eius latus $\frac{1}{4}$. Qui in illos ducetur erit 32. Si enim 1 N. est $\frac{1}{4}$. vtrique $\frac{1}{16}$. est 4. & demonstratio euidens.

κυβικὴν ἐστὶ πλευρὰν τῶν μο ῆ. μονάδες ἄρα β̄ ἴσαι ςς ῆ. * ὃ γίνεται ὁ ς β̄. ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ς λβ̄ μο λβ̄. ἐὰν δὲ θελήσωμεν μο μὴ ἐπιτιθέναι, εὑρήσομεν ςς ῆ ἴσους μο β̄. * καὶ γίνεται ὁ ς ᾱ ^δ^. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος ᾱ ^ις^. ἡ δὲ πλευρὰ ᾱ ^δ^. ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ὁ λβ̄. εἰ γὰρ ὁ ς ἐστι ᾱ ^δ^. τὸ δὲ ἀριθμοστὸν ἐστι μο δ̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM III.

QVAESTIONIS huius tractationem non percepit Xilander, eò quod signum Numeri malè hîc insutum putauit, non videns numerum qui ducendus est in quadratum, & in eius latus non esse simpliciter vnitates 8. sed $\frac{8}{16}$. Allucinatus autem est Xilander, & hîc & vbicunque ferè fractiones Numericas adhibuit Diophantus, quia (vt iam monuimus ad duodecimam tertij) huiusmodi fractiones in textu Græco passim ambiguè exprimuntur, vt ex hoc quoque loco colligere est. Nam legitur in manu exarato codice, ὁ πολλαπλασιαζόμενος ιᾱ. ς τῶν κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω δὲ ιϛ ῆ. quæ more nostro emendauimus sic, ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμοστῶν μο κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω δὲ η^ις^. Benè autem vidit idem Xilander, vt adulterina expungenda esse verba illa. καὶ γίνεται ὁ ς β̄. ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ς. λβ̄ μο λβ̄ ἐὰν δὲ θελήσωμεν μο μὴ ἐπιτιθέναι, εὑρήσομεν ςς ῆ ἴσους μο β̄. quæ idcirco asteriscis inclusimus. Cæterùm emendato textu, vt fecimus in nostra versione, operatio Diophanti facilis est & perspicua. Vnde huiusmodi Canon elicitur.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per suum cubum, orietur latus quæsiti quadrati. Numerus autem in vtrumque ducendus, est quadratocubus sumpti initio numeri.

Hîc etiam desiderari videtur huiusmodi quæstio.

In quadratum numerum & in latus eius, multiplicare eundem numerum, & facere ex quadrato cubum, ex latere latus eiusdem cubi.

Statuatur quadratus 1 Q. erit latus eius 1 N. Qui autem in hos ducitur, esto quilibet Numerorum numerus cubicus, puta 8 N. Eum si in 1 Q. ducas fient 8 C. si in 1 N. fient 8 Q. Debent ergo 8 Q. esse latus cubicum cubi 8 C. id autem est 2 N. Igitur 2 N. æquantur 8 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Ad positiones. Quadratus est $\frac{1}{16}$. latus eius $\frac{1}{4}$. Is qui in vtrumque ducitur 2. Hinc formatur huiusmodi Canon.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per suum cubum, orietur latus quadrati quæsiti. Numerus autem in vtrumque ducendus, est sumptus initio Numerus.

Simili artificio soluemus quæstiones sequentes.

QVAESTIO PRIMA.

In cubum & in eius latus multiplicare eundem nimirum, & facere ex cubo quadratoquadratum, ex latere latus quadratoquadrati.

Sit cubus 1 C. latus eius 1 N. Numerus in vtrumque ducendus sit vniratum quotlibet, puta 2. Igitur 2 N. erunt latus quadratoquadraticum de 2 C. ac proinde 16 Q Q. æquabuntur 2 C. & fiet 1 N. $\frac{1}{8}$. eruntque quæsiti numeri $\frac{1}{512}$. $\frac{1}{8}$. 2.

Et sic inuenietur numerus qui ductus in quadratoquadratum, & in latus eius faciat ex quadratoquadrato quadratocubum, & ex latere latus quadratocubi. Ac demum

inuenietur numerus qui ductus in quadratocubum & in latus eius, faciat ex quadratocubo cubocubum, & ex latere latus cubocubi. Vnde fit Canon vniuersalis.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per gradum ipsius, similem ei qui postulatur fieri, orietur latus quæsitæ potestatis. Numerus autem in vtrumque ducendus, erit sumptus numerus.

QVAESTIO SECVNDA.

In cubum & in eius latus multiplicare eundem numerum, & facere ex latere quadratoquadratum, ex cubo latus quadratoquadrati.

Esto cubus 1 C. latus eius 1 N. Numerus autem in vtrumque ducendus sit fractio Numerica vnitatum quadratocubocubicarum, puta $\frac{256}{1 N}$. fient ergo ex multiplicatione 256 Q. & 256. & ille huius esse debet latus quadratoquadraticum, quare 256 Q. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{8}$ quæsitum latus, igitur cubus est $\frac{1}{512}$. Numerus in vtrumque ducendus 2048. sic quoque inuenietur Numerus qui ductus in quadratoquadratum & in latus eius, faciat ex latere quadratocubum, & ex quadratoquadrato latus quadratocubi. Ac denique reperietur numerus qui ductus in quadratocubum, & in latus eius, faciat ex latere cubocubum, & ex quadratocubo latus cubocubi.

QVÆSTIO IV.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΩ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά. ἔστω ὁ μὲν τετράγωνος δυ α. ἡ ἄρα πλευρὰ ἔσται ςʺ α. ὁ δὲ προστιθέμενος ἔστω δυνάμεων τοσούτων, ἵνα μετὰ δυ α. ποιῇ τετράγωνον, ἔστω δυ γ. αὗται προστεθεῖσαι τῇ μὲν δυ α. ποιοῦσι τετράγωνον [τὸν δυ δ.] τῷ δὲ ςʺ α. ποιοῦσι δυ γ. ςʺ α. ταῦτα ἴσα τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τῶν δυ δ. τουτέστι ςςοῖς δυσί. καὶ γίνεται ὁ ςʺ α γˣ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος α θˣ. ἡ δὲ πλευρὰ α γˣ. ὁ δὲ προστιθέμενος γ θˣ.

QVADRATO & lateri eius eundem adiicere numerum, & eadem facere. Esto quadratus 1 Q. ergo latus erit 1 N. Addendus autem esto tot quadratorum, vt additus ad 1 Q. faciat quadratum esto 3 Q. Is adiectus ad 1 Q. facit quadratum 4 Q. Additus autem ad 1 N. facit 3 Q. + 1 N. Hæc æquantur lateri quadrati 4 Q. hoc est 2 N. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Ad hypostases. Erit quadratus $\frac{1}{9}$. latus eius $\frac{1}{3}$ Addendus $\frac{3}{9}$.

IN QVAESTIONEM IV.

HIC ποιεῖν τὰ αὐτὰ nil aliud est quàm quadrato & lateri eius talem addere numerum, vt hac additione fiant rursus quadratus & latus eius. Cætera sunt perspicua, & ex operatione formatur huiusmodi Canon.

Duorum quorumlibet numerorum interuallum diuide per interuallum quadratorum, quotientem ducito in minorem numerum, fiet latus quæsiti quadrati. Eiusdem quotientis quadratum ducito in quadratorum interuallum, fiet addendus numerus.

QVÆSTIO V.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΩ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω

QVADRATO & lateri addere eundem numerum & eadem facere ordine inuer-

so. Esto quadratus 1 Q. latus ergo erit 1 N. Addendus autem vt ex latere quadratum faciat, esto aliquot quadratorum quadrato numero, cum defectu Numerorum qui sunt in latere prioris quadrati; esto itaque 4 Q. − 1 N. & si adiiciatur quadrato fit 5 Q. − 1 N. Hæc æquantur 2 N. lateri scilicet facti quadrati ex priori additione, & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. Ad positiones. Erit quadratus $\frac{9}{25}$. latus autem $\frac{3}{5}$. Addendus $\frac{21}{25}$.

ὁ τετράγωνος δυ α. ἡ ἄρα πλευρὰ ἔσται ϛ α. ὁ δὲ προστιθέμενος, ἵνα τὴν πλευρὰν ποιῇ τετράγωνον. δυνάμεων τετραγωνικῶν ⋔ ἀριθμῶν τῶν τετραγώνου τῆς πλευρᾶς. ἔστω δὲ δυ δ ⋔ ϛ α. [καὶ ἐὰν προστεθῇ τῷ τετραγώνῳ, γίνεται δυ ε ⋔ ϛ α. ταῦτα ἴσα ϛοῖς δυσὶ τῇ πλευρᾷ τοῦ τετραγώνου τοῦ γεγενημένου ἐκ τῆς προσθέσεως. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ^ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος θ^κε. ἡ δὲ πλευρὰ γ^ε. ὁ δὲ προστιθέμενος κα^κε.

IN QVÆSTIONEM V.

TA ἀνάπαλιν idem est quod reciprocè, seu inuerso ordine, vult enim vt quadrato & lateri addendo eundem numerum, fiat ex latere quadratus, ex quadrato latus quadrati. Operatio euidens est, & ex ea elicitur iste Canon.

Sume quadratum aliquem, & per eum vnitate auctum, diuide latus eius vnitate auctum, orietur latus quæsiti quadrati. At quæsitum quadratum ducito in quadratum initio sumptum, & à producto aufer latus quæsiti quadrati, residuum erit addendus numerus.

QVÆSTIO VI.

CVBO & quadrato adiicere eundem quadratum, & eadem facere. Esto cubus 1 C. Quadratus autem quotcunque quadratorum numero quadrato. Esto itaque 9 Q. Et quia volumus aliquem quadratum adiectis 9 Q. facere quadratum, exponamus duos numeros quorum mutuo ductu fiat 9. puta 9. & 1. Si ergo aufero 1 de 9. & residui semissem in se duco habeo 16. qui adsumpto 9. facit quadratum. Pono igitur addendum quadratum 16 Q. Et sane si addatur ad 9 Q. facit quadratum.

ΚΥΒΩ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά. ἔστω ὁ μὲν κύβος κύβου α. ὁ δὲ τετράγωνος δυνάμεων ὅσων δή ποτε τετραγωνικῶν. ἔστω δὲ δυ θ. καὶ ἐπεὶ θέλομεν τετράγωνόν τινα μετὰ δυ θ ποιεῖν τετράγωνον. ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ἐστι μο θ. ἔστω δὲ μο α καὶ μο θ. ἐὰν ἀφέλω ἀπὸ τῶν μο θ. τὴν μονάδα, καὶ τῶν λοιπῶν τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ πολλαπλασιάσω, ἕξω μο ιϛ. ὧν προσλαβὼν ⊕ θ ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω οὖν τὸν προστιθέμενον τετράγωνον δυ ιϛ. κἂν μὲν ταῖς δ θ προστεθῇ, γίνεται τετράγωνος.

ἐὰν δὲ τῷ κύβῳ α̅. γίνεται κύβος α̅. δ^υ ις̅. ταῦτα ἴσα κύβῳ. ἔστω τοῖς κύβοις η̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις̅ ζ^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ἔσται. ὁ μὲν κύβος δ^{ων} ͵δϟς τμγ. ὁ δὲ τετράγωνος ͵βτδ μθ. ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος ͵δϟς μθ.

si autem adiiciatur ad 1 C. fit 1 C. + 16 Q. Hæc cubo æquantur. Esto 8 C. & fit 1 N. $\frac{16}{7}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{4096}{343}$. Quadratus $\frac{2304}{49}$. Addendus autem ipsis quadratus $\frac{4096}{49}$.

IN QVAESTIONEM VI.

MODVS quo hic inuenit Diophantus quadratum qui ad 9. additus quadratum efficiat, idem est prorsus cum Canone vltimo ad vndecimam secundi tradito. Cæterùm positiones quadrupliciter variari possunt.

Primò enim cubus quæsitus statui potest quilibet cuborum numerus cubicus, puta 1 C. 8 C. 27 C. &c.

Secundò quadratus quæsitus poni potest quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 1 Q. 4 Q. 9 Q. &c.

Tertiò addendus quadratus etiam infinitis modis variari potest, nam verbi gratia in hypothesi Diophanti, per vndecimam secundi infiniti quadrati reperiri poterant, qui ad 9. additi facerent quadratum.

Denique vltima æquatio institui potest cum quolibet cuborum numero cubico maiore quàm cubus initio sumptus. v. g. 1 C. + 16 Q. æquari possunt 8 C. 27 C. 64 C. vel cuilibet cuborum numero cubico maiori quàm 1.

QVÆSTIO VII.

ΚΥΒΩ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ μὲν κύβος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος, ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος ὁ τρίτος. καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν προστιθέμενον τετράγωνον τὸν τρίτον, τῷ τετραγώνῳ τῷ δευτέρῳ, ποιεῖν κύβον. ποιείτω κύβον τὸν πρῶτον, ὥστε ὁ πρῶτος ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου τῷ τρίτῳ, τουτέστι τετραγώνῳ. ὁ γὰρ τρίτος ἐστὶ τετράγωνος. οἵους δὲ ἂν ἐκθῶμαι δύο ἀριθμούς, οἱ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι προσλαβόντες τὸν δὶς ὑπ' αὐτῶν ποιοῦσι τετράγωνον. ὀφείλω οὖν ἐκθέμενος δύο ἀριθμούς, τὸν μὲν ἀπ' αὐτῶν τάσσειν τὸν πρῶτον, ἐπεὶ ὁ πρῶτος τοῖς δυσὶ τετραγώνοις ἴσος ἐστί,

CVBO & quadrato addere eundem quadratum, & eadem facere ordine inuerso. Esto cubus, primus. Quadratus, secundus. Addendus autem quadratus, tertius. Et quia volo addendum quadratum, nempe tertium, additum quadrato, nempe secundo, facere cubum: faciat cubum, nempe primum; Ita vt primus superet secundum, tertio, nimirum quadrato, cùm tertius quadratus sit. Iam quoscunq; duos numeros exposuero, eorum quadrati adiecto duplo producti multiplicationis eorum, quadratum faciunt. Debeo e go expositis duobus numeris ponete pro primo summam quadratorum (quia primus æqualis est duobus quadratis, quę

ſito, & addendo; qui ſunt ſecundus & tertius) duplum autem producti multiplicationis, pro tertio. Atqui tertius debet eſſe quadratus, quare & duplum producti multiplicationis, quadratum eſſe oportet. Ponatur ergo alter 1 N. alter 2 N. vt duplum producti ſit quadratus. Sumens igitur ſummam quadratorum, ſtatuo primum 5 Q. Tertium verò duplum producti multiplicationis nempe 4 Q. vnde relinquitur ſecundus 1 Q. (quia is vnà cum tertio æquatur primo) ſupereſt vt primus ſit cubus. Proinde 5 Q. æquantur 1 C. & fit 1 N. 5. Ad poſitiones. Erit cubus ſeu primus 125. Quadratus ſeu ſecundus 25. Addendus autem quadratus, ſeu tertius 100. & manifeſta eſt demonſtratio.

τῷ ζητουμένῳ καὶ τῷ προστεθειμένῳ τῷ τρίτῳ καὶ τῷ δευτέρῳ. τὸν δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν τὸν τρίτον, ἀλλὰ ὁ τρίτος τετράγωνος. ὥστε καὶ ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ἐστι τετράγωνος. τετάχθω ὁ μὲν ϛ^{ος} α. ὁ δὲ ϛϛ β. ἵνα ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος. λαβὼν οὖν τὸν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις. τάσσω τὸν πρῶτον δ^υ ε. τὸν δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν τὸν τρίτον δ^υ δ. λοιπὸν ἄρα ἔσται ὁ τοῦ δευτέρου εἶναι δ^υ α. μετὰ γὰρ τοῦ τρίτου ἴσος ἐστὶ τῷ πρώτῳ. λοιπόν ἐστι τὸν πρῶτον ποιεῖν κύβον. δ^υ ἄρα ε ἴσαι κ^υ ἑνί, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κ^υ ὁ πρῶτος μ^ο ρκε. ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος κε. ὁ δὲ προστεθειμένος τετράγωνος ὁ τρίτος μ^ο ρ. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

IN QVAESTIONEM VII.

MAGNO artificio Diophantus ſuas ita inſtituit poſitiones, vt tandem æquatiò procedat inter 5 Q. & 1 C. vnde ſequitur primum numerum reperiri cubum, vt poſtulatur. Itemque ſummam ſecundi & tertij cubum conficere, quia ſcilicet fit æqualis primo. Supereſt igitur videre qua ratione reliquis propoſiti partibus ſatisfiat: Nimirum, quomodo ſecundus & tertius ſit vterque quadratus, & ſimul additi ſint æquales primo. Ac demum tertius ipſe primo additus quadratum conſtituat. Hæc autem omnia neceſſariò euenire operando cum Diophanto, ſic demonſtrabimus.

A 2. B 4.
C 20. D 4. E 16.

Sumantur duo quilibet numeri A B. ita vt duplum producti eorum E ſit quadratus numerus. Et ſumma quadratorum ab ipſis A B ſit C. At numerus quo C ſuperat E ſit D. Dico ſi C ponatur primus D ſecundus E tertius ſatisfactum eſſe omnibus propoſitæ quæſtionis partibus, illa excepta qua requiritur primum C eſſe cubum. Primò enim D E ſimul conficiunt C ex cõſtructione. Quare ſi C fiat cubus, erit & ſumma ipſorum D E cubus, vt poſtulatur. Secundò E quadratus eſt ex conſtructione, nam ſuppono tales ſumptos eſſe A B, vt duplum producti eorum E ſit quadratus, tales autem numeri quî facilè inueniantur infrà docebo. Tertiò ipſum D eſſe quadratum conſtat ex quarta ſecundi poriſmatum. Nam ex ſumma quadratorum C auferendo E duplum producti, ſupereſt D quadratus interualli laterum. Denique E additum ipſi C facere quadratum concluditur per quartam ſecundi Euclidis, quam ideo aſſumpſit Diophantus. Nam ſumma quadratorum C & duplum producti E ſimul faciunt quadratum ſummæ laterum. Quamobrem patet ex omni parte propoſitum, & reſtat tantùm, vt C cubo æquetur quod facilè fit ſupponendo ipſos C D E nota Q. inſignitos eſſe, vt ſint 20 Q. 4 Q. 16 Q. Tunc enim 20 Q. æquabuntur cuilibet cuborum numero cubico, puta 1 C. 8 C. &c. Inueniuntur autem facilè duo numeri qui bis inuicem ducti qua-

dratum faciant, si sumpto semisse cuiuslibet quadrati, quærantur duo numeri, quorum mutuo ductu is fiat. Ita Diophantus sumpto 2. semisse quadrati 4. inuenit numeros 1. & 2. quorum mutuo ductu fit 2. Et nos in superiore diagrammate sumpto 8. semisse quadrati 16. inuenimus numeros 2. & 4. quorum mutuo ductu fit 8. Poteramus etiam sumere 1. & 8. & alios infinitos mutuo ductu producentes 8.

QVÆSTIO VIII.

ΕΣΤΩ κύβος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος. ὁ δὲ προστιθέμενος τετράγωνος ὁ τρίτος. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν προστιθέμενον τετράγωνον προστεθέντα τῷ δευτέρῳ τουτέστι τετραγώνῳ ποιεῖν κύβον, ποιείτω τὸν πρῶτον. ἐπεὶ δὲ πάλιν [θέλω] τὸν πρῶτον συντεθέντα τῷ τρίτῳ ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τετραγώνους. ὧν ἡ σύνθεσις μετὰ ἑνὸς αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον. διὰ τοῦτο δὲ καὶ τοὺς δύο τετραγώνους, ἔτι προστιθέμενος τῷ δευτέρῳ, καὶ ὁ δεύτερος ποιῶσι κύβον, τουτέστι τὸν πρῶτον. τετάχθωσαν οἱ δύο τετράγωνοι, ὁ μὲν πρῶτος δυνάμεως α. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων δ. καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν μετὰ ἑνὸς αὐτῶν γίνεται δυνάμεις β μονάδες δ. ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β ⋔ μονάδων β. γίνεται ὁ τετράγωνος δυνάμεις δ μονάδες δ λεῖψει ςς η. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν δ. ὁ δὲ ις. νῦν τάσσω τὸν μὲν προστιθέμενον αὐτοῖς τετράγωνον δυνάμεων ις. τὸν δὲ δεύτερον δυνάμεων δ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται δυνάμεων κ. θέλομεν γὰρ συναμφοτέρῳ εἶναι αὐτὸν ἴσον. λοιπὸν δεῖ δυνάμεις κ ἴσας εἶναι κύβῳ ἑνί, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων κ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος η. ὁ δὲ δεύτερος ͵αχ. ὁ δὲ προστιθέμενος ͵ϛυ. τοῦτο δὲ ἀπειραχῶς δείκνυται.

ESTO cubus, primus: Quadratus, secundus: at adiiciendus quadratus, tertius. Quia igitur volo quadratum adiiciendum, additum secundo, hoc est quadrato facere cubum, faciat primum. Rursus itaque quia volo primum additum tertio, facere quadratum, id mihi oneris incumbit, vt inueniam duos quadratos, quorum summa cum altero ipsorum coniuncta quadratum exhibeat, & præterea duo quadrati addendus scilicet secundo, & ipse secundus simul faciant cubum, videlicet primum. Ponatur duo quadrati, primus quidem 1 Q. secundus 4. & summa ipsorum cum altero iuncta facit 2 Q. + 4. æqualem quadrato à latere 2 N – 2. fitque quadratus 4 Q. + 4 – 8 N. & fit 1 N. 4. Ad positiones. Erit alter 4. alter 16. Nunc ergo statuo quadratum addendum 16 Q. secundum autem 4 Q. Primus ergo erit 20 Q. quia volumus eum ambobus æqualem esse. Superest vt 20 Q. æquentur 1 C. & fit 1 N. 20. Ad positiones. Erit primus 8000. secundus 1600. tertius addendus 6400. & infinitis modis soluitur quæstio.

IN QVAESTIONEM VIII.

Eadem est hæc quæstio cum præcedente. Sed operatio paulò diuersa lemmaquod assumit Diophantus ad inueniendum duos quadratos, quorum summa adscito altero ipsorum quadratum faciat, poterat reduci ad vndecimam secundi, si propositum fuisset hoc modo. Inuenire duos quadratos, quorum interuallum sit duplum alicuius quadrati. Hoc enim idem esse manifestum est: Quia cùm summæ quadratorum addetur alter, hoc aggregatum continebit additum bis, & alterum semel. Porrò ex operatione formatur huiusmodi Canon.

Sume duos quadratos quorum summa cum altero ipsorum quadratum faciat. Horum summæ cubus est primus quæsitorum. Eiusdem summæ quadratus ductus in sumptos quadratos, dat reliquos numeros.

QVÆSTIO IX.

Cvbo & lateri eius eundem addere numerū, & eadem facere. Sit addendus numerus 1 N. latus verò cubi Numerorum quotlibet. Esto 2 N. Ergo cubus est 8 C. Iam si 1 N. addatur ad 2 N. fiunt 3 N. si ad 8 C. fit 8 C. + 1 N. hæc æquantur 27 C. Auferantur vtrinque 8 C. relinquuntur 19 C. æquales 1 N. Omnia per numerum diuidantur 19 Q. æquantur 1. & est vnitas quadratus, & si 19. numerus quadratorum quadratus esset, explicari æquatio posset. Sed 19 Q. proueniunt ab excessu quo 27 C. superant 8 C. & 27 C. est cubus à latere 3 N. At 8 C. est cubus à latere 2 N. Proinde 19 Q. facti sunt ex excessu quo cubus à 3 N. superat cubum à 2 N. Atqui 2 N. habentur ex positione, & 3 N. fiunt vnitate addita ad ipsos positionis numeros. Eò ergo res rediit, vt inueniantur duo numeri vnitate differentes, vt interuallum cuborum ab ipsis, sit quadratus numerus. Esto alter 1 N. alter 1 N. + 1. & inter-

Κυβῳ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά. ἔστω ὁ προστιθέμενος ς^ος α. ἡ δὲ τοῦ κύβου πλευρὰ ςς^ῶν ὅσων δήποτε. ἔστω ςς^ῶν β. ὁ ἄρα κύβος ἐστὶ κ^υ η. ἐὰν ἄρα ς^ος α προστεθῇ ςς^οῖς β. γίνεται ςς^οὶ γ. ἐὰν δὲ τοῖς κ^υ η. γίνεται κ^υ η. ς^ος α. ταῦτα ἴσα κ^υ κζ. ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ κ^υ η. λοιπὸν ἄρα κ^υ ιθ. ἴσοι ς^ῷ ἑνί. πάντα παρὰ ς^ον. δ^υ ἄρα ιθ. ἴσαι μ^ο α. καὶ ἔστιν ἡ μία μονὰς τετράγωνος. εἰ δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν ιθ δ^υ ἦν τετράγωνος λέλυτο ἂν ἡ ἰσότης. ἀλλ' αἱ δ^υ ιθ. ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν ἧς ὑπερέχουσι κ^υ κζ. κ^υ η. καὶ ἀλλὰ μὲν κ^υ κζ. ἀπὸ ςς^ῶν γ. κύβος εἰσίν. ἀλλὰ δὲ κ^υ η ἀπὸ ςς^ῶν β. κ^υ ἐστί. ὥστε τὰ ιθ γέγονεν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς ἧς ὑπερέχει ὁ ἀπὸ ςς^ῶν γ κύβος, τοῦ ἀπὸ ςς^ῶν β κύβου. ἀλλ' ἀλλὰ μὲν ςς^οὶ β. τῆς ὑποθέσεώς εἰσιν, ἀλλὰ δὲ τρεῖς, ἀεὶ μονάδι μείζονες τοῦ τυχόντος πλήθους τῶν τεθέντων ςς^ῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν β ἀριθμοὺς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας, ἵνα ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ μὲν ς^ος α. ὁ δὲ ς^ος α μ^ο α. καὶ ἡ ὑπερο-

χὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ἐστὶ δυ γ. ςς ϛ. μο α. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς μο α. λείψει ςς β. καὶ γίνεται ὁ ς μο ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ζ. ὁ δὲ η. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. καὶ τάσσω τὸν μὲν προστιθέμενον ς α. τὴν δὲ τοῦ κύβου πλευρὰν ςς ζ. ὁ ἄρα κύβος ἔσται κυ τμγ. καὶ ὁ ς α. προστεθεὶς ἑκατέρῳ αὐτῶν ποιεῖ, ὃν μὲν ςς η. ὃν δὲ κυ τμγ. ς α. θέλομεν οὖν ταῦτα εἶναι κύβον πλευρὰν ἔχοντα ςς η. κυ ἄρα φιβ. ἴσοι κυ τμγ. ἀριθμῷ α. καὶ γίνεται ὁ ς α ιγχ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κυ τμγ. ͵βρϟζ ἡ δὲ πλευρὰ ζ. ιγχ ὁ δὲ προστιθέμενος α ιγχ.

uallum cuborum est 3 Q. + 3 N. + 1. Hæc æquantur quadrato à latere 1 − 2 N. & fit 1 N. 7. Ad positiones. Erit alter 7. alter 8. Iam redeo ad postulata ab initio, & pono adiiciendum numerum 1 N. latus autem cubi 7 N. Igitur cubus erit 343 C. & si 1 N. vtrique adiiciatur, facit hunc quidem 8 N. illum verò 343 C. + 1 N. Volumus ergo hunc esse cubum, cuius latus sit 8 N. Quare 512 C. æquantur 343 C. + 1 N. & fit 1 N. $\frac{1}{13}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{343}{2197}$. latus autem $\frac{7}{13}$. Adiiciendus $\frac{1}{13}$.

IN QVAESTIONEM IX.

VERBA Diophanti perspicua sunt, & ad erudiendum aptissima. Cùm enim in prima operatione positionibus ad libitum factis, ad æquationem inexplicabilem deueniatur, vbi 19 Q. æquantur 1. & solutio est irrationalis, repetitis analyseos vestigiis considerat vnde 19. prouenerit, fit quippe ex interuallo cuborum 8. & 27. vnde rectè infert quærendos esse duos cubos quadrato distantes, ita vt & cuborum latera vnitate distent. Quod tamen lemma poterat etiam vniuersalius proponi, nimirum sic.

Duos cubos inuenire quorum interuallum sit quadratus Numerus, & quorum latera distent etiam quadrato numero.

Sit vnius latus 1 N. alterius 1 N. + 4. vt laterum interuallum sit quadratus numerus, erit cuborum interuallum 64 + 12 Q. + 48 N. quod æquatur quadrato. Fingatur eius latus 6 N. − 8. fiet 1 N. 6. Erunt ergo cuborum latera 6. & 10. Ipsi cubi 216. & 1000. quorum interuallum 784. quadratus à latere 28. Huius autem lemmatis ope licebit etiam variare positionem numeri adiiciendi, nam poni poterit quilibet Numerorum numerus quadratus. Verbigratia ponatur 4 N. Quærendi ergo erunt duo cubi, vt laterum interuallum sit 4. & cuborum interuallum sit quadratus numerus. Hi sunt per allatum lemma 6. & 10. Quare ponetur quæsiti cubi latus 6 N. ipse cubus 216 C. & vtrique adiiciendo 4 N. fient 10 N. & 216 C. + 4 N. quorum hic cubus esse debet, ille vero latus huius cubi. Igitur 216 C. + 4 N. æquantur 1000 C. & tandem 4 N. æquantur 784 C. & fit 1 N. $\frac{1}{14}$. Est igitur cubi quæsiti latus $\frac{3}{7}$ ipse cubus $\frac{27}{343}$. Adiiciendus verò numerus $\frac{2}{7}$ quo vtrique addito fiunt $\frac{5}{7}$ & $\frac{125}{343}$ Cubus scilicet & latus eius.

Cæterùm licebit etiam soluere huiusmodi quæstiones ad hanc materiam pertinentes.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi quadrato distent numero.

Sit data ratio dupla. Ponantur latera Cuborum 1 N. & 2 N. erunt cubi 1 C. & 8 C. quorum interuallum 7 C. æquatur quadrato. Esto is quilibet numerus Quadratorum quadratus, puta 49 Q. fiet 1 N. 7. Sunt igitur latera cuborum 7. & 14. & satisfaciunt proposito.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi distent numero quadratoquadrato.

Sit data ratio dupla. Ponantur latera cuborum 1 N. & 2 N. Erunt cubi 1 C. & 8 C. quorum interuallum 7 C. æquatur quadratoquadrato. Esto is quilibet quadratoquadratorum numerus quadratoquadratus, puta 1 Q Q. fit 1 N. 7. & sunt latera cuborum vt prius 7. & 14.

QVAESTIO TERTIA.

Inuenire duos cubos quadrato distantes, quorum latera distent cubo numero.

Sit vnius cubi latus 1 N. alterius verò 1 N. + quolibet cubocubo puta 1 N. + 64. erit cuborum interuallum 262144 + 12288 N. + 192 Q. æquale quadrato, fingatur eius latus 512 – 14 N fiet quadratus 262144 – 14336 N. + 196 Q. & fiet 1 N. 6656. Sunt igitur cuborum latera 6656. & 6720. quorum interuallum est cubus 64. Sunt autem cubi 294876348416 & 303464448000. quorum interuallum 8588099584. quadratus est à latere 92672.

Eodem artificio inuenientur duo cubi quadrato distantes, quorum latera distent cubocubo, erunt enim iidem proximè inuenti. Similiter inuenientur duo cubi quadrato distantes, quorum latera distent quadratoquadrato, si ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N. + quolibet quadratoquadrato, puta 1 N. + 16. Ac demum inuenientur duo cubi quadrato distantes quorum, latera distent quadratocubo, si ponatur vnius latus 1 N. Alterius verò 1 N. + quolibet numero quadrato simul & quadratocubo, puta 1 N. + 1024.

QVAESTIO QVARTA.

Inuenire duos cubos, quorum interuallum ad interuallum laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Interuallum autem laterum sit datus numerus.

Esto interuallum laterum 3. Ponatur vnum latus 1 N. alterum 1 N. + 3. erit cuborum interuallum 27. + 27 N. + 9 Q. quod cùm ad 3. debeat habere rationem quadrati ad quadratum, diuiso eo per 3. fiet 9 + 9 N. + 3 Q. æquandus quadrato. Fingatur eius latus 3 – 2 N. fiet 1 N. 21. Sunt ergo cuborum latera 21 & 24. & satisfit proposito.

Huius vltimæ quæstionis auxilio vniuersalius adhuc quàm per lemmata suprà tradita soluetur Diophantæum problema. Licebit enim adiiciendum numerum ponere quemlibet Numerorum numerum, puta 3 N. sed tunc quærendi erunt duo cubi, quorum interuallum ad interuallum laterum sit vt quadratus ad quadratum. Interuallum autem laterum sit 3. & reperientur qui suprà. Quare ponetur latus cubi 21 N. ipse cubus 9261 C. quibus si addas sigillatim 3 N. fient 24 N. & 9261 C. + 3 N. quorum illeistius latus cubicum esse debet. Quare 13824 C. æquantur 9261 C. + 3 N. & tandem 4563 C. æquantur 3 N. & fit 1 N. $\frac{1}{39}$ Est igitur latus cubi $\frac{7}{13}$ vt apud Diophantum, & adiiciendus numerus $\frac{1}{13}$. Et hic aduertè inuentis semel duobus cubis, quorum interuallum ad laterum interuallum sit vt quadratus ad quadratum, si sumantur duo alij quicunque numeri in eadem cum lateribus ratione, interuallum quoque cuborum ab ipsis ortorum fore ad ipsorum numerorum interuallum vt quadratus ad quadratum. Ita quoniam 1000. & 216. interuallum 784. ad la-

terum 10. & 6. interuallum 4. eſt vt quadratus ad quadratum, ſi loco ipſorum 6. & 10. ſumas 3. & 5. cuborum quoque 27. & 125. interuallum 98. ad laterum interuallum 2. eſt vt quadratus 49. ad quadratum 1. cuius rei demonſtratio ex iis quæ ad ſequentem oſtendemus, liquidò conſtabit.

QVÆSTIO X.

ΚΥΒΩ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ μὲν κύβος κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ η κυ. ἡ ἄρα πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ςς β. [τετάχθω δὲ ὁ προστιθέμενος κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε λειψάντων τῶν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰν ἔστω δὴ] κυ κζ. λείψει ςς β. καὶ ἐὰν μὲν τοῖς ςςοῖς β προστεθῶσι, ποιοῦσι κυ κζ. καὶ ἔστιν ὁ κύβος ἀπὸ πλευρᾶς ςς γ. ἐὰν δὲ τοῖς κυ η. ποιοῦσι κυ λε. λείψει ςς β. θέλομεν δὴ ταῦτα πλευρὰν εἶναι κυβικὴν τῶν γενομένων κυ κζ. τουτέστι ςςοὺς γ. κυ ἄρα λε λείψει ςς β. ἴσοι ςςοῖς γ. καὶ γίνονται ςςοὶ ε. ἴσοι κυ λε. καὶ πάντα παρὰ ς. δυ ἄρα λε. ἴσαι μο ε. καὶ γίνεται ὁ ς οὐ ῥητὸς τῷ μὴ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀλλ' αἱ μὲν δυ λε. σύνθεσίς εἰσι δύο κύβων τοῦ τε κζ. καὶ τοῦ η. αἱ δὲ μο ε. ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν πλευρῶν αὐτῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους οἱ συντεθέντες πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας λόγον ἕξουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἔστωσαν αἱ πλευραὶ αὐτῶν συντεθεῖσαι μονάδες ὅσαι δήποτε, ἔστωσαν δὲ β. καὶ τετάχθω ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς α. ἡ ἄρα τοῦ ἑτέρου ἔσται μο β λείψει ἀριθμοῦ α. καὶ οἱ αὐτῶν κύβοι συντεθέντες ποιοῦσι

CVBO & lateri eundé addere numerum, & eadem facere ordine inuerſo. Eſto cubus cuborum cubicorũ quotlibet verbi gratia 8 C. Igitur latus erit 2 N. Ponatur auté adiiciendus, alius cuborum numerus cubicus, minus latere prioris cubi, eſto itaque 27 C. – 2 N. & ſi addatur ad 2 N. fiunt 27 C. qui eſt cubus à latere 3 N. ſi autem addatur ad 8 C. fiunt 35 C. – 2 N. volumus autem hæc eſſe latus cubicum factorum 27 C. hoc eſt 3 N. Proinde 35 C. – 2 N. æquantur 3 N. & fiunt 5 N. æquales 35 C. & ſi omnia per numerum diuidantur 35 Q. æquantur 5. & non contingit ſolutio rationalis, propterea quod ſpecies ad ſpeciem non habet rationem quam quadratus ad quadratum. Sed 35 Q. eſt ſumma duorum cuborum, ipſius 27. & ipſius 8. vnitates verò 5. eſt ſumma laterum ipſorum. Res itaque eò deducta eſt, vt inueniendi ſint duo cubi, quorum ſumma ad ſummam laterum ipſorum rationem habeat quam quadratus ad quadratum. Sunto latera illorum coniuncta vnitatum quotlibet, verbi gratia 2. & ponatur prioris cubi latus 1 N. Igitur alterius latus erit 2 – 1 N. & cubi illorum iuncti faciunt

6 Q.

6 Q. + 8 − 12 N. Volumus ergo hæc ad laterum summã, hoc est ad 2. habere rationem quã quadratus numerus ad quadratum numerum; Atqui 2. duplum est quadrati. Quare & 6 Q. + 8 − 12 N. duplum oportet esse quadrati. Semissis igitur, nempe 3 Q. + 4 − 6 N. æquatur quadrato. Esto quadrato à latere 2 − 4 N. & fit 1 N. $\frac{10}{13}$. Ad positiones. Erit alterum latus $\frac{10}{13}$ alterum $\frac{16}{13}$. Tollo decimas tertias, & semisses ipsorum capio, fiunt cuborum latera 5. & 8. Venio ad propositum ab initio, & pono cubi latus 5 N. cubus ergo est 125 C. Addendum verò statuo cubum à latere 8 N. minus latere prioris cubi, nimirum 512 C. − 5 N. & additus quidem ad 5 N. facit cubum, additus verò ad 125 C. facit 637 C. − 5 N. Volumus ergo hæc esse latus cubicum de 512 C. Quare 8 N. æquantur 637 C. − 5 N. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{125}{343}$. latus verò $\frac{5}{7}$. At numerus adiiciendus $\frac{267}{343}$.

δυνάμεις ϛ̄ μο η̄ λείψει ςς ιβ̄. θέλομεν οὖν ταῦτα πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας, τουτέστι πρὸς μονάδας β̄ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ εἰσὶ δύο μονάδες διπλάσιαι τετραγώνου. ὥστε καὶ δυ ϛ̄ μο η̄ λείψει ςς ιβ̄. διπλάσιαι εἰσὶ τετραγώνου. τὸ ἄρα ἥμισυ αὐτῶν ἴσον τετραγώνῳ. τουτέστι δυ γ̄ μο δ̄ λείψει ςς ϛ̄. ἴσαι γίνονται τῷ ἀπὸ μο β̄ ⋔ ςς δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς ι ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἡ μὲν ι ιγ. ἡ δὲ ιϛ ιγ. αἴρω τὰ τρισκαιδέκατα, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῶν λαμβάνω, γίνονται τῶν κύβων αἱ πλευραί, ἡ μὲν ε. ἡ δὲ η̄. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὴν τοῦ κύβου πλευρὰν ςς ε̄. ὁ ἄρα κύβος ἔσται κυ ρκε̄. ὁ δὲ προστιθέμενος κύβος ἀπὸ τῶν η̄ ςς λείψει τῆς πλευρᾶς τοῦ πρώτου κύβου. τουτέστι κυ φιβ̄ λείψει ςς ε̄. καὶ προστεθεὶς ἀριθμοῖς ε̄ ποιεῖ κύβον. τοῖς δὲ κυ ρκε̄. ποιεῖ κυ χλζ λείψει ςς ε̄. θέλομεν οὖν ταῦτα εἶναι πλευρὰν κυ φιβ̄. ἀριθμοὶ ἄρα η̄ ἴσοι εἰσὶ κυ χλζ ⋔ ςς ε̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κύβος ρκε τμγ. ἡ δὲ πλευρὰ ε ζ. ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς σξζ τμγ.

IN QVAESTIONEM X.

Ipso initio Græca deprauatissima erant. Nam legebatur, κύβον καὶ πλευρὰν προστεθῆναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, pro quo reposui, κύβῳ καὶ πλευρᾷ, &c. Deinde legebatur, ἔστω ὁ μὲν κύβος μονάδων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ η̄. pro quo reposui, κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ κυ η̄. Præterea deerant multa, quæ omnino flagitante sententia fuerunt adiicienda, quæ omnia more nostro virgulis inclusimus. Denique denominatores passim omissi erant, quos restituimus.

Porrò manifestum est quæstionem pendere à lemmate quod assumit Diophantus, quo scilicet quærit duos Cubos, quorum summa ad summam laterum sit vt quadratus ad quadratum. Quod quia sequenti quoque quæstioni inseruit, & multa sunt notatu digna in eius enodatione, pluribus à nobis explicabitur.

Aduerte igitur primò laterum summam poni potuisse non solùm 2. vt fecit Diophantus, sed & quemlibet vnitatum numerum, puta 3. 4. 5. &c.

Aduerte secundò summam cuborum 6 Q. + 8 − 12 N. diuidi per laterum summam 2. & quotientem 3 Q. + 4 − 6 N. æquari quadrato. Quia summa cuborum & summa laterum debent esse plani similes. At ex duorum planorum similium mutua multiplicatione vel diuisione quadratum fieri manifestum est.

Aduerte tertiò non potuisse fingi latus ipsius 3 Q. + 4 − 6 N. nisi vel quadratorum, vel vnitatum numerus quadratus fuisset; vt in simili iam sæpe docuimus. Quare videndum quomodo vnitatum numerus 4. inueniatur quadratus, ne casu non arte certa id fieri putetur. Proueniunt autem vnitates 4. ex cubo 8. diuiso per suum latus 2. Quamobrem cùm quolibet cubo per latus suum diuiso, oriatur quadratus ab eodem latere, patet vtique propositum.

Aduerte quartò cautè admodum formandum esse latus supradicti numeri 3 Q. + 4 − 6 N. Etenim cùm alterum laterum positum sit 2 − 1 N. patet valorem Numeri debere esse minorem quàm 2. fit autem valor Numeri, à quodam quadrato subtrahendo ternarium, & per residuum diuidendo quadruplum lateris multatum senario. Quare si ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. patet $\frac{4 N. - 6}{1 Q. - 3}$ debere esse minus quàm 2. At proinde 4 N. − 6. minus sunt quàm 2 Q − 6. & tandem 4 N. minore, esse debent quàm 2 Q. At si æquarentur fieret 1 N. 2. Igitur patet quæsiti quadrati latus maius esse debere quàm 2. Quare ipsius 3 Q. + 4 − 6 N. latus fingendum erit à 2 − quotlibet numeris, quorum multitudo sit maior quàm 2. sic Diophantus finxit hoc latus 2 − 4 N. & fingi posset 2 − 5 N. 2 − 6 N. &c.

Præterea cauendum est ne cuborum latera æqualia reperiantur, atque adeo ne ipsi cubi sint æquales, quamuis enim si hoc accidat, lemma propositum nihilominus soluatur, quià quilibet cubus ad suum latus rationem habet quadrati ad quadratum, cùm inter eos cadat medius proportionalis quadratus ab eodem latere, ac proinde duplum cubi ad duplum lateris sit in eadem ratione, attamen per huiusmodi æquales cubos quæstio proposita nequit commodè explicari, quoniam resoluendo hypostases numerus additius inuenitur nihilum. Quamobrem non temerè additum est in textu. *Ponatur adiiciendus alius cuborum numerus*, &c. Etenim ponatur verbi gratia cubus quæsitus 8 C. cuius latus 2 N. & ponatur addendus numerus 8 C. − 2 N. patet tandè æquationem procedere inter 16 C. & 4 N. seu inter 16 Q. & 4. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$ per quem resoluendo hypostases fit cubus quæsitus 1. latus 1. Addendus verò numerus fit 1 − 1. id est nihil. Idemque semper eueniet, si in additio numero ponatur idem cuborum numerus qui ponitur pro cubo quæsito, vt facilè est demonstrare, quia hypostasis additij numeri est semper in hoc casu numerus ille cuborum cubicus, minus suo latere. Quare cùm ita operando cubus semper inueniatur 1. ac proinde latus 1. necesse est additiuum numerum esse 1 − 1. Ne igitur in hoc absurdum deueniamus, cauendum est in lemmatis solutione ne quæsiti cubis æquales reperiantur, hoc est ne valor Numeri sit æqualis semissi summæ laterum, vt in hypothesi Diophanti vbi summa laterum ponitur 2. cauendum est ne valor Numeri sit 1. fit autem valor Numeri, vt iam ostensum est $\frac{4 N. - 6}{1 Q. - 3}$ hoc ergo non debet æquari vnitati, sed si ponatur æquari vnitati, fient 4 N. − 6. æquales 1 Q. − 3. & tandem 4 N. æquabuntur 1 Q. + 3. Qua æquatione resoluta fit 1 N. 3. Quamobrem ad vtramque cautionem simul respiciendo fingendum est latus quadrati 3 Q. + 4 − 6 N. à 2. − tot Numeris qui excedant 2. dum non sint 3.

Aduerte postremò cur Diophantus inuentis cuborum lateribus $\frac{10}{13}$ & $\frac{16}{13}$ abiiciat denominatorem, & sumat semisses Numeratorum, eam non esse causam quam affert Xilander, hæc enim ex parte nil aliud est quàm manifesta petitio principij, ex parte verò nescio quid ad rem prorsus impertinens. Nam quod loco ipsorum $\frac{10}{13}$ & $\frac{16}{13}$ sumantur semisses eorum, nempe $\frac{5}{13}$ & $\frac{8}{13}$ eam dicit esse causam quod oporteat eorum cubos æquari quadrato, quod sanè non facit ad rem, non enim quæruntur duo Numeri, quorum cubi simul æquentur quadrato, sed quorum cubi simul ad ipsorum numerorum summam sint in ratione quadrati ad quadratum. Deinde quòd abiecto communi denominatore, sumantur numeratores 5. & 8. eam reddit rationem quod denominator communis est, vt si de cubis numeratorum constet eos ad ipsorum nu-

meratorum summam habere rationem quadrati ad quadratum, abundè sit rei satisfactum. Hoc verò est petere principium, cùm hoc vnum sit quod controuertitur, non enim ostendit cubos numeratorum ad laterum summam esse in ratione quadrati ad quadratum. Atqui certum est cubos ipsorum $\frac{5}{13}$ & $\frac{8}{13}$ ad vnitatem quæ est summa ipsorum, longe diuersam rationem habere, ea quam habent cubi numerorum 5. & 8. ad summam ipsorum 13. quamuis sit vtrobique ratio quadrati ad quadratum. Huius ergo rei causam adæquatam afferemus tale demonstrantes Theorema.

Si fuerint duo numeri, quorum cubi simul ad summam numerorum rationem habeant quadrati ad quadratum, si sumantur alij duo numeri in eadem ratione, circa illos, ipsorumque cubos idem eueniet.

C 125.		A 5.	
D 512.		B 8.	
			R 2.
F 637.	G 91.	E 13.	
			S 4.
L 1000.		H 10.	T 8.
M 4096.		K 16.	
P 5096.	Q 364.	N 16.	

Sint duo numeri A B. quorum cubi C D. & ipsorum C D summa esto F. ipsorum A B. summa esto E sintque F E plani similes, sumanturque H K in ratione ipsorum A B. & sint eorum cubi L M. quorum summa P. ipsorũ verò H K summa esto N. Dico ipsos quoque P N. esse planos similes, sumatur R denominator rationis ipsorum H K. ad ipsos A B. ita vt ducto R in ipsos A B. fiant H K. & sit S quadratus ipsius R. & T. eiusdem cubus. Patet ergo ex cubo T in cubos C D. fieri etiam cubos L M. At quia ex R in A B. fiunt H K. ex eodem R in E summam ipsorum A B. fiet vtique N summa ipsorum H K. Eademque de causa ex T in F. fiet P. Itaque quoniam F E ponuntur plani similes, [1] cadet inter eos vnus medius proportionalis, esto is G. quo ducto 18. octaui.
in S fiat Q. Igitur quia F G E sunt continuè proportionales, & ipsi quoque R S T. continuè proportionales sunt, & ex primo R. in primum F. fit P. At ex secundo S in secundum G fit Q. Ac demum ex tertio T in tertium E fit N, [2] erunt & ipsi 24.1.poris.
P Q N. continuè proportionales. Quare cùm inter ipsos P N. cadat vnus medius proportionalis Q. [3] sunt ipsi P N. plani similes. Quod demonstrandum erat. 20. octaui.

Hinc patet cur loco ipsorum $\frac{10}{13}$ & $\frac{16}{13}$ sumantur 5. & 8. quia scilicet hi sunt in eadem ratione cum illis, quia fiunt ducendo vtrumque in 13. tum productos 10. & 16. diuidendo per 2. Hinc etiam constat demonstratio eius quod diximus ad quartam earum quas attulimus ad præcedentem, nimirum. *Si fuerint duo numeri quorum interuallum ad interuallum cuborum ab ipsis ortorum sit in ratione quadrati ad quadratum, idem eueniet aliis quibuscunque numeris in eadem ratione sumptis*. Nam eadem ratione ostenderur ex R in interuallum ipsorum A B fieri interuallum ipsorum H K. & ex T in interuallum cuborũ C D. produci interuallum cuborum L M. & rursus ex S in medium proportionalem qui cadit inter interuallum cuborum C D. & interuallum laterum A B procreari medium proportionalem qui cadit inter interuallum cuborum L M. & interuallum laterum H K. Quamobrem eodem argumento concludetur propositum.

Porro loco lemmatis à Diophanto assumpti, licebat assumere aliud lemma simile illi quo vsus est ad præcedentem, nimirum.

Inuenire duos cubos, quorum summa sit quadratus numerus, & laterum summa sit etiam quadratus numerus.

Ponatur laterum summa 4. vt sit quadratus, & sit alterum 1 N. alterum 4 − 1 N. Erit summa cuborum 64 + 12 Q. − 48 N. æqualis quadrato, cuius latus fingetur 8 − tot Numeris vt fiat valor Numeri minor quàm 4. dum is non sit 2. ob causas suprà explicatas aduertendo quarto. Quare simili artificio determinando numerum hunc Numerorum in latere fictitio ponẽdum inueniemus eum maiorem esse debere quàm 4. dum non sit 6. Ponatur ergò latus fictitium 8 − 12 N. fiet quadratus 64 + 144 Q. − 192 N. æqualis 64 + 12 Q. − 48 N. & fit 1 N. $\frac{12}{11}$ Sunt igitur cuborum latera $\frac{12}{11}$ $\frac{32}{11}$ quorum summa 4. Ipsi verò cubi $\frac{1728}{1331}$ & $\frac{32768}{1331}$ quorum summa $\frac{3136}{121}$ quadratus à latere $\frac{56}{11}$. Itaque si libeat his vti cubis ad soluendum problema Diophantæum po-

nes cubum quæsitum $\frac{1728}{1331}$ C. cuius latus $\frac{12}{11}$ N. additititius numerus erit $\frac{11768}{1331}$ C. − $\frac{12}{11}$ N. quem addendo lateri fit cubus $\frac{11768}{1331}$ C. & eum addendo cubo fit [illegible] C − $\frac{12}{11}$ N. æqualis $\frac{12}{11}$ N. Quare tandem [illegible] Q. æquantur 4. & fit 1 N. [illegible]. Est ergo latus cubi quæsiti $\frac{2}{7}$ ipse cubus $\frac{8}{343}$ Numerus addititius [illegible] & constat.

Hic etiam possumus afferre nonnullas quæstiones ad instar earum quas ad præcedentem attulimus videlicet.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi simul quadratum conficiant.

Esto data ratio tripla, sit vnus 1 N. alter 3 N. horum cubi simul conficiunt 28 C. quod æquatur quadrato. Sit is quilibet numerus quadratorum quadratus. puta 196 Q. fit 1 N. 7. Sunt ergo quæsiti numeri 7. & 21. quorum cubi 343. & 9261. quorum summa 9604. quadratus est à latere 98.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi simul quadratoquadratum conficiant.

Esto data ratio dupla, sit alter 1 N. alter 2 N. horum cubi simul conficiunt 9. C. æquales quadratoquadrato. Sit is quilibet quadratoquadratorum numerus quadratoquadratus puta 1 QQ. fit 1 N. 9. Sunt ergo quæsiti numeri 9. & 18. quorum cubi 729. & 5832. quorum summa 6561. quadratoquadratus est à latere 9.

QVAESTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros cubum simul conficientes, quorum cubi simul quadratum faciant.

Ponatur summa quæsitorum Numerorum numerus cubocubus, puta 64. & sit alter 1 N. alter 64 − 1 N. horum cubi faciunt 262144 + 192 Q. − 12288 N. quod æquatur quadrato, cuius latus debet fingi 512. − tot Numeris, vt valor Numeri reperiatur minor quàm 64. Quare per artificium traditum aduertendo quarto, inuenietur hanc Numerorum multitudinem quæ ponenda est in latere fictitio, maiorem esse debere quàm 16. fingatur ergo huiusmodi latus 512 − 18 N. fiet 1 N. [illegible]. Sunt igitur quæsiti numeri [illegible] & [illegible] quorum summa 64. At eorum cubi sunt [illegible] [illegible] quorum summa [illegible] seu in minimis [illegible] quadratus est à latere [illegible].

QVÆSTIO XI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο κύβους ἴσους ταῖς ἰδίαις πλευραῖς. ἔστωσαν δὴ αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἐν ἀριθμοῖς. ἡ μὲν ἀριθμῶν β. ἡ δὲ ϛϛ γ. οἱ ἄρα κύβοι συντεθέντες ποιήσουσι κ^υ λε ἴσους ταῖς πλευραῖς, τουτέστι ἀριθμοῖς ε. καὶ πάντα παρὰ ἀριθμόν. δυνάμεις ἄρα λε ἴσαι μ^ο ε. καὶ γίνεται ὁ ϛ οὐ ῥητός. ἀλλ' αἱ δ^υ λε σύνθεσίς εἰσι κύβων δύο, τουτέστι η καὶ κζ. οἱ δὲ ϛϛ ε σύνθεσιν τῶν πλευρῶν αὐτῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν κύβους δύο οἱ συντεθέντες

INVENIRE duos cubos suis æquales lateribus. Statuantur cuborum latera in numeris, alterum 2 N. alterum 3 N. Ipsi ergo cubi coniuncti facient 35 C. æquales summæ laterum, hoc est 5. N. & omnia per numerum diuidantur. Igitur 35 Q. æquantur 5. Et non fit numerus rationalis. Atqui 35 Q. summa sunt duorum cuborum 8. & 27. & 5. N. est summa laterum ipsorum. Itaque res eò rediit, vt inueniendi sint duo cubi quorum summa

per laterum summam diuisa, quotientem faciat quadratum. Hoc autem iam ostensum est, & sunt cuborum latera 8. & 5. Redeo igitur ad propositum ab initio, & pono latera cuborum 8 N. & 5 N. & fit summa cuborum 637 C. summæ laterum æqualis, nimirum 13 N. & fit 1N. $\frac{1}{7}$. Ad positiones. Erit prioris cubi latus $\frac{5}{7}$. alterius $\frac{8}{7}$. Ipsi verò cubi $\frac{125}{343}$. & $\frac{512}{343}$.

καὶ μερισθέντες εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῶν ποιῶσι τὴν παραβολὴν τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδεδείχθη, καὶ εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ςς η. ἡ δὲ ςς ε. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὰς πλευρὰς τῶν κύβων, τὴν μὲν ςς η. τὴν δὲ ςς ε. καὶ οἱ κύβοι συντεθέντες γίνονται κ^υ χλζ. ταῦτα ἴσα ταῖς πλευραῖς τουτέστι ςς^οις ιγ. καὶ γίνεται ὁ ς^ος α ζ^χ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ε ζ^χ. ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου η ζ^χ αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὃς μὲν ρκε τμγ^{ων}. ὃς δὲ φιβ τμγ^{ων}.

IN QVAESTIONEM XI.

OPERATIO Diophanti facilis est & perspicua, & tota innititur lemmati ad præcedentem explicato. Cæterùm eodem ferè artificio soluemus huiusmodi quæstionem.

Inuenire duos cubos, quorum summa ad summam laterum sit in data ratione, dummodo denominator rationis sit quadratus, vel triens quadrati.

Sit primùm data ratio quadrupla, cuius denominator quadratus est. Ponatur vnum latus 1 N. alterum 2 N. erit summa cuborum 9 C. æqualis quadruplo summæ laterum, puta 12 N. & est soluno irrationalis, quia 9. ad 12. non habet rationem quadrati ad quadratum. Quærendi ergo prius sunt duo cubi, quorum summa ad quadruplum summæ laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur summa laterum quilibet vnitatũ Numerus, putà 6. & sit vnum 1 N. alterum 6 − 1 N. erit summa cuborum 216 + 18 Q. − 108 N. quæ ad quadruplum summæ laterum, nimirum ad 24. debet habere rationem quadrati ad quadratum. Quare altera summa per alteram diuisa, fiet 9 + $\frac{3}{4}$ Q. − $\frac{18}{4}$ N. æqualis quadrato, & omnia ducendo in 4. fiet 36 + 3 Q. − 18 N. æquandus quadrato. Et per artificiũ ad præcedentem explicatum inuenies fingendum latus 6 − tot numeris qui superent 2. fingatur 6 − 5 N. fiet 1 N. $\frac{21}{11}$. Sunt ergo cuborum latera $\frac{21}{11}$ & $\frac{45}{11}$. & sumendo minimos in eadem ratione, fient cuborum latera 7 & 15. Redeo igitur ad propositam initio quæstionem, & pono quæsitorum latera cuborum 7 N. & 15 N. fit summa cuborum 3718 C. laterum 22 N. cuius quadruplum 88 N. æquatur 3718 C. & fit 1 N. $\frac{2}{13}$. Sunt ergo latera cuborum $\frac{14}{13}$ & $\frac{30}{13}$. & satisfaciunt proposito.

Deinde sit data ratio tripla, cuius denominator 3. est triens quadrati 9. erunt vt prius quærendi duo cubi, quorum summa ad triplum summæ laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur latus vnius vt supra 1 N. alterius 6 − 1 N. igitur summa cuborum 18 Q. + 216 − 108 N. ad triplum summæ laterum 18. debet habere rationem quadrati ad quadratum, vnde altera summa per alteram diuisa fit 1 Q. + 12 − 6 N. æqualis quadrato cuius latus fingendum est 1 N. − tot vnitatibus, vt superent 3 $\frac{1}{2}$ latus ipsius 12. ita tamen vt valor Numeri sit minor quàm 6. Quare cùm per artificium ad præcedentem explicatum constet vnitates ponendas in latere fictitio debere esse minores quàm $\frac{6}{1}$. Patet fingendum latus 1 N. − tot vnitatibus, vt cadant inter 3 $\frac{1}{2}$ & 9. $\frac{1}{2}$. Fingatur 1 N. − 6. fiet quadratus 1 Q. + 36 − 12 N. æqualis 1 Q. + 12 − 6 N. & fit 1 N. 4. Sunt ergo latera cuborum 4. & 2. vel in minimis 2. & 1.

Venio itaque ad initio propositam quæstionem. Et pono latera cuborum 1 N. & 2 N. fiuntque 9 C. æquales 9 N. vnde fit 1 N. 1. & patet cubos 1. & 8. soluere quæstionem. Quod si quadrati 1 Q. + 12. − 6 N. fingas latus 1 N. − 8. fiet 1 N. $\frac{26}{5}$ & latera cuborum quorum summa ad triplum summæ laterum habet rationem quadrati ad quadratum, erunt in minimis 2 &. 13. Quibus vtendo pones quæsitorum cuborum latera 2 N. & 13 N. vnde fient tandem 2205 C. æquales 45 N. & fiet 1 N. $\frac{1}{7}$ erunt ergo latera cuborum $\frac{2}{7}$ & $\frac{13}{7}$ quæ soluent quæstionem.

QVÆSTIO XII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο κύβους ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἴση ἔσται τῇ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχῇ. ἔστωσαν αἱ πλευραὶ αὐτῶν· ἡ μὲν ςς β. ἡ δὲ ςς γ. καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων κ° ιθ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν ς° α. ς° ἄρα α ἴσος κύβοις ιθ. καὶ γίνεται ὁ ς οὐ ῥητὸς τῷ μὴ ἔχειν τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν β κύβους, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ς° α. ἡ δὲ ς° α μ° α. ἵνα καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ᾖ τετράγωνος τουτέστι μ° α. καὶ ἐπεὶ δεῖ τῆς μὲν πλευρᾶς ς° α. τῆς δὲ ς° α μ° α. ἔσται ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν μ° α. [τῶν δὲ κύβων Δ γ. ςς γ. μ° α.] θέλομεν οὖν ΔΥ γ. ςς γ. μ° α. πρὸς τὴν μ° α. τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν δεῖ εἶναι τετράγωνον. δεῖ δὲ ὁ ὑπ' αὐτῶν ΔΥ γ ςς γ μ° α. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μ° α λείψει ςς β. καὶ γίνεται ὁ ς μ° ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. [εἰσὶ οἱ κύβοι, ὃς μὲν τμγ. ὃς δὲ φιβ]

INVENIRE duos cubos quorum interuallum æquale sit interuallo laterum ipsorum. Sunto latera 2 N. & 3 N. & erit interuallum cuborum 19 C. Interuallum autem laterum 1 N. Igitur 1 N. æquatur 19 C. Et non est numerus rationalis, quia species ad speciem non habet rationem quæ est quadrati ad quadratum. Eò itaque sum redactus, vt inueniam duos cubos, vt ipsorum interuallum ad interuallum laterum rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Sunto latera cuborum 1 N. & 1 N. + 1. vt & ipsorum interuallum sit quadratus, nimirum 1. & quoniam vnum latus est 1 N. alterum 1 N. + 1. erit quidem laterum interuallum 1. cuborum verò 3 Q. + 3 N. + 1. Volumus ergo 3 Q. + 3 N. + 1. ad vnitatem, interuallum scilicet laterum, rationem habere quam habet quadratus ad quadratum. Igitur productum eorum multiplicatione oportet esse quadratum. Est autem hoc productum 3 Q. + 3 N. + 1. Hoc æquatur quadrato à latere 1 − 2 N. & fit 1 N. 7. Ad positiones. Sunt cubi 343.

& 512. quorum latera 7. & 8. Venio ad id quod initio propositum erat, & pono latera cuborum 7 N. & 8 N. & est horum interuallum 1 N. At interuallum cuborum ab ipsis ortorum est 169 C. Igitur 169 C. æquantur 1 N. & fit 1 N. $\frac{1}{13}$. Ad positiones. Erunt latera cuborum $\frac{7}{13}$ & $\frac{8}{13}$.

ὧν αἱ πλευραὶ ἡ μὲν ζ. ἡ δὲ η. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὰς πλευρὰς τῶν κύβων, ἣν μὲν ςς ζ. ἣν δὲ ςς η. καὶ ἡ μὲν τούτων ὑπεροχή ἐστιν ς α. ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχὴ Κυ ρξθ. κύβοι ἄρα ρξθ ἴσοι ς α. καὶ γίνεται ὁ ς α ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἡ μὲν ζ ιγ. ἡ δὲ η ιγ.

IN QVAESTIONEM XII.

LEMMA Diophanti est idem penitus cum quarta quæstione earum, quas ad nonam huius attulimus, quamuis vniuersalius operati simus ibi, quàm hîc faciat Diophantus, vult enim interuallum cuborum poni quadratum, cùm nos interuallum cuborum poni posse quemlibet numerum docuerimus. Itaque vide quæ ibi adnotauimus. Cæterùm, sicut ad præcedentem factum est, proponetur etiam hæc quæstio vniuersalius, nimirum sic.

Inuenire duos cubos, quorum interuallum ad interuallum laterum datam habeat rationem, dummodo denominator rationis sit quadratus vel triens quadrati.

Primùm sit data ratio quadrupla, cuius denominator 4. quadratus est. Hîc etiam eò redigimur, vt inueniamus duos cubos, quorum interuallum ad quadruplum interualli laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N → 2. Erit cuborum interuallum 8. → 12 N. → 6 Q. laterum 2. cuius quadruplum 8. ad cuborum interuallum debet habere rationem quadrati ad quadratum. Proinde illo per hunc diuiso fiet 1 → $\frac{6}{4}$ N. → $\frac{3}{4}$ Q. æquãdus quadrato, & omnia per 4. multiplicando, fit 4 → 6 N. → 3 Q. æquandus quadrato. Esto latus eius 2 − 3 N. fiet 1 N. 3. Sunt ergo cuborum latera 3. & 5. Venio ad propositam quæstionem, & pono quæsitorum cuborum latera 3 N. & 5 N. fit cuborum interuallum 98 C. æquale quadruplo interualli laterum 8 N. vnde fit 1 N. $\frac{2}{7}$ sunt ergo cuborum latera $\frac{6}{7}$ & $\frac{10}{7}$. quæ soluunt quæstionem.

Deinde sit data ratio tripla, cuius denominator 3. est triens quadrati 9. Sunt vt prius quærendi duo cubi, quorum interuallum ad triplum interualli laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N. → 2. erit cuborum interuallum 6 Q. → 12 N. → 8. ad triplum interualli laterum, nimirum ad 6. in ratione quadrati ad quadratum, quare illo per hunc diuiso fiet 1 Q. → 2 N. → $\frac{4}{3}$ æquandus quadrato, & omnia per 9. multiplicando fiet 9 Q. → 18 N. → 12. æquandus quadrato, fingatur eius latus 3 N. − 4. fiet 1 N. $\frac{2}{21}$ Sunt ergo cuborum latera $\frac{2}{21}$ & $\frac{44}{21}$ seu in minimis 1. & 22. Redeo ergo ad propositam initio quæstionem, & pono quæsitorum cuborum latera 1 N. 22 N. cuborum interuallum est 10647 C. quod æquatur triplo interualli laterum, puta 63 N. & fit 1 N. $\frac{1}{13}$ suntque latera cuborum $\frac{1}{13}$ & $\frac{22}{13}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XIII.

INVENIRE duos numeros, vt maioris cubus adscito minore numero, sit æqualis cubo minoris adsciscenti maiorem

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ἀριθμόν, ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβῳ προσλαβόντι τὸν μείζονα ἀριθ-

μόν. ἔστω ὁ μὲν ςς β. ὁ δὲ ςς γ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ κυ κζ ςςοἱ β. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβος προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ κυ η ἀριθμοὺς γ. κύβοι ἄρα η ςςοἱ γ, ἴσοι εἰσὶ κυ κζ. ςςοἱ β. καὶ πάντα παρὰ ς. καὶ γίνεται ΔΥ ιθ ἴσαι μο α. καὶ ὁ ς οὐ ῥητός. ἀλλ' αἱ μὲν ΔΥ ιθ εἰσὶ δύο κύβων ὑπεροχή. ἡ δὲ μο α τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐστὶν ὑπεροχή. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους, ὧν ἡ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχὴν λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τοῦτο δὲ προεδείχθη. καὶ εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἡ μὲν ζ. ἡ δὲ η. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω ὃν μὲν ςς ζ. ὃν δὲ ςς η. καὶ γίνεται κυ τμγ ςςοἱ η. ἴσοι κυ φιβ ςςοἱ ζ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α ιγων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ζ ιγων. ὁ δὲ η ιγων. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

numerum. Esto alter 2 N. alter 3 N. maioris cubus adſcito minore numero fit 27 C. + 2 N. At minoris cubus adſcito maiore numero facit 8 C. + 3 N. Igitur 8 C. + 3 N. æquantur 27 C. + 2 N. Omnia per numerum diuidantur, fiunt 19 Q. æquales 1 N. & non prouenit 1 N. rationalis. At 19 Q. ſunt interuallum duorum cuborum. Vnitas verò eſt laterum differentia. Eò itaque res rediit, vt inueniantur duo cubi, quorum interuallum ad interuallum laterum ipſorum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Hoc autem ſuprà demonſtratum eſt, & ſunt cuborum latera 7. & 8. Venio ergo ad id quod primò quærebatur, & pono alterum 7 N. alterum 8 N. fiunt 343 C. + 8 N. æquales 512 C. + 7 N. & fit 1 N. $\frac{1}{13}$. Ad poſitiones. Erit alter $\frac{7}{13}$. alter $\frac{8}{13}$. & demonſtratio euidens.

IN QVAESTIONEM XIII.

OPERATIO Diophanti nil habet difficultatis. Verùm moneo abſque noua operatione poſſe ſolui quæſtionem hanc auxilio præcedentis, nam numeri quicunque præcedenti ſatisfacientes, hanc quoque ſoluunt, quod ſic demonſtro.

A $\frac{125}{343}$. B $\frac{27}{343}$
C $\frac{5}{7}$. D $\frac{3}{7}$

Sint Numeri ſatisfacientes præcedenti, nimirum cubi A B. & eorum latera C D, ita vt cuborum A B interuallum ſit æquale interuallo laterum C D. Dico per eoſdem numeros huic quæſtioni ſatisfieri, nimirum maiorem cubum A adſciſcentem minus latus D, æquari minori cubo B adſciſcenti maius latus C. Etenim ob æqualitatem interuallorum eſt in medietate Arith-
4.2.porism. metica A ad B. vt C ad D.[1] Quare extremorum A D ſumma æqualis eſt ſummæ mediorum B C. Quod erat propoſitum.

Similiter per præcedentem ſoluetur adhuc huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos cubos, vt interuallum maioris cubi & maioris lateris, interuallo minoris cubi, & minoris lateris æquale ſit.

Sint enim iidem qui ſuprà numeri ſatisfacientes præcedenti, dico interuallum maioris cubi A & maioris lateris C. æquale eſſe interuallo minoris cubi B. & minoris
7.1.porism. lateris D. Quia enim eſt in medietate Arithmetica A ad B vt C ad D.[2] Erit & permutando A ad C vt B ad D. Quod demonſtrandum erat.

Non aliter per vndecimam huius ſoluetur quæſtio ſequens.

Inuenire duos cubos, vt maior eodem interuallo superet latus minoris, quo latus maioris superat minorem cubum.

A ⁝ B ⁝ C ⁝ D ⁝ Sit maior cubus A. & eius latus B. sitque minor cubus C. & eius latus D. sitque summa cuborum A C. æqualis summæ laterum B D. vt requirit vndecima. Dico eodem interuallo A superare D. quo B superat C. Quia enim extremorum A C summa summæ mediorum D B æqualis est, * est in medietate Arithmetica A ad D vt B ad C. Quod erat ostendendum. 4.1.porism.

QVÆSTIO XIV.

INVENIRE duos numeros, vt alteruter, & amborum summa, sed & ipsorum interuallum addita vnitate quadratum faciat. Si vnitatem auferam ab aliquo quadrato, habebo primum. Formo quadratum aliquem à numeris quotlibet & vnitate, esto à 3 N. + 1. ipse erit 9 Q. + 6 N. + 1. & si inde auferam vnitatem, ponam primum 9 Q. + 6 N. Rursus quia volumus primum & secundum simul, addita vnitate facere quadratum; sed & secundum adscita vnitate esse quadratum, quærendum mihi obtigit quis quadratus coniunctus cum 9 Q. + 6 N. faciat quadratum. Expono duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 9 Q. + 6 N. & sunt 9. N. + 6. & 1 N. horum interuallum 8 N. + 6. cuius semissis 4 N. + 3. quo in se ducto fit 16 Q. + 24 N. + 9. Hinc aufero vnitatem, & pono secundum 16 Q. + 24 N. + 8. Est autem primus 9 Q. + 6 N. & alteruter, & vterque simul addita vnitate facit quadratum. Superest vt & interuallum ipsorum adscita vnitate faciat quadratum. Igitur 7 Q. + 18 N.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν, καὶ συναμφότερος, καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν μετὰ μο α. ποιῇ τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω μο α ἕξω πρῶτον. πλάσσω τινὰ τετράγωνον ἀπὸ ςς ὁσωνδήποτε καὶ μο α. καὶ ἔστω ἀπὸ ἀριθμῶν γ μο α. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος ΔΥ θ ςς ς μο α. καὶ ἐὰν ἀφέλω τὴν μο α. τάσσω τὸν πρῶτον ΔΥ θ ςς ς. πάλιν ἐπεὶ θέλομεν τὸν πρῶτον καὶ τὸν δεύτερον μετὰ μο α ποιεῖν τετράγωνον. *ἀλλὰ συναμφότερος ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος μετὰ μο α καὶ ΔΥ θ. ςς ς.* ὁ δὲ δεύτερος μετὰ μο α ἐστι τετράγωνος. γέγονέ μοι ζητῆσαι τίς τετράγωνος μετὰ ΔΥ θ ςς ς. ποιεῖ τετράγωνον. ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ἡ δυνάμεις θ ςς ς. [καὶ εἰσὶ ςς θ μο ς καὶ ς α. ὧν ὑπεροχὴ ςς η μο ς. καὶ αὐτῆς τὸ ἥμισυ ς δ μο γ.] ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ γίνεται δυνάμεις ις ἀριθμοὶ κδ μο θ. ἀφαιρῶ μο α. καὶ τάσσω τὸν δεύτερον ΔΥ ις ςς κδ. μο η. ἔστι δὲ καὶ ὁ πρῶτος ΔΥ θ ςς ς. καὶ ἑκάτερος [καὶ συναμφότερος] μετὰ μο α ποιεῖ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν μετὰ μο α [ποιεῖν τετράγωνον] ἔστι ἄρα ΔΥ ζ ςς ιη

μονάδες θ̅ ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μονάδων γ̅ λείψει ἀριθμῶν γ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιη̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ,γκδ̅. ὁ δὲ δεύτερος ,εχκδ̅. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

+ 9. æquantur quadrato à latere 3 − 3 N. & fit 1 N. 18. Ad positiones. Erit primus 3024. secundus 5624. & demonstratio manifesta.

IN QVAESTIONEM XIV.

VERBA illa asteriscis inclusa, ἀλλὰ συναμφότερος ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος μετὰ μ° α̅ ἐ δ̅ ϛ̅ γ̅ ΥϤϛ̅. subreptitia sunt, & omnino reiicienda. Vt contrà fuerunt adiicienda illa quæ virgulis inclusa vides. Sic emendato textu nulla est hîc difficultas. Ad inueniendum quadratum qui additus ad 9 Q. + 6 N. faciat quadratum, non recurrit ad duplicatam æqualitatem Diophantus, vt malè arbitratur Xilander, non enim sunt hîc duo numeri quadrato æquandi. Sed vtitur Canone vltimo vndecimæ secundi, cuius etiam vsus est in duplicata æqualitate ad reperiendum duos quadratos dato interuallo differentes. Diuersitas autem operationis, & solutionis à triplici capite oritur. Primò enim primus diuersimodè poni potest, nimirum quilibet quadratorum numerus quadratus + duplo lateris illius. Vt 9 Q. + 6 N. vel 4 Q. + 4 N. vel 16 Q. + 8 N. &c. Secundò eodem manente primo, secundus variari potest in infinitum, quia verbi gratia in hypothesi Diophanti per vndecimam secundi, reperiri possunt infiniti quadrati diuersi, qui cum 9 Q. + 6 N. quadratum faciant, quorum singuli multati vnitate statui poterunt pro secundo. Denique in fingendo latere quadrati qui numerorum interuallo æquetur, mira contingere potest varietas. Nam verbi gratia in hypothesi Diophanti, quadrati 7 Q. + 18 N. + 9. latus fingi potest à 3 − quolibet Numerorum numero, cuius quadratus superet 7.

Non est etiam dissimulandum quæstionem hanc ad quemlibet quadratum extendi, ac proinde vniuersalius proponi posse hoc pacto.

Quærantur duo numeri, quorum summa, ipsorum vterque, sed & interuallum ipsorum addito dato quadrato, quadratum faciant.

Esto datus quadratus 4.

Si auferam 4. ab aliquo quadrato habebo primum. Formo quadratum à Numeris quotlibet + 2. latere dati quadrati. Esto à 3 N. + 2. ipsi erit 9 Q. + 12 N. + 4. hinc auferendo 4. statuo primum 9 Q. + 12 N. Iam vt habeam secundum, quæram quis quadratus adsumpto 9 Q. + 12 N. faciat quadratum. Expono duos numeros quorum mutuo ductu fiat 9 Q. + 12 N. hi sunt 9 N. + 12. & 1 N. horum interualli semissis est 4 N. + 6. cuius quadratus 16 Q. + 48 N. + 36. vnde si auferam 4. restabit pro secũdo numero 16 Q. + 48 N. + 32. Primus autem est 9. Q. + 12 N. Et hi tribus postulati partibus satisfaciunt, nam & alteruter, & vtriusque summa adsumpto 4. quadratum facit. Restat vt & eorum interuallum adiecto 4. quadratum faciat, facit autem 7 Q. + 36 N. + 36. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus fingo 6 − 3 N. & fit 1 N. 36. sunt igitur quæsiti numeri 12096. & 22496. qui soluunt quæstionem, nam vtrique sigillatim addendo 4. fiunt quadrati 12100. & 22500. quorum latera 110. & 150. At si summæ amborum, & interuallo eorundem addatur rursus 4. fiunt quadrati 34596. & 10404. quorum latera 186. & 102.

QVÆSTIO XV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς [τετραγώνους] οἳ συντεθέντες ἴσοι ἔσονται ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ

INVENIRE tres numeros quadratos, qui coniuncti æquales sint interuallis ipsorum coniunctis. Quoniam differẽtia

maximi & medij, & differentia medij & minimi, & differentia maximi & minimi simul iunctæ tribus numeris æquantur, at tres differentiæ sunt duplum differentiæ maximi & minimi. Ergo duplum differentiæ maximi & minimi æquatur tribus numeris. Ponatur minimus quadratus 1. maximus 1 Q. + 2 N. + 1. iam duplum interualli maximi & minimi est 2 Q. + 4 N. Ergo tres quadrati simul sunt 2 Q. + 4 N. quorum duo cùm sint 1 Q. + 2 N. + 2. relinquitur vtique medius 1 Q. + 2 N. − 2. Oportet igitur hæc æquari quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{9}{5}$. Ad positiones. Erit maximus $\frac{196}{25}$. medius $\frac{121}{25}$. minimus 1. & omnia per 25. erit maximus 196. medius 121. minimus 25.

μεγίστου καὶ μέσου, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἴση ἐστὶ τοῖς τρισίν, ἀλλ᾽ αἱ τῶν τριῶν ὑπεροχαὶ δὶς ἐστὶν ἡ τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχή, δὶς ἄρα ἡ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τοῖς τρισί. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τετράγωνος μ° α. ὁ δὲ μέγιστος δ^υ α ςς β μ° α. καὶ δὶς ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐστὶ δ^υ β ςς δ. εἰσὶν ἄρα οἱ τρεῖς τετράγωνοι δ^υ β ςς δ. ὧν οἱ δύο εἰσὶ δ^υ α ςς β μ° β. λοιπὸς ἄρα ὁ μέσος ἔσται δ^υ α ςς β ⋔ μ° β. δεῖ ἄρα ταῦτα ἴσα εἶναι τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς^ο α ⋔ μ° δ. καὶ γίνεται ὁ ς^ος μ° θ ε^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος ρϟς ε^ων. ὁ δὲ μέσος ρκα ε^ων. ὁ δὲ ἐλάχιστος μ° α. καὶ πάντα κε. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος ρϟς. ὁ δὲ μέσος ρκα. ὁ δὲ ἐλάχιστος κε.

IN QVAESTIONEM XV.

TEXTV restituto, vt nos fecimus, non magna est hîc difficultas. Aduertendum tamen quod nec attigit Diophantus, nec vidit Xilander in fingendo latere quadrati 1 Q. + 2 N. − 2. aliquam adhibendam esse cautionem. Cùm enim tres inæquales numeri quærantur, oportet vtique medium maiorem esse minimo. At minimus positus est 1. medius 1 Q. + 2 N. − 2. Oportet igitur talem inuenin valorem Numeri, vt per eum resoluendo hypostases 1 Q. + 2 N. − 2. sit plus quàm 1. Hoc autem vt fiat, oportet 1 Q. + 2 N. excedere ternarium, & hoc etiam vt contingat, oportet valorem Numeri excedere vnitatem, vt manifestum est. Porrò fit valor Numeri à quodam quadrato binario aucto, & diuiso per duplum sui lateris binario auctum. Quare si ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. fiet valor Numeri $\frac{1 Q. + 2}{2 N. + 2}$. Hoc ergo cùm maius esse oporteat vnitate, erit & 1 Q. + 2. maior quàm 2 N. + 2. & tandem 1 Q. maior erit quàm 2 N. vnde constat vnitates in latere fictitio ponendas plures esse debere quàm 2. Ita Diophantus finxit huiusmodi latus 1 N. − 4. Poterat etiam poni 1 N. − 3. vel 1 N. − 5. &c. Sed si ponas 1 N. − 1. vel 1 N. − 2. incides vtique in aliquod absurdum.

Aduertendum præterea minimum quæsitorum, non solùm poni posse 1. sed & alium quemlibet quadratum, puta 8. 9. 25. &c. Sed tunc maximi latus ponetur certus Numerorum numerus + latere eiusdem quadrati, qui pro minimo positus erit. Et tandem in fingendo latere quadrati qui pro medio statuetur, adhibenda erit eadem cautio, de qua supra est actum, erit enim necesse vt per valorem Numeri resoluendo hypostases, medius inueniatur maior minimo.

Denique communi denominatore abiecto, ſolos numeratores retinet Diophantus, quia hi æquè bene ſoluunt quæſtionem. Cuius rei ratio eſt, quod in fractionibus eiuſdem denominationis, tam ſumma quàm interuallum penes ſolos Numeratores conſideratur, vnde ad hoc vt trium fractionum eiuſdem denominationis ſumma æqualis ſit ipſarum interuallis, neceſſe eſt prius Numeratorum ſummam, ipſorum interuallis æquari. Sed & vniuerſaliter veriſſimum eſt. Quamcunque rationem trium Numerorum ſumma habeat ad ipſorum interualla, eandem habere, ſummam trium aliorum in eadem ratione ſumptorum, ad ipſorum interualla, vt facile eſt demonſtrare. Sed hoc tyronibus exercitationis gratia relinquatur.

QVÆSTIO XVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως δύο ὁποιωνοῦν συντεθέντες καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. ἐπιτετάχθω δὴ συναμφότερον τὸν τε πρῶτον, καὶ τὸν δεύτερον ἐπὶ τὸν τρίτον πολλαπλασιασθέντα ποιεῖν μο λε. συναμφότερον δὲ τὸν δεύτερον, καὶ τὸν τρίτον ἐπὶ τὸν πρῶτον πολλαπλασιασθέντα ποιεῖν μο κζ. καὶ ἔτι συναμφότερον τὸν πρῶτον, καὶ τὸν τρίτον πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖν μο λβ. τετάχθω ὁ τρίτος ςο α. λοιπὸν ἄρα ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος λε ισχ. ἔστω ὁ πρῶτος ι ισχ. ὁ δεύτερος ἄρα ἔσται κε ισχ. καὶ λοιπόν ἐστι δύο ἐπιτάγματα τὸ συναμφότερον τὸν δεύτερον, καὶ τὸν τρίτον ἐπὶ τὸν πρῶτον ποιεῖν μο κζ. [τό τε συναμφότερον τὸν τρίτον, καὶ τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖν μο λβ] ἀλλ᾽ ὁ δεύτερος, καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ τὸν πρῶτον [ποιεῖ] μο ι καὶ σν δυ.α. μονάδες ἄρα ι μετὰ σν δυ.α. ἴσαι μο κζ. ὁ δὲ τρίτος καὶ ὁ πρῶτος ἐπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖ μο κε καὶ σν δυ.α. [μονάδες ἄρα κε μετὰ σν δυ.α.] ἴσαι μο λβ. καὶ μο ι. καὶ σν δυ.α. ἴσαι μο κζ. καὶ ὑπερέχουσιν αἱ μονάδες τὰς μονάδας μο ε. ὡς εἰ καὶ αἱ μο κε. καὶ σν δυ.α. μονάδας ι. καὶ σν δυ.α. ὑπερεῖχον μο ε.

INVENIRE tres numeros, quorum bini quilibet coniuncti, & in reliquum ducti, faciant datos numeros. Imperetur vt ſumma primi & ſecundi in tertium ducta faciat 35. ſumma ſecundi & tertij in primum ducta faciat 27. At ſumma primi & tertij in ſecúdum faciat 32. Ponatur tertius 1 N. Ergo primus & ſecundus ſimul erunt $\frac{35}{1N}$. Eſto primus $\frac{10}{1N}$. ſecundus igitur erit $\frac{25}{1N}$. duo adhuc poſtulata reſtant implenda, nimirum vt ſecundus & tertius ſimul in primum ducti faciant 27. & vt tertius & primus ſimul in ſecundum faciant 32. ſed ſecundus & tertius in primum faciunt 10 + $\frac{250}{1Q}$. Proinde 10 + $\frac{250}{1Q}$ æquantur 27. At tertius & primus in ſecundum faciunt 25 + $\frac{250}{1Q}$ Proinde 25 + $\frac{250}{1Q}$. æquantur 32. ſed vt oſtenſum eſt, etiam 10 + $\frac{250}{1Q}$. æquantur 27. & exceſſus vnitatum ſuper vnitates eſt 5. vt ſi etiam 25. + $\frac{250}{1Q}$ vltrà 10 + $\frac{250}{1Q}$ habuiſſent 5. æqualia

vtique

vtique fuissent interualla. Sed 25. vnitates à secundo sunt, & vnitates 10. à primo. Volumus ergo harum interuallum esse 5. Ipsi autem primus & secundus non sunt quiuis, sed coniuncti faciunt 35. vsuuenit ergo mihi vt 35. diuidā in duos numeros, quorum differentia sit 5. & est alter 15. alter 20. Pono ergo primum $\frac{15}{1N.}$ secundum $\frac{20}{1N.}$ & summa secundi & tertij in primum ducta facit 15 + $\frac{300}{1Q.}$ ęqualia 27. At summa primi & tertij in secundum facit 20 + $\frac{300}{1Q.}$ æqualia 32. & si 15 + $\frac{300}{1Q.}$ æquem 27. fit 1 N. 5. Ad positiones, erit primus 3. secundus 4. tertius 5.

λῶν δύο ἴση ἡ ὑπεροχή. ἀλλὰ μο κε ἐκ τοῦ δευτέρου εἰσίν, αἱ δὲ μο ι ἐκ τοῦ πρώτου εἰσί. θέλομεν οὖν τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μο ε. αὐτοὶ δὲ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος οὐκ εἰσὶ τυχόντες, ἀλλὰ συναμφότερος μο λε. γέγονεν οὖν μοι τὸν λε διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ἵνα ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ὑπερέχῃ μο ε. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ιε, ὁ δὲ κ. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ιε ἀριθμοστοῦ. τὸν δὲ δεύτερον κ ἀριθμοστοῦ. καὶ συναμφότερος ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ τὸν πρῶτον ποιεῖ μο ιε καὶ τ δυναμοστοῦ ἴσας μο κζ. συναμφότερος δὲ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ δεύτερον ποιεῖ μο κ καὶ τ δυναμοστοῦ ἴσας μο λβ. καὶ ἐπεὶ μο ιε καὶ τ δυναμοστοῦ ἰσώσω μο κζ. γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο γ. ὁ δὲ δεύτερος μο δ. ὁ δὲ τρίτος μο ε.

IN QVAESTIONEM XVI.

TEXTVS alio morbo non laborat, nisi quod fractiones Numericæ & Quadraticæ ambiguè exprimuntur, vt iam semel atque iterum monuimus passim in hoc codice contingere. Sed ex nostra versione omnis tollitur ambiguitas. Operatio artificiosa est, quam etsi totam ita tradat Xilander, veram tamen eius causam, & æquationis resoluendæ rationem non intellexit, ait enim abiici debere vtrimque 300. & comparandos inuicem antecedentes 15. & 20. itemque consequentes 27. & 32. quorum idem interuallum 5. valor Numeri. In quo turpiter errat, si existimat idcirco 5. esse valorem Numeri. Quod fiet manifestum si statuas secundum vel tertium 1 N. quod fieri posse docebimus infrà. Tunc enim simili prorsus logismo inuenies valorem Numeri longè diuersum ab interuallo similium antecedentium & consequentium. Itaque resoluitur æquatio via ordinaria. Comparando verbi gratia 15 Q. + 300. cum 27 Q. auferendo scilicet vtrimque 15 Q. vnde tandem 12 Q. manent æquales 300. & fit 1 Q. 25. ac proinde 1 N. 5. similiter æquando 20 Q. + 300. & 32 Q. auferendo scilicet vtrimque 20 Q. manent vt prius 12 Q. æquales 300. vnde fit rursus idem valor Numeri 5. Cùm autem vtraque æqualitas necessariò inferatur, necesse est vtique eundem vtrobique reperiri valorem Numeri, in quo totum artificium Diophanti consistit. Si enim auferendo 15 Q. à 27 Q. idem superest quod superest auferendo 20 Q. à 32 Q. sumus in vado, nam illud residuum vtrobique æquabitur eidem numero 300. Id autem continget si inter 15. & 20. idem sit interuallum quod inter 27. & 32. Nam datis quatuor Numeris 15. 20. 27. 32. ita vt inter 15. & 20. primum & secundum idem sit interuallum, quod inter 27. & 32. tertium & quartum, [1] erit & permutando idem interuallum, inter 15. & 27. primum & tertium, quod inter 20. & 32. secundum & quartum. Quod est intentum. Hinc patet vera & germana causa totius operationis Diophanti, & cur cogatur diuidere 35. in partes 15. & 20. eodem distantes interuallo, quo distant 27. & 32. 7. 1. poris.

Cæterùm, vt iam monui, tripliciter variari potest operatio, quia 1 N. pro quolibet trium quæsitorum numerorum statui potest, quod in tyronum gratiam non pigebit vno exemplo confirmare. Ponatur secundus 1 N. erunt igitur primus & tertius simul $\frac{32}{1N}$. Iam vt inueniantur primus & tertius separati, & duplicata æqualitas ritè procedat, oportet diuidere $\frac{32}{1N}$ in duas partes, seruantes idem interuallum quod est inter 35. & 27. nimirum 8. id fiet per primam primi. Erit ergo primus $\frac{12}{1N}$ tertius $\frac{20}{1N}$. Itaque ducendo primum & secundum simul in tertium fit 20 + $\frac{240}{1Q}$ æqualis 35. Et rursus ducendo secundum & tertium simul in primum, fit 12 + $\frac{240}{1Q}$ æqualis 27. & omnia ducendo in 1 Q. fit hinc quidem 20 Q. + 240. æqualis 35 Q. Inde verò 12 Q. + 240. æqualis 27 Q. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique 1 Q. 16. ac proinde 1 N. 4. sunt igitur quæsiti numeri qui prius 3. 4. 5. Hinc error Xilandri manifestè deprehenditur. Nam si vt ipse argumentatur abiicias vtrimque 240. & comparando antecedentes 20. & 12. itemque consequentes 35. & 27. quorum interuallum idem 8. Inde colligas valorem Numeri esse 8. vides quantum aberres à veritate.

Porrò vt solutio sit rationalis, oportet, vt vno datorum numerorum diuiso in duas partes, quarum idem sit interuallum, quod est inter duos reliquos numeros, planus sub dictis partibus comprehensus habeat rationem quadrati ad quadratum, ad interuallum quo maior dictarum partium superat minorem ex duobus reliquis numeris, vel quo minor pars superatur à maiore duorum reliquorum numerorum.

QVÆSTIO XVII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος, προσλαβὼν τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μέσος ςς ὅσων δήποτε, ἔστω ςς δ. καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον, ἀπῆκται εἰς τὸ εὑρεῖν τις τετράγωνος προσλαβὼν ςς δ ποιεῖ τετράγωνον. ζήτησον ἀριθμοὺς δύο ὧν τὸ ὑπὸ ἐστι ςς δ. μετροῦσιν ςς β κατὰ μο β. καὶ ἐὰν τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τὸ ἥμισυ τάξω τὸν πρῶτον, ἔσται ς α λείψει μο α. καὶ λέλυταί μοι, ὥστε τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. [λοιπόν ἐστι τινὰ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου.] τουτέστι δυ ις μετὰ τοῦ τρίτου [ποιεῖν] τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὰς δυ ις ἕξω τινὰ τρίτον. πλάσω τινὰ τετράγωνον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τῶν δυ ις. τουτέστι ςς δ μο α. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ ις ἀριθμῶν

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, ita vt quadratus cuiuslibet ipsorum adscito sequente numero faciat quadratum. Ponatur medius, Numerorum quotlibet, ac sit 4 N. & quia volo quadratum primi adscito secundo facere quadratum, eò res redit vt inueniam quis quadratus adiectis 4 N. faciat quadratum. Quæro duos numeros quorum mutuo ductu fiat 4 N. hi sunt qui eum metiuntur, nimirum 2 N. & 2. & si interualli horum semissem statuo pro primo, erit is 1 N – 1. Iam ergo hoc confectum est vt primi quadratus cum secundo numero faciat quadratum. Restat vt secundi quadratus, hoc est 16 Q. adscito tertio faciat quadratum. Si ergo ab aliquo quadrato auferam 16 Q. habebo tertium. Formo quadratum à latere ipsius 16 Q. nempe abs 4 N. +

1. is erit 16 Q. + 8 N + 1. hinc ablatis 16 Q. reliquus est tertius 8 N + 1. Rursus quia volo trium summam æquari quadrato, est autem trium summa 13 N. hoc æquabitur quadrato, esto itaque quadratis numero quadrato, puta 169 Q. & fit 1 N. 13 Q. Ad positiones erit primus 13 Q. − 1. secundus 52 Q. tertius 104 Q. + 1. Ita indefinitè impleta sunt tria postulata. Restat vt quadratus tertij, nimirum 10816 QQ. + 208 Q. + 1. adscito primo numero, hoc est 13 Q. − 1. faciat quadratum. Facit autem 10816 QQ. + 221 Q.. hoc ergo æquatur quadrato. Omnia per quadratum diuidantur, fit 10816 Q. + 221. æquale quadrato à latere 104 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{55}{52}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{36621}{2704}$. secundus $\frac{157300}{2704}$. tertius $\frac{317304}{2704}$.

η̅ μ° α̅. ἐὰν ἀφέλω τὰς δ^υ ι̅ϛ̅. λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ τρίτος ϛϛ η̅ μ° α̅. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν τριῶν ἴσους εἶναι τετραγώνῳ. εἰσὶ δὲ οἱ τρεῖς ϛϛ ι̅γ̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, ἔστω τετραγωνικῶν δ^υ ρ̅ξ̅θ̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ° δ^υ ι̅γ̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος δ^υ ι̅γ̅ λείψει μ° α̅. ὁ δεύτερος δ^υ ν̅β̅. ὁ τρίτος δ^υ ρ̅δ̅ μ° α̅. καὶ λύεταί μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον, τουτέστι δ^υ δ^υ α̅, ͵ϛ, δ^υ σ̅η̅ μ° α̅. μετὰ τοῦ πρώτου, τουτέστι δ^υ ι̅γ̅ ⋔ μ° α̅. ποιεῖν τετράγωνον. ποιεῖ δὲ δ^υ δ^υ α̅, ͵ϛ δ^υ σ̅κ̅α̅. ἴσα τετραγώνῳ. πάντα παρὰ δυνάμεις. γίνονται ἄρα δ^υ α̅, ͵ϛ μ° σ̅κ̅α̅ ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛϛ ρ̅δ̅ μ° α̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ° ν̅ε̅ ^{νβ}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° γ, ͵ϛχκα ^{͵βψδ}. ὁ δὲ δεύτερος ιε, ͵ζτ ^{͵βψδ}. ὁ δὲ τρίτος μ° λα, ͵ζτδ ^{͵βψδ}.

IN QVAESTIONEM XVII.

ARTIFICIOSISSIME Diophantus per duas operationes propositum absoluit problema. Hîc itaque multa sunt obseruanda, quæ vel non vidit Xilander, vel parum feliciter adnotauit.

Primo enim medius quæsitorum numerorum poni poterat non solùm 4 N. sed & alius quilibet Numerorum Numerus, vt non obscurè indicat Diophantus.

Secundò sumi possunt etiam diuersi numeri, quorum mutuo ductu fiant 4 N. & sic primi Numeri positio variari, cùm inueniri possint infiniti quadrati qui adsumptis 4 N. quadratum faciant. Sed hîc aliqua cautio adhibenda est. Curandum enim vt ex duobus huiusmodi Numeris, quorum mutuo ductu fient 4 N. ille qui constat ex solis vnitatibus absolutis habeat pro semisse quadratum numerum. Sic Diophantus selegit 2 N. & 2. vbi vides semissem ipsius 2. esse 1. quadratum numerum. Sic etiam sumi possent $\frac{1}{2}$ N. & 8. quia semissis ipsius 8. est quadratus 4. & sic alij infiniti cum eadem cautione deligi possunt. Huius verò rei causa subtili indiget indagatione. Equidem certum est semissem huiusmodi vnitatum absolutarum semper reperiri in hypostasi primi numeri cum signo −. vt in hypothesi Diophanti ponitur primus Numerus 1 N. − 1. Et si sumpsisses $\frac{1}{2}$ & 8. ad conficiendum 4 N. mutuo ductu, statueretur primus Numerus $\frac{1}{4}$ N. − 4. hoc autem accidit, quia primus Numerus habetur sumendo semissem interualli duorũ numerorum quorũ mutuo ductu fiunt 4 N. Cæterùm vnitates quæ ponuntur in primo Numero cum signo defectus debere conflare quadratum ex eo colligitur, quod hæ debent æquari illis quæ ponuntur in tertio numero cum signo +. vt sic vnitatibus se mutuò elidentibus cùm tres numeri simul adduntur, eorum summa constet ex solis Numeris, vt in

Diophanto fit huiusmodi summa 13 N. Atqui vnitates quæ ponuntur in tertio numero semper quadratas esse manifestum est. Etenim tertius Numerus est pars cuiusdam quadrati, cuius latus constat ex Numeris qui ponuntur pro secundo ✝ quotlibet vnitaribus. sic Diophantus posito secundo 4 N. vt inueniat tertium, fingit quadratum à latere 4 N ✝ 1. qui est 16 Q. ✝ 8 N. ✝ 1. vnde ablatis 16 Q. statuit tertium 8 N. ✝ 1. Quare manifestum est vnitates tertij Numeri semper esse quadratum vnitatum in latere dicti quadrati positarum. Vt ergo illis æquentur vnitates primi numeri, illas oportet conficere quadratum eundem.

Tertiò in prima operatione Diophantus æquare potuit 13 N. cuilibet numero quadratorum quadrato, puta 16 Q. 25 Q. 36 Q. &c. Sumpsit author 169 Q. ad vitandas fractiones. Voluit autem in hac operatione valorem Numeri exhiberi in Quadratis, quia per eam non inquiritur vltimus valor Numeri per quem proposita quæstio soluatur, sed tantùm id agitur vt per eam hypostases trium quæsitorum numerorum ita constituantur, vt per eas tribus propositi partibus indefinitè satisfiat, vt disertis verbis indicat Diophantus. Rectè itaque concludit si 13 N. æquentur 169 Q. sequi 1 N. æquari 13 Q. Quod ex sola proportionum regula perspicuum est. Deinde ad hanc Numeri æstimationem reducendo ante factas positiones, infert primum qui erat 1 N. – 1. fore iam 13 Q. – 1. secundum qui erat 4 N. fore iam 52 Q. Ac demum tertium qui erat 8 N. ✝ 1. fore iam 104 Q. ✝ 1. Quare patet allucinari Xilandrum cùm putat 13 N. æquari 169 QQ. qua æquatione quid ad rem conducens consequi possit non video. Siue enim per regulam trium colligat 1 N. æquari 169 QQ. siue depressis characteribus 13. æquari 169 Q C. vnde fit solutio irrationalis, in manifestum absurdum eum incidere necesse est. Adde in Græco rectè reperiri ad 169. adiectam notam Q. non autem QQ. vt verè dici possit corruptum hoc loco Diophantum à Xilandro.

Quartò in vltima æquatione vbi fingitur latus numeri 10816 Q. ✝ 221. qui fit addendo primum numerum ad quadratum tertij, magna etiam cautio est adhibenda. Quia enim primus positus est 13 Q. – 1. oportet talem inueniri valorem Numeri, vt 13 Q. excedant vnitatem. Hoc autem vt fiat, oportet 1 Q. maiorem esse quàm $\frac{1}{13}$. quare cùm latus vero maius ipsius $\frac{1}{13}$ sit $\frac{1}{4}$. Oportet valorem Numeri excedere $\frac{1}{4}$. Porro fit valor Numeri auferendo quadratum aliquem à 221. & residuum diuidendo per latus eiusdem quadrati ductum in 208. Quare posito illo quadraro 1 Q. fit valor Numeri $\frac{221 - 1 Q.}{208 N}$ qui debet excedere $\frac{1}{4}$. quare 221 – 1 Q. debet excedere $\frac{52}{1}$ N. & tandem 1 Q. debet esse maior quàm $\frac{52}{1}$ N. ✝ 221. Qua æquarione per approximationem resoluta fit 1 N. $\frac{19}{5}$. Quamobrem manifestum est fingendum latus quadrati 104 N. ✝ tot vnitanbus quæ non excedant $\frac{19}{5}$. Vnde si ponas latus illud 104 N. ✝ 4. incides in absurdum, nam fiet 1 N. $\frac{205}{832}$ per quem resoluendo hypostases, primus numerus inuenitur minor nihilo, & sic de aliis.

Denique ne nos ignauiæ arguat Xilander, examen quæstionis subiicere libet. Summa trium numerorum est $\frac{55225}{2704}$ quadratus à latere $\frac{235}{52}$. Quadratus autem primi nempe $\frac{[illegible]}{7311616}$ adscito secundo quadratum facit $\frac{[illegible]}{7311616}$ à larere $\frac{41015}{2704}$. Quadratus porrò secundi, nempe $\frac{[illegible]}{7311616}$ adsciro tertio quadrarum facit $\frac{[illegible]}{7311616}$ à latere $\frac{15600}{2704}$. Denique quadratus tertij, nempe $\frac{[illegible]}{7311616}$ adsumpto primo quadratum conficit $\frac{[illegible]}{7311616}$ à laterc $\frac{11760}{2704}$.

QVÆSTIO XVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος ↑ τοῦ ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω πάλιν ὁ μέσος ἀριθμῶν δ. καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον, λείψει τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, vt cuiusuis ipsorum quadratus dempto qui eum ordine sequitur, faciat quadratũ. Ponatur rursus medius 4. N. & quia volo primi quadratum dempto secũdo facere quadratũ,

oportet inuenire quadratum, qui demptis 4 N. faciat quadratum. Quæro primùm duos numeros, quorum mutuo ductu fiant 4 N. hi sunt qui eum metiuntur 2 N. & 2. Nunc ergo summæ illorum semissem capiens, pono primum 1 N. + 1. sic vni postulatorum satisfit. Rursus quoniam volo secundi quadratum, hoc est 16 Q. dempro tertio facere quadratum, si abs 16 Q. auferamus aliquem quadratum, habebimus tertium. Formo quadratum à 4 N. – 1. fit 16 Q. + 1 – 8 N. hunc aufero de 16. Q. relinquitur tertius 8 N. – 1. & alteri postulato satisfactum est. Rursus quia volo trium summam, hoc est 13 N. æquari, quadrato esto 169 Q. & fit 1 N. 13 Q. Ad positiones. Erit primus quidem 13 Q. + 1. secundus 52 Q. tertius autem 104 Q. – 1. & rursus indefinitè tribus postularis est satisfactum. Superest vt & tertij quadratus dempto primo faciat quadratum. Sed tertij quadratus dempto primo facit 10816 QQ. – 221 Q. æquale quadrato. Omnia per quadratum diuidantur, fiunt 10816 Q. – 221. æqualia quadrato à latere 104 N. – 1. & fit 1 N. $\frac{111}{104}$. Erit primus $\frac{170989}{10816}$ secundus $\frac{640692}{10816}$ tertius $\frac{1270568}{10816}$.

ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τίς τετράγωνος λείψας ϛϛ^{οὶ} δ̄ ποιεῖ τετράγωνον, καὶ ζητῶ πρότερον ἀριθμοὺς δύο, ὧν τὸ ὑπὸ ἐστὶ ϛϛ^{οὶ} δ̄. μετρῶσι δὲ ἀριθμοὶ β̄ μ° β̄. νῦν τῆς συνθέσεως αὐτῶν λαβὼν τὸ ἥμισυ, τάσσω τὸν πρῶτον ἀριθμοῦ ᾱ μ° ᾱ. καὶ λέλυταί μοι ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον, τουτέστι δυνάμεις ιϛ̄ λείψαντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον, ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν δυνάμεων ιϛ̄ ἄρωμεν τινα τετράγωνον, [ἕξομεν τὸν τρίτον. πλάσσω τὸν τετράγωνον] ἀπὸ ἀριθμῶν δ̄ λείψει μονάδος ᾱ. γίνονται δυνάμεις ιϛ̄ μ° ᾱ λείψει ἀριθμῶν η̄. ταῦτα ἀφαιρῶ ἀπὸ Δ^{Υ} ιϛ̄. λοιπός ἐστι ὁ τρίτος ϛϛ η̄ λείψει μ° ᾱ. καὶ λέλυται ἕτερον ἐπίταγμα. πάλιν ἐπεὶ θέλω τοὺς τρεῖς, τουτέστι ἀριθμοὺς ιγ̄ ἴσους εἶναι τετραγώνῳ. ἔστω Δ^{Υ} ρξθ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δυνάμεις ιγ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος Δ^{Υ} ιγ̄ μ° ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος δυνάμεις νβ̄. ὁ δὲ τρίτος Δ^{Υ} ρδ̄ λείψει μ° ᾱ. καὶ πάλιν λέλυταί μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ἐπιταγμάτων. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον ↑ τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου τετραγώνου λείψας τὸν πρῶτον ποιεῖ Δ^{Υ}Δ ᾱ, ὡς ↑ Δ^{Υ} σκᾱ. ἴσας τετραγώνῳ, καὶ πάντα παρὰ δύναμιν, γίνονται Δ^{Υ} ᾱ, ὡς ↑ μ° σκᾱ ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛϛ ρδ̄ ↑ μ° ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ϛ ρια^{ρδ}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιζ̄. μ° ͵ηπθ$^{ρδ^{ων}}$. ὁ δὲ δεύτερος ξδ̄. μ° ͵χϟβ$^{ρδ^{ων}}$. ὁ δὲ τρίτος ρκζ. ͵φξη$^{ρδ^{ων}}$.

IN QVAESTIONEM XVIII.

OMNIA quæ ad præcedentem dicta sunt, hîc etiam locum habent, vt non opus sit ea repetere. Eodem errore lapsus est Xilander, cùm notam QQ. temerè inseruit loco notæ Q. sed & falsos exhibet numeros solutionis, vt videre est ex comparatione verorum quos in Diophanti contextu reposuimus. Examen quæstionis tale est. Summa trium numerorum fit [illegible] quadratus à latere [illegible]. A quadrato primi qui est [illegible] si auferas secundum, superest quadratus [illegible] à latere [illegible]. A quadrato secundi qui est [illegible] si auferas tertium, superest quadratus [illegible] à latere [illegible]. Denique à quadrato tertij qui est [illegible] si auferas primum, superest quadratus [illegible] à latere [illegible]. Hîc etiam vides in Græco ita exprimi solutionis numeros, vt Myriades à reliquis vnitatibus distinguantur, quod familiare esse Diophanto iam monuimus ad vigesimam secundam tertij.

QVÆSTIO XIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου κύβος προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ο α̅. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μονάδες κυβικαὶ η λεῖψει κ^υ α̅. καὶ γίνεται ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου κύβος προσλαβὼν τὸν δεύτερον, κύβος. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κυβόκυβον α̅ ς^ο α̅ μ^ο ξδ λείψει κ^υ ιϛ. [ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς κ^υ α̅ μ^ο η. τουτέστι κ^υκ^υ α̅ κ^υ ιϛ μ^ο ξδ.] καὶ κοινῶν προστεθειμένων τῶν λειπόντων, καὶ ἀφαιρουμένων τῶν ὁμοίων ἀπὸ τῶν ὁμοίων, λοιποὶ κ^υ λβ ἴσοι ς^ο α̅. καὶ πάντα παρὰ ς^ο· δ^υ λβ ἴσαι μ^ο α̅. καὶ ἔστιν ἡ μ^ο τετράγωνος, καὶ δ^υ λβ εἰ ἦσαν τετράγωνος λελυμένη ἄν μοι ἦν ἡ ἴσωσις. ἀλλ' αἱ δ^υ λβ εἰσὶ δὶς κ^υ ιϛ. οἱ δὲ κ^υ ιϛ εἰσὶν ἀπὸ τοῦ δὶς μ^ο η, καὶ τοῦ κ^υ α̅. τουτέστι δὶς τῶν μ^ο η. ὥστε αἱ λβ δυνάμεις ἐκ τετράκις τῶν η μ^ο. γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν κύβον ὃς τετράκις γενόμενος ποιῇ τετρά-

INVENIRE duos numeros, vt primi cubus adscito secundo faciat cubũ, at secũdi quadratus adscito primo faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secũdus ergo erit 8 − 1 C. & cubus prioris adsumẽs secundũ fit cubus. Restat vt & quadratus secundi adsumpto primo faciat quadratũ, sed secũdi quadratus adsumpto primo facit 1 CC. + 1 N. + 64 − 16 C. hæc æquantur quadrato à latere 1 C. + 8. hoc est 1 CC. + 16 C. + 64. & additis vtrimq; cõmunibus defectibus, & auferẽdo similia à similib. relinquũtur 32 C. æquales 1 N: & omnibus per numerum diuisis 32 Q. æquantur 1. & est 1. quadratus. Quare si 32 Q. esset quadratus, explicari posset æquatio. Sed 32. Q. proueniunt ex duplo 16 C. Ipsi autem 16 C. orti sunt ex duplo producti 8. in 1 C. hoc est ex duplo ipsius 8. Proinde 32 Q. gignuntur ex quadruplo eiusdem 8. Id ergo mihi incumbit, vt inueniam cubum qui quater sumptus faciat qua-

dratum. Esto quæsitus 1 C. hic quater fit 4 C. æquãdus quadrato. Esto 16 Q. fit 1 N. 4. Ad positiones erit cubus 64. Pono itaque secundum 64 − 1 C. & superest vt quadratus secundi adsumpto primo faciat quadratum. Sed quadratus secundi adsumpto primo facit 1 CC. + 4096. + 1 N. − 128 C. hoc ergo æquatur quadrato à latere 1 C. + 64. hoc est 1 CC. + 4096 + 128 C. & relinquuntur 256 C. æquales 1 N. & fit 1 N. $\frac{1}{16}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{1}{4096}$. secundus $\frac{262143}{4096}$.

γωνον. ἔσω ὁ ζητούμενος κ^υ α. οὗτος τετράκις γενόμενος ποιεῖ κ^υ δ ἴσους τετραγώνῳ. ἔσω δ^υ ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ς^ο μ^ο δ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ κύβος μ^ο ξδ. τάσσω ἄρα τὸν δεύτερον μ^ο ξδ λείψει κ^υ α. καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κ^υκ^υ α μ^ο δϙϛ ς^ο α ⋔ κ^υ ρκη. ἴσους τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς κ^υ α μ^ο ξδ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος κ^υκ^υ α μ^ο δϙϛ κ^υ ρκη. καὶ γίνονται λοιποὶ κ^υ σνϛ ἴσοι ἀριθμῷ α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α^{ιϛ}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος α^{ιϛ}. ὁ δὲ δεύτερος κϛ. βρμγ^{δϙϛ}.

IN QVAESTIONEM XIX.

TEXTVS lacunas repleuimus, vt vides; quo præstito parum, aut nihil superest difficultatis in huius quæstionis tractatione. Vnum est quod moneam numeri quadrato æquandi 1 CC. + 4096 + 1 N. − 128 C. latus ingeniosè fingi 1 C. + 64. vt quadrato vtriusque partis fiant 1 CC. + 4096. ac proinde cubocubis & vnitatibus vtrimque sublatis, maneat æquatio inter Cubos & Numeros, vnde fit solutio rationalis, quia prouisum est, vt vtraque Cuborum & Numerorum multitudo sit quadratus Numerus, lemmatis scilicet auxilio, quo reperitur cubus, cuius quadruplum faciat quadratum. Possumus etiam ex ipsa operatione satis expeditum formare Canonem, hac arte.

Sume $\frac{1}{16}$ cuiuslibet cubocubi, & per illius latus quadratum, diuide vnitatem, quotiens erit primus quæsitorum. Huius cubum aufer ab $\frac{1}{64}$ sumpti cubocubi, relinquetur secundus.

Vt sumpto cubocubo 64. erit illius $\frac{1}{16}$. 4. cuius latus 2. per quod si diuidas 1. fit $\frac{1}{2}$ primus quæsitorum, cuius cubum $\frac{1}{8}$ si auferas ab $\frac{1}{64}$ ipsius 64. videlicet ab 1. relinquetur secundus $\frac{7}{8}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{1}{2}$ & $\frac{7}{8}$. Nam primi cubus adsumpto secundo facit cubum 1. At secundi quadratus adsumpto primo, facit quadratum $\frac{81}{64}$.

Quod spectat ad verbum διαχρίειν, quo in hac & in sequenti quæstione, & alibi etiam vsum esse Diophantum existimat Xilander; pro eo quod est quadruplicare; moneo adulterinam vocem librarij inscitia vel oscitantia in textum Diophanti irrepsisse pro vera & germana τετράκις, quam vbique reposui. Porrò erroris ansam præbuit quod hæc vox vt plurimum expressa erat nota quaternarij δ cum κ superscripto, hoc modò δ^κ, vnde διαχρίειν sciolus nescio quis efformauit. Sic propositione ista post illa verba, ὥστε αἱ λβ δυνάμεις ἐκ τετράκις τῶν η μ^ο, statim sequitur in codice manu exarato, γέγονε οὖν μοι εὑρεῖν κύβον, ὃς δ^κ γενόμενος ποιεῖ τετράγωνον. Tum paulò pòst. οὗτος διακεχριμένος γενόμενος, &c. Vbi patet idem esse prorsus quod primo positum est τετράκις, deinde δ^κ. demum διακεχριμένος. Vigesima etiam propositione sequente eadem dictio ter repetitur, vbi euidens est eam loco τετράκις esse positam. Primo enim legitur, ἀλλὰ δὶς οἱ ςς ἐπὶ δὶς τοὺς ςςοις. ὁ διακεχριμένος ὑπὸ τῶν ςς ἐστι. Deinde θέλω οὖν τὸν διακεχριμένον ὑπ᾽ αὐτῶν, &c. Ac demum, ἀλλὰ μὴν ὁ

πάντων δύο ἀριθμῶν ὁ διακεκριμένος ὑπ' αὐτῶν, &c. Vbi etiam, ὁ διακεκριμένος ὑπ' αὐτῶν, mutatur statim in τετράκις ὑπ' αὐτῶν. Sequitur enim ἐὰν οὖν τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν μονάδα μίαν κατασκευάσωμεν, ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῶν, &c. Facessat igitur subreptitia vox, & eius insolentiam cum Xilandro miretur nemo. Equidem me non latet verbum διακρίνειν inter ea quibus vtuntur Arithmetici connumerari à Polluce lib. 4. cap. 22. sed quo sensu soleat vsurpari non docet Pollux. Ego sanè nunquam adducar, vt credam sumi pro eo quod est quadruplicare. Quid autem significet doceant eruditi.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μ° ᾱ. ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ μ° ᾱ ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὴν μ°. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ςς ὅσων δήποτε, καὶ μ° ᾱ. ἔστω ς° ᾱ. μ° ᾱ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ ᾱ ςς β̄. μ° ᾱ. ἐὰν ἀφέλω τὴν μ° ᾱ. λοιπὸν δυ ᾱ. ςς β̄. ἔσται ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. ἔστω ὁ δεύτερος ς° ᾱ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται ς° ᾱ μ° β̄. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον μετὰ μ° ᾱ. ἐὰν ὁμοίως ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω μ° ᾱ. ἕξω τὸν ἀπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου. πεπλάσθω ὁ τετράγωνος ἀπὸ ςς γ̄ μ° ᾱ. ἔσται ὁ τετράγωνος δυ θ̄ ςς ς̄. μ° ᾱ. ἐὰν ἄρα ἀφέλω μ° ᾱ γίνονται δυ θ̄ ςς ς̄. δεῖ ἄρα [τὸν ὑπὸ] δευτέρου, καὶ τρίτου εἶναι δυ θ̄ ςς ς̄. ὧν ὁ δεύτερος ἐστὶ ς° ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς θ̄. μ° ς̄. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ μ° ᾱ. ποιεῖν τετράγωνον. ἔστι δυ θ̄. ςς κδ μ° ιγ̄. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἔχω

INVENIRE tres numeros indefinitè, vt quem bini producunt mutua multiplicatione, adscita vnitate faciat quadratū. Quia volo productum ex primo in secundum addita vnitate facere quadratum, si ab aliquo quadrato abstulero vnitatem, habebo productum ex primo in secūdum. Formo quadratum à numeris quotcunque & vnitate. Esto ab 1 N. + 1. erit is 1 Q. + 2 N. + 1. hinc ablata vnitate, quod superest 1 Q. + 2 N. est productum ex primo in secundum. Esto secundus 1 N. Primus ergo erit 1 N. + 2. Rursus quia volo productum ex secundo in tertium facere quadratum adscita vnitate, si eodem modo ab aliquo quadrato abstulero vnitatem, habebo productum ex secundo in tertium. Formetur quadratus a 3 N. + 1. erit is 9 Q. + 6 N. + 1. vnde ablata vnitate, relinquuntur 9 Q. + 6 N. Oportet ergo productum ex secundo in tertium esse 9 Q. + 6 N. At secundus est 1 N. erit igitur tertius 9 N. + 6. Rursus quia volo productum ex primo in tertium addita vnitate facere quadratum, erit vtique 9 Q. + 24 N. + 13. æqualis quadrato. Et nume-

rus quadratorum est quadratus. Quod si etiam vnitates quadratæ essent, & duplum producti ex latere quadratorum in latus vnitatum æquale esset Numeris, indefinitè iam satisfactum esset tribus postulatis. At vnitates 13. fiunt ducto 2. in 6. & addita vnitate. Porro 2. fit ex 1 N. in 1. bis. At 6. fiunt ex 3 N. in 1. etiam bis. Volo itaque vt bis numeri in bis numeros ducti faciant quadratum adscita vnitate. Sed bis numeri in bis numeros est quadruplum producti ex numeris in numeros. Volo igitur quadruplum hoc addita vnitate facere quadratum. Enimuero quorumcunque duorum numerorum vnius in alterum producti, quadruplum cum quadrato interualli ipsorum facit quadratum. Proinde si quadratum interualli constituamus vnitatem, quadruplum producti adscita vnitate faciet quadratum. Atqui si quadratorum interuallum sit 1. erit & laterum interuallum 1. Oportet ergo formare quadratos à numeris deinceps, puta ab 1 N. + 1. & a 2 N. + 1. Quadratus ab 1 N. + 1. fit 1 Q. + 2 N. + 1. Vnde ablata vnitate relinquitur 1 Q. + 2 N. Quare oportet productum ex primo in secundum esse 1 Q. + 2 N. Ponatur secundus 1 N. ergo primus erit 1 N. + 2. Rursus quia quadratus abs 2 N + 1. est 4 Q. + 4 N. + 1. Vnde sublata vnitate

τὰς δυνάμεις τετραγωνικάς, εἰ δὲ καὶ αἱ μονάδες ἦσαν τετραγωνικαί, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῶν δυνάμεων καὶ τῶν μονάδων ἴσον ἦν τοῖς ἀριθμοῖς, ἦν ἂν ἀορίστως τὰ τρία ἐπιτάγματα λελυμένα. ἀλλ' αἱ μονάδες ιγ. εἰσὶν ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν μο β καὶ μο ϛ. μετὰ μο α. ἀλλ' αἱ μὲν μο β. ἐκ τοῦ δὶς ὑπὸ ς α καὶ μο α. αἱ δὲ μο ϛ πάλιν ἐκ τοῦ δὶς ὑπὸ ςς γ. καὶ μο α. θέλω οὖν δὶς τὸν ςου ἐπὶ δὶς τὸν ςου μετὰ μο α. ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ δὶς οἱ ςοι ἐπὶ δὶς τὸν ςον. ὁ τετράκις ὑπὸ τῶν ςς ἐστί. θέλω οὖν τὸν τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ μο α ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ μὴν καὶ πάντων δύο ἀριθμῶν ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετραγώνου, ποιεῖ τετράγωνον. ἐὰν οὖν τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν μονάδα μίαν κατασκευάσωμεν, ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ μο α ποιεῖ τετράγωνον. εἰ οὖν ὁ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν μο α. καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστὶ μονὰς μία. δεῖ οὖν ἀπὸ τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς ςς πλάσσειν τετραγώνους. ἔστω ἀπὸ ς α μο α. καὶ ἀπὸ ςς β μο α. καὶ ἔσται ὁ μὲν ἀπὸ ς α μο α. τετράγωνος Δυ α. ςς β. μο α. ἐὰν ἀφέλω τὴν μονάδα, λοιπὸς γίνεται δύναμις μία, ςς β. δεῖ ἄρα τὸ ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου εἶναι Δυ α ςς β. τετάχθω ὁ δεύτερος ς α. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ς α μο β. πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ ςς β μο α τετράγωνός ἐστι Δυ δ. ςς δ. μο α. ἐὰν

ὁμοίως ἀφῄρω τὴν μονάδα μίαν λοιπὸς γίνεται δ^ν δ ςς δ. δεῖ δὴ τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου εἶναι δ^ν δ ςς δ. ὧν ὁ δεύτερός ἐστιν ς^ο α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςς δ μ^ο δ. καὶ λέλυται ἐν τῇ ἀορίστῳ, ὥστε τὸν ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μ^ο α ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ὅσου τις θέλει. τὸ γὰρ ἀορίστως ζητεῖν ἐστιν ἵνα ἡ ὑπόστασις τοιαύτη ᾖ, ἵνα ὅσου τις θέλει τὸν ἀριθμὸν εἶναι, ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ποιήσας σώσῃ τὸ ἐπίταγμα.

relinquitur 4 Q. + 4 N. oportet productum ex secundo in tertium esse 4 Q. + 4 N. Sed secundus est 1. N. Ergo tertius erit 4 N. + 4. Atque ita soluta est quæstio indefinitè, vt bini quique mutua multiplicatione producant numerum qui addita vnitate fiat, quadratus. Et fit 1 N. quot quis voluerit vnitatum. Hoc enim est indefinitè quærere, cùm ita positiones instituuntur, vt quamcunque numeri æstimationem iis accommodes, semper postulatis satisfiat.

IN QVAESTIONEM XX.

LEMMA quod assumit Diophantus, nimirum. Quorumcunque duorum numerorum vnius in alterum producti quadruplum cum quadrato interualli ipsorum, facit quadratum, idem est prorsus cum quinta secundi porismatum, per quam constat etiam fieri inde quadratum summæ ipsorum numerorum. Vnde optimè concludit Diophantus, si Numeri vnitate distent, quadruplum producti eorum adscita vnitate facere quadratum. Sed & hinc colligo vniuersalius.

Si quadruplum producti duorum numerorum vnitate distantium ducatur in quemlibet quadratum, & producto addatur idem quadratus, fit quadratus.

Hoc enim nil aliud est quàm quadratum summæ duorum numerorum vnitate distantium ducere in alium quadratum. Quamobrem inde produci quadratum necesse est. Ita si sedecuplo producti addas 4. fiet quadratus, hoc enim idem est ac ducere quadratum summæ numerorum in 4. At si trigecuplo sesculpo producti addas 9. fiet etiam quadratus, hoc enim idem est ac ducere quadratum summæ numerorum in 9. & sic de alus.

Cæterùm si quid obscuritatis est in huius quæstionis tractatione, hoc vnum esse videtur, quòd non statim apparet quomodo positionibus trium numerorum sumptis à quadratis continenter proximis, constet productum ex primo in tertium adscita vnitate facere, quadratum. Hoc ergo vt perfectè demonstretur, sit primus A + B. tertius C + D. (nam secundus semper ponitur 1 N.) & methodo à Diophanto tradita sint A & C. Numerorum numeri quadrati continenter proximi. Ipsi verò B D sint vnitatum numeri dupli laterum ipsorum A C.

A 4 N. + B 4. H 2.
C 9 N. + D 6. K 3.
E 36 Q. + F 60 N. + G 25.

Ductoque A in C. fiat E quadratorum numerus, ductisque A in D. & B in C. fiat summa productorum F Numerorum numerus. Denique ducto B in D. & producto addendo vnitatum fiant G. vnitates. dico ipsum E + F + G. esse quadratum. Hoc vt probetur, oportet ostendere ipsos E. G. quadratos esse, & ex latere vnius in latus alterius bis produci F. sic enim per quartam secundi totum EFG quadratum esse constabit. Itaque cùm numeri Numerorum A C quadrati sint continenter proximi, sumantur eorum latera H K quæ vnitate distent. Primùm igitur patet ex quadrato A in quadratum C. productum E esse quadratum, cuius latus est productus ex H in K. Secundo, quia B duplus est ad H, & D ad K. productus ex B in D adscita vnitate, puta G. æqua-

tur quadruplo producti ex H. in K adscitavnitate. Igitur G. quadratus est per lemma supra explicatum, cuius latus est summa ipsorum H K. Denique quia F constat productis ex A in D & ex C in B. seu ex A in K bis, & ex C. in H. bis. At producti ex A in K & ex C in H. semel [a] æquantur productis ex summa ipso- 18. 2. po-
rum H K in planum sub ipsis contentum, ac proinde summa productorum ex A rif.
in D. & ex C in B. seu F æquatur duplo producti ex summa ipsorum H K in planum sub ipsis, latus autem ipsius G est summa ipsorum H K, & latus ipsius E est planus sub H K continens, vt ostensum est, patet F produci ex latere ipsius E in latus ipsius G bis. Quamobrem totus E F G quadratus est, cuius latus constat ex lateribus ipsorum E G. Quod erat demonstrandum.

Hinc apparet posito secundo semper 1 N. positiones primi & tertij infinitis modis posse variari, dum sumantur duo numeri Numerorum quadrati, quorum latera vnitate distent, & his addantur vnitates quę sint duplum lateris cuiuslibet. Sic posuit eos Diophantus 1 N. + 2. & 4 N. + 4. Poni etiam poterant 4 N. + 4. & 9 N. + 6. vel adhuc 9 N. + 6. & 16 N. + 8. & sic in infinitum.

Hanc autem quæstionem si libet non soli vnitati applicabis, sed ad quemlibet quadratum extendes eodem prorsus artificio, ampliando lemma Diophanti, vt suprà docuimus. Verbi gratia, quærantur indefinitè tres numeri, vt bini quem producent mutuo ductu is adscito 9. faciat quadratum. Vt habeas productum ex primo in secundum, aufer 9. ab aliquo quadrato, cuius latus sit quotcunque Numerorum + 3. sit latus 1 N. + 3. erit quadratus 1 Q. + 6 N. + 9. Ergo productus ex primo in secundum erit 1 Q. + 6 N. sit secundus 1 N. erit igitur primus 1 N. + 6. Rursus vt habeas tertium, finge quadratum à latere 2 N. + 3. (vt scilicet numerus Numerorum superet vnitate numerum Numerorum lateris prioris quadrati) erit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. vnde auferendo 9. manet productus ex secundo in tertium 4 Q. + 12 N. Quare cùm secundus sit 1 N. erit tertius 4 N. + 12. Igitur tres numeri quæstionem infinitè soluentes sunt 1 N. + 6. 1 N. 4 N. + 12. Porro lemma Diophanti hîc ampliari intelligitur modo supra tradito, nam patet 6. vnitates primi Numeri esse sescuplum numerorum lateris prioris quadrati, & 12. vnitates tertij Numeri esse sescuplum Numerorum posterioris quadrati. Quare cùm productus ex sescuplo vnius numeri in sescuplum alterius, sit æquale trigecuplo sescuplo producti eorundem numerorum, patet hîc supponi, trigecuplum sescuplum producti duorum numerorum vnitate distantium, adscito 9. facere quadratum, quod sanè concluditur per supradictum lemma.

Hæc quidem Diophanti vestigiis insistendo facilè fuit excogitare. Verùm si propositum sit inuenire tres numeros indefinitè, vt bini quem producunt mutuo ductu, is adscito quocunque numero quadratum faciat: iam non licebit Diophantæam analysim imitari. Nec fortè temerarium fuerit asserere huius problematis enodationem ipsum ignorasse Diophantum, quod mirum non est, quandoquidem, vt verissimè cecinit poëta, Non omnia possumus omnes. Nobis tamen ope Canonum ad duodecimam tertij traditorum, rem absoluere pronum erit. Etenim sit propositum quærere indefinitè tres numeros, vt bini quem producunt adscito 6. faciat quadratum. Fingantur duo quadrati à quotlibet numeris Numerorum diuersis + eodem numero vnitatum, cuius quadratus superet 6. puta fingantur quadrati à lateribus 1 N. + 3. & 2 N. + 3. erunt hi 1 Q. + 6 N. + 9. & 4 Q. + 12 N. + 9. auferatur 6. ab vtroque, & residua diuidantur per interuallum laterum quod est 1 N. fiet ergo primus quæsitorum 1 N. + 6 + $\frac{3}{1N}$. secundus 4 N. + 12 + $\frac{3}{1N}$. tertius 1 N. qui satisfaciunt postulatis ex Canone primo duodecimæ tertij. vel iisdem manentibus primo & secundo, erit tertius duplum summæ illorum multatum laterum interuallo 1 N. puta 9 N. + 36 + $\frac{12}{1N}$. vt constat ex secundo Canone. Eadem arte per Canones ad decimam tertiam tertij traditos licebit & hanc soluere quæstionem.

Inuenire tres numeros indefinitè, vt quem bini producunt mutuo ductu, detracto quouis dato numero quadratum relinquat.

Datus esto 10.

Fingantur duo quadrati, alter à quotlibet vnitatibus, alter ab 1 N. + latere prio-

ris. Sint igitur latera 1. & 1 N. + 1. erunt quadrati 1. & 1 Q. + 2 N. + 1. Vtrique addatur 10. & summæ diuidantur sigillatim per laterum interuallum 1 N. Eritque primus quæsitorum $\frac{11}{1N}$. secundus 1 N. + 2 + $\frac{11}{1N}$. tertius horum summæ duplum multatum 1 N. puta 1 N. + 4 + $\frac{22}{1N}$. vel iisdem manentibus primo & secundo, erit tertius ipsum interuallum laterum, nimirum 1 N.

QVÆSTIO XXI.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μονάδα μίαν, ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου μετὰ μονάδος μιᾶς, εἶναι τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου, ἄρω μ° α. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ςος α μ° α. καὶ γίνεται αὐτὸς ὁ τετράγωνος Δυ α ςς β μ° α. ἐὰν ἀφέλω τὴν μ° α. λοιπὸς γίνεται Δυ μία ςςοὶ β. ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. ἔστω ὁ πρῶτος ςος α. [ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται ςος α μ° β.] πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μετὰ μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ςς β μ° α τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς διὰ τὸ προδειχθὲν, καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ. αἴρω τὴν μονάδα α. καὶ τάσσω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου δυνάμεις δ ςς δ. ὧν ὁ πρῶτος ἐστὶ ςος α. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἐστὶν ςς δ μ° δ. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τετάρτου μετὰ μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς ςς γ μ° α. καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ, καὶ ἀφελὼν μ° α. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τετάρτου Δυ θ ςςοὶ ς. ὧν ὁ πρῶτός ἐστιν ἀριθμὸς α. λοιπὸς ἄρα ὁ τέταρτος ἔσται ςς θ μ° ς. καὶ

INVENIRE quatuor numeros, vt qui fit ex binorum mutua multiplicatione adscita vnitate faciat quadratum. Quia volo productum ex primo in secundum cum vnitate facere quadratum, si ab aliquo quadrato detraxero vnitatem, habebo productum ex primo in secundum. Formo quadratum ab 1 N. + 1. & fit 1 Q. + 2 N. + 1. hinc aufero vnitatem, restant 1 Q. + 2 N. pro producto ex primo in secundum esto primus 1 N. ergo secundus erit 1 N. + 2. Rursus quia volo productum ex primo in tertium cum vnitate facere quadratum, formo quadratum abs 2 N. + 1. nimirum à numeris continenter proximis, ob ea quæ supra demonstrata sunt, & ab illius quadrato, aufero vnitatem, & statuo productum ex primo in tertium 4 Q. + 4 N. Quarecùm primus sit 1 N. erit vtique tertius 4 N. + 4. Rursus quia volo productim ex primo in quartum cum vnitate facere quadratum, formo quadratum à numeris continenter proximis, nimirum à 3 N. + 1. & à quadrato sublata vnitate statuo productum ex primo in quartum 9 Q. + 6 N. Proinde cùm primus sit 1 N. erit quartus 9 N. + 6. &

con-

contingit præterea productum ex tertio in quartum cum vnitate facere quadratum. Cæterùm ex secundo in quartum productus addita vnitate facit 9 Q. + 24 N. + 13. Hoc ergo æquandum quadrato, esto latus 3 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{1}{16}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{1}{16}$. secundus $\frac{33}{16}$. tertius $\frac{68}{16}$. quartus $\frac{105}{16}$.

ἔτι συμβαίνει τὸν ὑπὸ τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου μετὰ μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ὁ ἀπὸ δευτέρου καὶ τετάρτου μετὰ μ° α. ποιεῖ δυνάμεις θ ςς^οι κδ. μ° ιγ ἴσας τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς γ λεῖψει μ° δ. καὶ γίνεται ὁ ς° α ις^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος α ις^ων. ὁ δὲ δεύτερος λγ ις^ων. ὁ δὲ τρίτος ξη ις^ων. ὁ δὲ τέταρτος ρε ις^ων.

IN QVAESTIONEM XXI.

NON apparet ex verbis Diophanti quomodo producti ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum adscita vnitate quadratum faciant. Id autem omisit quasi euidens ex lemmate præcedentis quia secundus, tertius & quartus finguntur à quadratis continenter proximis, vnde sequitur ex supra demonstratis productos ex duobus proximis, videlicet ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum addita vnitate facere quadratos. Quamobrem cùm etiam ex constructione manifestum sit productos ex primo in singulos ex aliis addita vnitate facere quadratos, vnum sane restat curandum, vt scilicet productus ex secundo in quartum adscita vnitate fiat quadratus. Fit autem 9 Q. + 24 N. + 13. hoc ego æquabimus quadrato à latere 3 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 13. vt à 3. N. − 4. cum Diophanto.

Hæc etiam quæstio ad quemlibet quadratum extendi potest, eodem artificio quo præcedens. verbi gratia. Quærantur quatuor numeri, vt bini quem producunt adsumpto 4. quadratus fiat. Posito primo 1 N. fingantur quadrati à lateribus 1 N. + 2. 2 N. + 2. 3 N. + 2. erunt hi 1 Q. + 4 N. + 4. 4 Q. + 8 N. + 4. 9 Q. + 12 N. + 4. A singulis auferatur 4. & erit productus ex primo in secundum 1 Q. + 4 N. ex primo in tertium 4 Q. + 8 N. ex primo in quartum 9 Q. + 12 N. Quare cùm primus sit 1 N. erit secundus 1 N. + 4. tertius 4 N. + 8. quartus 9 N. + 12. & quidem tam ex constructione, quàm ex demonstratis ad præcedentem, constat productos ex primo in singulos ex aliis, itemque productos ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum adsumpto 4. facere quadratos. Superest igitur vt productus ex secundo in quartum adscito 4. faciat quadratum. Sed facit 9 Q. + 48 N. + 52. hoc ergo æquatur quadrato sit eius latus 3 N. − 8 fit 1 N. $\frac{1}{8}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{1}{8}$. $\frac{33}{8}$. $\frac{17}{2}$. $\frac{105}{8}$. Producti ex primo in reliquos, adscito 4. faciunt quadratos $\frac{289}{64}$. $\frac{81}{16}$. $\frac{361}{64}$. quorum latera $\frac{17}{8}$. $\frac{9}{4}$. $\frac{19}{8}$. Producti ex secundo in tertium & quartum adsumpto 4. faciunt quadratos $\frac{625}{16}$. $\frac{3721}{64}$. quorum latera $\frac{25}{4}$. $\frac{61}{8}$. Denique productus ex tertio in quartum adscito 4. quadratum facit $\frac{1849}{16}$, cuius latus $\frac{43}{4}$.

Cæterùm quomodo in vniuersum solui possit huiusmodi quæstio, vt scilicet productus ex binorum mutuo ductu adscito quocũque dato numero faciat quadratum, colligi non potest ex Diophanto, & id eum latuisse audacter asserere ausim, alioquin non in sola vnitate vel in solis quadratis perfecisset, quod in omnibus numeris absoluere poterat. Nos pulcherrimum hoc problema explicauimus ad duodecimam tertij. Et rursus idem perfecimus additione in detractionem mutata ad decimam tertiam eiusdem.

QVÆSTIO XXII.

INVENIRE tres numeros proportionales, vt duorum quorumlibet interuallum sit quadratus numerus. Ponatur

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἀνάλογον, ὅπως δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. τετάχθω ὁ

μὲν ἐλάσσων ς^ος α. ὁ δὲ μέσος ς^ος α. μ^ο δ. ἵνα ἡ ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. ὁ δὲ τρίτος ς^ος α. μ^ο ιγ. ἵνα καὶ ἡ τούτου πρὸς τὸν μέσον ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. ἔτι δὲ εἰ τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος, ἦν ἂν ἀναλελυμένον ἐν τῷ ἀορίστῳ, δύο ὁποιωνοῦν, ἡ ὑπεροχὴ τετράγωνος. ὁ δὲ μέγιστος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει μ^ο ιγ. αἱ δὲ μονάδες ιγ. σύνθεμα εἰσὶ τετραγώνων τοῦ δ. καὶ τοῦ θ. γέγονεν οὖν μοι αἱρεῖν δύο τετραγώνους ἴσους ἑνὶ τετραγώνῳ· τοῦτο δὲ ῥᾴδιον ἀπὸ τριγώνου ὀρθογωνίου. ἔστι δὲ ὁ θ. καὶ ὁ ις. καὶ τάσσω τὸν μὲν ἐλάχιστον ς^ου α. τὸν δὲ μέσον ς^ου α μ^ο θ. τὸν δὲ τρίτον ς^ου α. μ^ο κε. καὶ δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχή ἐστι τετράγωνος. λοιπόν ἐστι αὐτοὺς ἀνάλογον εἶναι. ἐὰν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, τουτέστι ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἐστὶ δ^υ α ςς κε. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ μέσου δ^υ α ςς ιη μ^ο πα. ἴσαι δ^υ α ςς^οις κε. καὶ γίνεται ὁ ς^ος πα ζ^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος πα ζ^ων. ὁ δὲ δεύτερος ρμδ ζ^ων. ὁ δὲ τρίτος σνς ζ^ων.

minor 1 N. Medius 1 N. + 4. vt interuallum sit quadratus. Tertius autem sit 1 N. + 13. vt & huius excessus supra medium sit quadratus. Porrò si maximi & minimi differentia esset quadratus, iam indefinitè satisfactum esset parti quæstionis qua postulatur, vt differentia duorum quorumlibet sit quadratus. At maximus minimum superat vnitatibus 13. & 13. est summa quadratorum 4. & 9. Quærendi igitur sunt duo quadrati æquales quadrato. Quod facilè fit trianguli rectanguli sumptis lateribus, suntque 9. & 16. statuo minimum 1 N. Medium 1 N. + 9. tertium 1 N. + 25. & sic duorum quorumlibet interuallum quadratus est. Superest vt ipsi sint proportionales. At cùm tres numeri proportionales sunt, qui sub extremis continetur æqualis est quadrato medij, sed contentus sub maximo & minimo, hoc est sub extremis est 1 Q. + 25 N. Quadratus autem medij est 1 Q. + 18 N. + 81. Hæc ergo æquantur inter se, & fit 1 N. $\frac{81}{7}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{81}{7}$. secundus $\frac{144}{7}$. tertius $\frac{256}{7}$.

IN QVAESTIONEM XX.

TOTA diuersitas solutionum pendet hîc à duobus quadratis qui simul iuncti quadratum efficiant, nam si vtaris iisdem, eadem semper continget solutio quamuis pro primo quæsitorum numerorum statuas quemlibet Numerorum numerum, sic quamuis statuas quæsitos numeros 3 N. 3 N. + 9. & 3 N. + 25. eandem solutionē inuenies quam reperit Diophantus positis iisdem numeris 1 N. 1 N. + 9. & 1 N. + 25. & sic quantumuis varietur primus, dum in secundo & tertio ponantur iidem quadrati 9. & 25. eadem continget solutio, quod patet experientia, & facile est demonstrare.

Cæterùm est quod moneam ex duobus quadratis qui simul quadratum conficiunt, minorem statuendum in medio numero, non autem maiorem, sic Diophan-

tus medium posuit 1 N. + 9. non 1 N. + 16. Quamuis posito eo 1 N. + 16. tribus quoque postulati partibus satisfiat, cùm binorum interuallum sit quadratus. Sed in æquatione qua medij quadratus æquatur plano sub extremis, inueniuntur tandem 32 N. + 256. æquales 25 N. Quod est impossibile, quia 32 N. sunt plus quàm 25 N. fiunt autem 32 N. ex duplo quadrati 16. qui positus est in medio, at 25 N. est summa quadratorum 16. & 9. Oportet igitur duplum quadrati qui ponitur in medio minus esse summa quadratorum, quare oportet minorem quadratum collocari in medio. Quandoquidem duplum maioris duorum numerorum excedit summam ipsorum, sicut duplum minoris deficit ab eadem summa. Porrò ex ipsa operatione elicitur Canon facillimus.

Sume duos quadratos quadratum conficientes, per horum interuallum diuide quadratum minoris quadrati, orietur primus quæsitorum. Cui si addas minorem quadratum, fiet secundus. Et huic si addas maiorem quadratum, fiet tertius.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE tres numeros, vt solidus sub ipsis contentus adscito quolibet ipsorum faciat quadratum. Ponatur solidus sub ipsis contentus 1 Q. + 2 N. & primus 1. vt solidus ascito primo faciat quadratum. Rursus quia volo solidum sub tribus contentum cum secundo facere quadratum, si ab aliquo quadrato detraxero 1 Q. + 2 N. habebo secundum. Formo quadratum ab 1 N. + 3. huius quadratus detractis 1 Q. + 2 N. facit 4 N. + 9. Pono ergo secundum 4 N. + 9. Iam cùm solidus sub tribus contentus sit 1 Q. + 2 N. & ex primo in secundum producatur 4 N. + 9. si diuidamus 1 Q. + 2 N. per 4 N. + 9. habebimus tertium. Verùm hæc diuisio non est possibilis. Vt autem fieri possit curandum est vt se habeat 1 Q. ad 4 N. sicut 2 N. ad 9. & permutatim 1 Q. ad 2 N. sicut 4 N. ad 9. at 1 Q. semissis est (quantum ad vnitates attinet) de 2 N. vt si 4 N. quoque eodem modo fuissent semissis ex 9.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δʸ α̅ ςς β̅. ὁ δὲ πρῶτος μ° α̅. ἵνα ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς μετὰ τοῦ πρώτου ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν μετὰ τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω δυνάμιν α̅ ςς β̅. ἕξω τὸν δεύτερον. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ςῶν α̅ μ° γ̅. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος λείψει δʸ α̅ ςς β̅. ποιεῖ ςς δ̅ μ° θ̅. τάσσω οὖν τὸν δεύτερον ςς δ̅ μ° θ̅. ἀλλ' ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δʸ α̅ ςς β̅. ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ςς δ̅ μ° θ̅. ἐὰν ἄρα δʸ α̅ ςς β̅. παραβάλλω παρὰ ςς δ̅ μ° θ̅. ἕξω τὸν τρίτον. οὐ δυνατὴ δὲ ἡ παραβολή, ἵνα δὲ δύνηται ἡ παραβολή, δεῖ εἰδέναι ὡς δʸ μία πρὸς ςς δ̅. οὕτως ςς β̅ πρὸς μονάδας θ̅. καὶ ἐναλλάξ. ὡς δʸ μία πρὸς ςς β̅. οὕτως ςς δ̅ πρὸς μ° θ̅. ἡ δὲ δύναμις μία τῶν ςς β̅. ἥμισύ ἐστιν τῷ πλήθει. ὡς εἰ οὖν καὶ ςς δ̅ τῶν μ° θ̅ ἥμισυς ὦσι.

ἦν ἂν [δυνατὴ] ἡ παραβολή. ἀλλὰ οἱ ςς δ ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν, ἧς ὑπερέχουσιν ςς ϛ δυσὶν ἀριθμοῖς, ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ ϛ ἐκ τοῦ δὶς εἰσιν, ὑπὸ μ° τριῶν καὶ ς α. τουτέστι δὶς τῶν μ° τριῶν. αἱ δὲ μ° θ. ὁ ἀπὸ μ° τριῶν ἐστὶ τετράγωνος. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμόν, ὡς τὰς μονάδας τρεῖς, ὅστις δὶς γενόμενος, καὶ λείψας δυάδα τὸ ἥμισυ ᾖ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου. ἔστω ὁ ζητούμενος ς ἑνός. οὗτος δὶς γενόμενος καὶ λείψας δυάδα, γίνεται ςς β λείψει μ° β. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνός ἐστι δ^υ α. θέλομεν οὖν ἀριθμοὺς β λείψει μ° β. τὸ ἥμισυ εἶναι δ^υ α. δυνάμεις ἄρα α ἴση ςς δ λείψει μ° δ. καὶ γίνεται ὁ ς β. νῦν ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ εἶχον τὸν μὲν πρῶτον ἀριθμὸν μ° α. τὸ δὲ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν δ^υ α ςς β. δεῖ δὲ καὶ τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὸ δ^υ α ςς β. ἕξω τὸν δεύτερον. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ς α. καὶ μονάδων τοσούτων, ἵνα αἱ μονάδες δὶς γενόμεναι καὶ λείψασαι δυάδα, ἥμισυ ᾖ τοῦ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνου, καὶ προδέδεικται, καὶ ἔστι μ° β. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ς α μ° β. ἔσται ἄρα δ^υ α ςς δ μ° δ. ἐὰν ἄρα τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεόν, τουτέστι δ^υ α ςς β λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ δεύτερος ςς β μ° δ. [εἰ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τριῶν στερεὸν μερίσω εἰς τὸν] ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, τουτέστι εἰς ἀριθμοὺς β μ° δ. ἕξω τὸν τρίτον, καὶ ἔστιν ὁ μερισμὸς ς τὸ ἥμισυ.

institui posset diuisio. Atqui 4 N. oriuntur ex eo quo 6 N. superant 2 N. Sed 6 N. orti sunt ex duplo eius quod fit ex 3. in 1 N. hoc est ex duplo ternarij. Vnitates autem 9. est quadratus de 3. Cogor igitur inuenire numerum loco ipsius 3. cuius duplum multatum binario sit semissis quadrati ipsius numeri. Esto quæsitus 1 N. Huius duplum binario multatum est 2 N. – 2. quadratus autem eiusdem est 1 Q. Volumus igitur 2 N. – 2. esse dimidium de 1 Q. Proinde 1 Q. æquatur 4 N. – 4. & fit 1 N. 2. Reuertor nunc ad primò propositum. Posueram primum 1. solidum autem sub tribus contentum 1 Q. + 2 N. Oportet autem solidum adsumpto secundo facere quadratum. Ergo si ab aliquo quadrato subduxero 1 Q. + 2 N. habebo secundum. Formo quadratum ab 1 N. & tot vnitaribus, vt duplum vnitatum dempto binario fit dimidium quadrati earum, eas autem iam ostensum est esse 2. Formo ergo quadratum ab 1 N. + 2. is est 1 Q. + 4 N. + 4. Aufero hinc solidum sub tribus contentum, nimirum 1 Q. + 2 N. relinquitur secundus 2 N. + 4. Itaque si solidum sub tribus contentum diuido per productum ex primo in secundum, nempe per 2 N. + 4. habeo tertium, nimirum ½ N.

Restat vt solidus sub tribus contentus adscito tertio faciat quadratum, sed solidus ille adscito tertio facit 1 Q. + 2 ½ N. Hoc ergo æquatur quadrato 4 Q. & fit 1 N. $\frac{5}{6}$ Ad positiones. Erit primus [illegible]. secundus [illegible]. tertius [illegible].

καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τριῶν στερεὸν μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς μετὰ τοῦ τρίτου ἐστὶ δυνάμεις α̅ ἀριθμοὶ β̅ καὶ ἥμισυ. ἴσος τετραγώνῳ δυνάμεων δ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̅ ϛ^{ων}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϛ̅ ϛ^{ων}. ὁ δὲ δεύτερος λδ̅ ϛ^{ων}. ὁ δὲ τρίτος β̅ ϛ^{ων} καὶ ἥμισυ.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OPERATIO Diophanti subtilis est, sed tamen perspicua. Lemma quo quærit numerum, cuius duplum binario multatum sit semissis quadrati eiusdem numeri, soluitur per tertiam regulam compositarum, nam manent 4 N. æquales 1 Q. + 4. & quia quadratus semissis Numerorum æquatur vnitatibus, sequitur ipsum semissem Numerorum esse valorem Numeri, vt liquet ex ipsius regulæ demonstratione. Verùm alicui non immeritò videri possit casu quodam fieri vt lemmatis huius solutio contingat rationalis, cùm regulæ compositæ si nulla cautio adhibeatur solutionem vt plurimum exhibeant irrationalem. Quamobrem vt hoc scrupulo careamus, aliam placet tradere operationem similem prorsus illi qua in sequenti quæstione vtitur Diophantus. Ponatur primus numerus 1 N. solidus autem sub tribus contentus esto 1 Q. − 1 N. sic enim primo adsumpto fiet quadratus. Iam si solidus sub tribus contentus per primum diuidatur, quotiens 1 N. − 1. erit productus ex secundo in tertium. Ponatur secundus 1. erit tertius 1 N. − 1. Superest vt solidus 1 Q. − 1 N. tam secundo quàm tertio adscito faciat quadratum. At secundo adscito facit 1 Q. + 1 − 1 N. adscito tertio facit 1 Q. − 1. vterque igitur æquatur quadrato. Hîc iam duplicata occurrit æqualitas, quæ resoluenda est modo quem ad decimam quintam tertij explicauimus, quoque rursus vsus est Diophantus vigesima & vigesima prima eiusdem. Horum videlicet interuallum est 2 − 1 N. proinde quæro duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat ita vt tam in semisse summæ ipsorum, quàm interualli, inueniatur 1 N. sunt hi ½ & 4 − 2 N. horum summæ semissis quadratus æquatur 1 Q. + 1 − 1 N. & fit 1 N. $\frac{65}{56}$. tantus est primus, secundus 1. tertius $\frac{9}{56}$ qui soluunt quæstionem. Nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{585}{3136}$, qui adsumens sigillatim ipsos tres numeros, facit quadratus $\frac{4225}{3136}$. $\frac{3721}{3136}$. $\frac{1089}{3136}$. quorum latera sunt $\frac{65}{56}$. $\frac{61}{56}$. $\frac{33}{56}$.

Quoniam verò siue ita opereris, siue secundum Diophantum, semper vnus quæsitorum ponitur vnitas, placet explicare modum quo perficiatur operatio Diophanti, & reddatur vniuersalior, ita vt primus statuatur quilibet quadratus numerus, & absque lemmate illo quo ad regulas compositas deuenitur, instituantur commodè positiones secundi & tertij. Ponatur ergo primus, quilibet quadratus puta 9. & fingatur quadratus ab 1 N. + 3. is erit 1 Q. + 6 N. + 9. vnde auferendo 9. statuatur 1 Q. + 6 N. pro solido sub tribus numeris contento. Itaque quoniam primus est 9. oportet talem statui secundum, vt eo ducto in 9. per productum diuidi possit solidus 1 Q. + 6 N. vt oriatur ex hac diuisione tertius. Fingatur igitur quadratus ab 1 N. + 6. (tot scilicet vnitatibus quot sunt Numeri in solido, sicut fecit Diophantus, estque hæc regula generalis) erit is 1 Q. + 12 N. + 36. vnde auferendo solidum, restat secundus 6 N. + 36. quo ducto in primum 9. fit 54 N. + 324. per quem si diuidas solidum 1 Q. + 6 N. oritur tertius $\frac{1}{54}$ N. Superest igitur vt solidus adsumpto tertio faciat quadratum, facit autem 1 Q. + 6 $\frac{1}{54}$ N. hoc ergo æquatur quadrato, Esto quadrato 2 ¼ Q. fiet 1 N. $\frac{130}{27}$. Ad positiones. Erit primus 9. secundus $\frac{1752}{27}$ tertius $\frac{65}{729}$. qui soluunt quæstionem. Nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{341640}{6561}$ qui ad adsumens sigillatim ipsos tres numeros, facit quadratos $\frac{400689}{6561}$. $\frac{767376}{6561}$. $\frac{342225}{6561}$. quorum latera $\frac{633}{81}$. $\frac{876}{81}$. $\frac{585}{81}$.

Porrò ne quis supersit dubitandi locus, positionibus ita institutis, diuisionem so-

lidi per productum ex primo in secundum semper commodè fieri (in quo totum negotium consistit) sic demonstrabitur. Sit solidus 1 Q. + A certo Numerorum numero & semissis numeri A quadratus esto D. primus quæsitorum numerorum. Tum fingatur quadratus ab 1 N. + A. qui sit 1 Q. + B + C. patet ergo numerorum Numerum B. esse duplum ipsius A. & vnitates C. esse quadratum numeri A. Quare cùm auferetur solidus 1 Q. + A. à quadrato 1 Q. + B + C. relinquetur E + C. eritque E. æqualis ipsi A. cùm supersit E. auferendo A. ex B. duplo sui. Cæterùm constat ex modo operandi tradito E. + C. fore hypostasim secundi Numeri. Ducatur ergo primus D. in secundum E + C. & fiat F + G. dico per hoc productum commodè diuidi solidum 1 Q. + A. hoc est eandem esse rationem 1 Q. ad F. quæ est A ad G. Nam quoad specierum denominationes spectat patet quadratos ad Numeros se habere vt Numeri ad vnitates. Quare restat vt probetur ipsos numeros à speciebus denominatos eandem quoque seruare rationem, hoc est esse 1 ad F. sicut A ad G. Quia igitur ducto eodem D. in ipsos E C. fiunt F G. erit F. ad G. vt E. ad C. hoc est vt A. ad C. (cùm A E. ostensi sint æquales) sed vt A. ad suum quadratum C. ita & vnitas ad A. Igitur vt 1. ad A. sic & F. ad G. & permutando vt 1. ad F. sic A ad G. Quod erat demonstrandum.

1 Q. + A 6 N. D 9.
1 Q. + B 12 N. + C. 36.
E 6 N. + C. 36.
F 54 N. + G 324.

QVÆSTIO XXIV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς λείψας ἕκαστον, ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς α. ὁ δὲ ἐκ τριῶν στερεὸς δυ α ς α. καὶ λείψας τὸν πρῶτον ποιεῖ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δυ α ἀριθμὸς α. ὁ δὲ πρῶτός ἐστι ς α. ὁ ἄρα ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου ἔσται ς α μο α. ἔστω ὁ δεύτερος μο α. λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ τρίτος ς α μο α. λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν λείποντα τὸν δεύτερον καὶ τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. λιπὸν δὲ ὃν μὲν ποιεῖ δυ α ς α ⋔ μο α ἴσον τετραγώνῳ. ὃν δὲ δυ α ⋔ μο α ἴσον τετραγώνῳ, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, καὶ λαμβάνω τὴν ὑπεροχήν· ἔστι δὲ ς α. ἐκτίθεμαι ἀριθμοὺς δύο, ὧν τὸ ὑπὸ τηλικοῦτός ἐστι. τούτων ς α. μετρείτω μο τὸ ἥμισυ κατὰ ςςου β. τουτέστι κατὰ πλευρὰς δύο τῆς δυνάμεως. καὶ ἔστιν αὐτὴ ὡς οἶδας ἡ ἴσωσις. καὶ γίνεται ὁ ς μο ιζ.. ἐπὶ τὰς

INVENIRE tres numeros, vt solidus sub ipsis contentus dempto quolibet ipsorum faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. solidus autem 1 Q. + 1 N. & dempto primo facit quadratum. Et quia solidus sub tribus est 1 Q. + 1 N. at primus 1 N. erit productus ex secundo in tertium 1 N. + 1. esto secundus 1. ergo tertius erit 1 N. + 1. Superest vt solidus sub tribus dempto tam secundo quàm tertio faciat quadratum. Dempto verò secundo facit 1 Q. + 1 N. − 1. æqualem quadrato, at dempto tertio facit 1 Q. − 1. æqualem quadrato. Et existit duplicata æqualitas. Capio interuallum quod est 1 N. & expono duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat, ij sunt qui metiuntur 1 N. nimirum $\frac{1}{2}$ & 2 N. quod est duplum lateris quadrati. Est ergo quam nosti æquatio, & fit 1 N. $\frac{17}{8}$. Ad posi-

tiones. Erit primus $\frac{17}{[illegible]}$. secundus 1. tertius $\frac{25}{[illegible]}$.

ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιζ ... ὁ δὲ δεύτερος μο α. ὁ δὲ τρίτος μο κε ...

IN QVAESTIONEM XXIV.

OPERATIO Diophanti facilis est, & vtitur duplicata æqualitate modo quem explicauimus ad decimam quintam tertij. Cæterùm moneo secundum poni posse non tantùm 1. sed & quemlibet vnitatum numerum. Ponatur verbi gratia 2. cùm igitur productus ex secundo in tertium sit 1 N. + 1. erit tertius $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$. Solidus autem 1 Q. + 1 N. detracto tam secundo quàm tertio fiet, hinc 1 Q. + 1 N. − 2. inde 1 Q. + $\frac{1}{2}$ N. − $\frac{1}{2}$. quorum vterque quadrato æquandus est. eorum interuallum est $\frac{1}{2}$ N. − 1 $\frac{1}{2}$. quod producunt mutuo ductu 2 N. − 6. & $\frac{1}{4}$. horum summæ semissis quadratus 1 Q. − $\frac{23}{4}$ N. + $\frac{529}{64}$. æqualis est 1 Q. + 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{73}{48}$. tantus est primus, secundus 2. tertius $\frac{121}{96}$. qui soluunt quæstionem, nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{8833}{2304}$. qui detractis sigillatim ipsis tribus numeris, facit quadratos $\frac{5329}{2304}$. $\frac{4225}{2304}$. $\frac{5929}{2304}$. quorum latera $\frac{73}{48}$. $\frac{65}{48}$. $\frac{77}{48}$.

Sed & quadratorum numerus qui ponitur in solido, pro arbitrio variari potest, dum ponatur quadratus. Etenim sit primus 1 N. solidus 4 Q. + 1 N. erit ergo productus ex secundo in tertium 4 N. + 1. Ponatur secundus quotlibet vnitatum, puta 2. erit igitur tertius 2 N. + $\frac{1}{2}$. superest vt solidus 4 Q. + 1 N. adscito tum secundo, tum tertio faciat quadratum, proinde 4 Q. + 1 N. − 2. & 4 Q. − 1 N. − $\frac{1}{2}$ æquantur quadratis. Horum interuallum est 2 N. − 1 $\frac{1}{2}$ quod producatur ex $\frac{1}{2}$ in 4 N. − 3. Quare horum summæ semissis quadratus 4 Q. − 5 N. + $\frac{25}{16}$. æquatur 4 Q. + 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{19}{32}$. tantus est primus. secundus 2. tertius $\frac{27}{16}$ qui soluunt quæstionem. nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{513}{256}$ qui singulis detractis quadratos facit $\frac{361}{256}$. $\frac{1}{256}$. $\frac{81}{256}$. quorum latera $\frac{19}{16}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{9}{16}$.

Eodem prorsus artificio soluetur quæstio sequens, quæ & hîc desiderari videtur.

Inuenire tres numeros, vt qui sub iis continetur solidus detractus à quolibet ipsorum quadratum relinquat.

Esto primus 1 N. solidus autem 1 N. − 1 Q. vt detractus à primo quadratum relinquat. Iam solido per primum diuiso, fiet 1 − 1 N. productus ex secundo in tertium. Ponatur secundus 1. erit tertius 1 − 1 N. superest vt ab vtroque detrahendo solidum 1 N. − 1 Q. supersint quadrati, & remanent 1 Q. + 1 − 1 N. & 1 Q. + 1 − 2 N. vterque igitur horum æquatur quadrato. Eorum interuallum est 1 N. quod fit ex 2 N. in $\frac{1}{2}$. Quare horum summæ semissis quadratus, puta 1 Q. + $\frac{1}{2}$ N + $\frac{1}{16}$. æquatur 1. Q. + 1 − 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{5}{8}$ tantus est primus, secundus 1. tertius $\frac{3}{8}$. & soluunt quæstionem. Nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{15}{64}$ qui à quolibet sigillatim detractus relinquit quadratus $\frac{25}{64}$. $\frac{49}{64}$. $\frac{9}{64}$.

QVÆSTIO XXV.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione sit cubus suo multatus latere. Esto datus 6. Ponatur primus 1 N. relinquitur ergo secundus 6 − 1 N. Superest vt productus eorum multipltiplicatione sit cubus suo multatus latere. Est autem hic productus 6 N. − 1 Q. Hunc ergo æquati

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν, κύβον παρὰ πλευράν. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ ς. τετάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμοῦ α. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται μο ς λεῖψει ς α. λοιπὸν δὴ τὸν ὑπ' αὐτῶν, κύβον παρὰ πλευράν. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστιν ἀριθμῶν ς λεῖψει δ α. ταῦτα ἴσα κύβῳ

παρὰ πλευρὰν. πλάσσω κύβον ἀπὸ ςς ὅσων δή ποτε λεῖψει μ° α. ἔστω δὲ ἀπὸ ςς β ⋔ μ° α. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτοῦ ποιεῖ κ° η ἀριθμοὺς δ ⋔ δ^υ ιβ. ταῦτα ἴσα ςς^οῖς ϛ λείψει δ^υ α. καὶ εἰ ἦσαν οἱ ςς^οὶ ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἰσώσει ἴσοι, λοιπὸς ἐγίνετο ἰσῶσαι κύβους ἴσους δυνάμεσι, καὶ ὁ ς^ὸ ἦν ῥητός. ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ δ. ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν ὑπὲρ ςς^ῶν δύο. τουτέστιν ἐκ τῶν τρὶς τῶν β ςς. καὶ ἐὰν τρὶς οἱ δύο ἀριθμοὶ λείψωσι ςς^οὺς β. ποιοῦσι δὶς τοὺς ἀριθμοὺς β. οἱ δὲ ϛ. τυχόντες εἰσὶ κατὰ τὴν ὑπόστασιν. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν τινα ς^ὸν, ὡς τοὺς ἀριθμοὺς β. ὃς δὶς γινόμενος ποιεῖ ϛ. ἔστι δὲ ὁ γ. ζητῶ οὖν ςς^οὺς ϛ ⋔ δ^υ α. ἴσους κύβῳ παρὰ πλευρὰν. νῦν τάσσω τὴν τοῦ κύβου πλευρὰν ἀπὸ ςς γ ⋔ μ° α. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ κ° κζ ςς^οὺς ϛ ⋔ δ^υ κζ. ἴσους ςς^οῖς ϛ ⋔ δ^υ α. καὶ γίνεται ὁ ς^ὸ κϛ^{κζ}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κϛ^{κζ}. ὁ δὲ δεύτερος ρλϛ^{κζ}.

oportet cubo cui ſuum deſit latus. Formo cubum à numeris quotlibet cum defectu vnitatis, eſto à 2 N. – 1. huius cubus latere detracto fit 8 C. + 4 N. – 12 Q. Hæc æquantur 6 N. – 1 Q. & ſi numeri vtrimque multitudine æquales eſſent, reſtarent cubi æquales quadratis, & rationali numero exprimeretur ſolutio. At 4 N. proficiſcuntur ab exceſſu ex ter 2 N. ſupra 2 N. & ſi ter 2 N. amittant 2 N. fiunt vtique bis 2 N. At verò 6. dantur ex hypotheſi. Eò itaque redactus ſum vt inueniam loco 2 N. aliquem numerum cuius duplum faciat 6. Eſt autem 3. huiuſmodi numerus. Quærens ergo 6 N. – 1 Q. æquales cubo cui ſuum latus deeſt, ſtatuo cubi latus 3 N. – 1. & huius cubus latere ipſo multatus facit 27 C. + 6 N. – 27 Q. quod æquatur 6 N. – 1 Q. & fit 1 N. $\frac{26}{27}$. Ad poſitiones. erit primus $\frac{26}{27}$. At ſecundus $\frac{136}{27}$.

IN QVAESTIONEM XXV.

ARTIFICIOSE Diophantus vt æquet 6 N. – 1 Q. cubo multato ſuo latere, fingit cubum à 3 N. – 1. vt in cubo illius contineatur – 1. quod aboleatur detractione lateris, in quo etiam – 1. poſitum eſt. At Numeri aboleantur per Numeros qui ſunt ex altera æquationis parte, & ſic remaneat æqualitas inter cubos & quadratos. Vt autem in cubo multato ſuo latere reperiantur 6 N. cùm ex formatione cubi tradita ad primã huius conſtet numerum Numerorum in cubo contentorum triplum fore numeri Numerorum poſitorum in latere, quia in latere cum Numeris ponitur vnitas; oportet vtique talem poni in latere numerum Numerorum, à cuius triplo auferendo ipſum numerum, ſuperſit 6. ſed à triplo alicuius numeri auferendo ipſum numerum, ſupereſt duplum eiuſdem numeri. Igitur rectè concludit Diophantus ponendum in latere cubi, numerum Numerorum, cuius duplũ ſit 6. hoc eſt 3. Itaque nulla hîc ſolutionum varietas accidit, cùm per huiuſmodi operationem vnica duntaxat reperiri poſſit ſolutio. Verùm inde formatur Canon ſatis expeditus.

Dodrantem quadrati dati numeri vnitate multatum diuide per octantem cubi eiuſdem, orietur primus quæſitorum. Quare huius ſubtractione à dato numero, habebis ſecundum. Porrò productus ex primo in ſemiſſem dati numeri vnitate multatum, eſt latus cubi quæſiti.

Eodem quoque artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros dato interuallo differentes, vt productus eorum multiplicatione sit cubus suo multatus latere.

Sit datum interuallum 6.

Ponatur primus 1 N. secundus 6 + 1 N. erit productus 6 N. + 1 Q. qui æquandus est cubo multato suo latere, qui ob causam supra traditam fingi debet à latere 3 N. − 1. fietque cubus suo latere multatus 27 C. + 6 N. − 27 Q. æqualis 6 N. + 1 Q. & fit 1 N. $\frac{28}{27}$. tantus est primus. Secundus autem $\frac{190}{27}$. & soluunt quæstionem, nam productus eorum multiplicatione $\frac{5320}{729}$. est cubus $\frac{6859}{729}$. multatus suo latere $\frac{19}{9}$. Hinc fit Canon.

Dodrantem quadrati dati numeri vnitate auctum, diuide per octantem cubi eiusdem, orietur primus quæsitorum. Cui addendo datum interuallum, fiet secundus. Porrò productus ex primo in semissem dati numeri vnitate multatus, est latus cubi quæsiti.

QVÆSTIO XXVI.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, è quibus ortus solidus sit cubus latus habens summam interuallorum, quibus bini inter se distant. Esto datus 4. & quia solidus sub tribus contentus est cubus, esto 8 C. cuius latus 2 N. Iam interuallum primi & secundi, & interuallum secundi & tertij, itemque interuallum primi & tertij, duplum faciunt interualli primi & tertij. Hoc est. Si fuerint numeri tres inæquales, trium interualla sunt duplum interualli extremorum. Habemus autem in positione lateris cubi 2 N. Quare oportet 2 N. æquari summæ interuallorum. Proinde interuallum tertij suprà primum est 1 N. Esto primus numerorum quotlibet, puta 2 N. erit ergo tertius 3 N. Et quia solidus ex tribus ortus, est 8 C. at productus ex primo in tertium est 6 Q. erit vtique secundus 1 ⅓ N. Hoc loco si secundus tertio minor, maior primo extitisset, soluta erat quæ-

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ποιῇ κύβον, οὗ ἡ πλευρὰ ἡ ἴση ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κύβος ἐστί, ἔστω κ^υ η. οὗ πλευρά ἐστι ςς^οὶ β. ἀλλὰ ἡ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πρώτου ὑπεροχή, καὶ ἡ τοῦ τρίτου καὶ δευτέρου ὑπεροχή, καὶ ἔτι τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου δίς ἐστιν ὑπεροχὴ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου. τουτέστι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ τρεῖς ἄνισοι, ἡ τῶν τριῶν ὑπεροχὴ διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἄκρων. ἔχομεν δ' ἐν τῇ ὑποστάσει τὴν πλευρὰν τοῦ κύβου ςς^οὺς β. δεῖ ἄρα τοὺς ςς^οὺς β τῶν τριῶν τῶν ὑπεροχῶν εἶναι, ὁ τρίτος ἄρα τοῦ πρώτου ὑπερέχει ςς^ῷ α. ἔστω ὁ πρῶτος ςς β. ἢ ὅσων δήποτε, ὁ τρίτος ἔσται ἄρα ςς γ. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεός ἐστι κ^υ η. ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου δ^υ ς. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται ς^ῷ α. α^γ. καὶ εἰ μὲν ἦν ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου μείζων, ἐλάσσων δὲ τοῦ τρίτου, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητού-

μένον. ἀλλ' ὁ δεύτερος ἐγένετο ἐκ τοῦ τῶν η μερισθεισῶν εἰς τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου. ἀλλ' ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος οὐκ εἰσὶ τυχόντες, ἀλλὰ μονάδι διαφέροντες. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας, ὅπως ὁ η μεριζόμενος εἰς τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιῇ τινα, ὃς τοῦ μὲν ἐλάσσονος μείζων ᾖ, τοῦ δὲ μείζονος ἐλάσσων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ α. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς α μ° α. καὶ τὸν η ἐὰν μερίσω εἰς τὸν ὑπ' αὐτῶν, τουτέστιν εἰς δ^υ α ς α. εὑρεθήσεται ὁ μέσος μ° η μορίου δ^υ α ς α. θέλομεν δὲ τοῦτον μείζονα μὲν εἶναι ς α. ἐλάσσονα δὲ ς α μ° α. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστι μ° α. ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος μιᾶς. ὥστε ὁ δεύτερος μετὰ μονάδος μιᾶς μείζων ἐστὶ τοῦ πρώτου. ἀλλ' ὁ δεύτερος προσλαβὼν τὴν μονάδα καὶ ἀναλυθεὶς εἰς τὴν δύναμιν α ς α. γίνεται δ^υ α ς α μ° η. μορίου δ^υ α ς α. ὥστε ταῦτα μείζονά ἐστι ς α μ° α. καὶ πάντα ἐπὶ τὸ μόριον δ^υ α ς α μ° η. μείζονά εἰσιν κ^υ α δ^υ β ς α. καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ γίνονται μ° η μείζονες κ^υ α δ^υ α. πλάσσω κύβον ὃς ἔχει κύβον α δύναμιν α. ἔσται ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου ς α μ° α γ^. ἀλλ' ἐπεὶ μ° η μείζους εἰσὶ κύβων α δ^υ α. ἔστι δὲ ὁ ἀπὸ ς α μ° α γ^ κύβος μείζων κ^υ ἑνὸς δ^υ α. ἐὰν ἰσώσω καὶ τὰς πλευράς, τουτέστι μ° β. ἴσαι ς α μ° α γ^. γίνεται ὁ ς μ° ε γ^. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος η γ^. ὁ

ſtio. Sed ſecundus prodiit diuiſo 8 per productum ex primo in tertium. Primus autem & tertius non ſunt temerè ſumpti, ſed vnitate differentes. Eò itaque deuenimus, vt quærendi ſint duo numeri vnitate differentes, vt diuiſo 8. per productum multiplicationis eorum, fiat quotiens minore illorum maior, & maiore minor. Ponatur minor 1 N. maior erit 1 N. + 1. & ſi diuidam 8. per productum multiplicationis eorum quod eſt 1 Q. + 1 N. fiet medius $\frac{8}{1Q. + 1N.}$ Volumus autem hunc maiorem quidem eſſe quàm 1 N. minorem verò quàm 1 N. + 1. Cùm igitur horum interuallum ſit 1. erit interuallum primi & ſecundi vnitate minus, ideoque ſecundus addita vnitate maior erit primo. Atqui ſecundus adſcita vnitate, & reſolutus in minutiam, cuius denominator 1 Q. + 1 N. fit $\frac{1Q. + 1N. + 8}{1Q. + 1N.}$. Hoc ergo maius eſt quàm 1 N. + 1. & omnibus per denominatorem multiplicatis fit 1 Q. + 1 N. + 8. maior quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. Auferantur ſimilia à ſimilibus, relinquitur 8. maior quàm 1 C. + 1 Q. Formo cubum in quo ſit 1 C. + 1 Q. erit vtique latus eius 1 N. + $\frac{1}{3}$. & quoniam 8. maius ſunt quàm 1 C. + 1 Q. Cubus quoque à latere 1 N. + $\frac{1}{3}$ maior eſt quàm 1 C. + 1 Q. ſi æquemus latera, nempe 2. & 1 N. + $\frac{1}{3}$. fiet 1 N. $\frac{5}{3}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{8}{3}$. ſecundus $\frac{9}{5}$.

tertius $\frac{5}{3}$. & omnibus per 15. multiplicatis. Erit primus 40. secundus 27. tertius 25. Communis enim denominator hic abiicitur, & inuenti sunt tres numeri, quorum ex multiplicatione ortus solidus, est cubus latus habens summam interuallorum ipsorum. Pono ergo primum 40 N. secundum 27 N. tertium 25 N. & est solidus sub ipsis contentus cubus cuius latus æquatur interuallis ipsorum simul iunctis. Volo autem trium summam æquari dato numero 4. Igitur 92 N. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{23}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{40}{23}$. secundus $\frac{27}{23}$. tertius $\frac{25}{23}$.

δεύτερος θ̄ ε. ὁ τρίτος ε̄ γ. καὶ πάντα εἰς πεντεκαίδεκα. ἔσται ὁ πρῶτος μ̄. ὁ δεύτερος κζ̄. ὁ τρίτος κε̄. κοινὸν γὰρ ἤρθη τὸ ιε̄ μόριον, καὶ ηὑρημένοι εἰσὶν τρεῖς ἀριθμοί. ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ᾖ κύβος πλευρὰν ἔχων τὰς ὑπεροχὰς αὐτῶν συντεθείσας. τάσσω τοίνυν τὸν μὲν πρῶτον ςς̄ μ̄. τὸν δὲ δεύτερον [ςς̄ κζ̄. τὸν δὲ τρίτον] ςς̄ κε̄. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. [θέλω δὲ τοὺς τρεῖς ἴσους εἶναι δοθεῖσι] μονάσιν. ἐδόθησαν δὲ μ° δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα ϙβ̄ ἴσοι μ° δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς α̅ κγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ κγ. ὁ δὲ δεύτερος κζ̄ κγ. ὁ δὲ τρίτος κε̄ κγ.

IN QVAESTIONEM XXVI.

QVÆRENS Diophantus tres numeros quorum summa sit 4. Ita vt solidus sub ipsis contentus sit cubus latus habens summam interuallorum quibus bini inter distant, seu quod idem est, latus habens duplum interualli maximi & minimi, primùm quærit in vniuersum tres numeros reliquis propositi partibus satisfacientes nulla habita ratione summæ quàm conficiunt, his enim inuentis, puta 40. 27. 25. Iam statuit quæsitos numeros 40 N. 27 N. 25 N. quorum summam 92 N. æqualem faciendo ipsi 4. soluit quæstionem propositam. Itaque totum negotium in eo consistit vt inueniantur tres numeri, vt solidus sub ipsis contentus sit cubus latus habens duplum interualli maximi & minimi. Ponatur solidus ille quilibet cuborum numerus cubicus, puta 8 C. Cùm ergo illius latus sit 2 N. patet hoc esse duplum interualli maximi & minimi, quare ipsum interuallum maximi & minimi erit 1 N. Ponendi ergo sunt maximus & minimus certi Numerorum numeri vnitate distantes; sed quia per eorum productum diuidendo 8 C. solidum, debet oriri medius qui minimo maior esse debet, & minor maximo, apparet necessitas assumpti lemmatis, quo quæruntur duo numeri vnitate distantes per quorum productum diuidendo 8. fiat quotiens minore maior, & minor maiore. In huius autem lemmatis enodatione quantum à scopo aberrarit Xilander, qui eius commentarios legerit, facilè intelliget. Nobis non vacat in refellendis inanibus illius coniecturis diutius immorari, quibus propositum est Diophantum explicare, non aliorum errata omnia persequi. Ponuntur ergo quæsiti numeri 1 N. & 1 N. + 1. fitque productus eorum multiplicatione 1 Q. + 1 N. per quem diuidendo 8. fit quotiens $\frac{8}{1 Q. + 1 N.}$ qui debet esse maior quàm 1 N. minor quàm 1 N. + 1. Hîc si quis asserat Diophantum non satis accuratè rem persequi (nisi quid ex illius verbis exciderit) non falletur, vt puto. Nam vt vtrumque quod instat, ritè procuretur, omnia reducendo ad eandem denominationem patet 8. maiorem esse debere quàm 1 C. + 1 Q. minorem autem quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. & primum quidem sollicitè cauet Diophantus, postremum verò negligit omnino. Atqui si hoc neglecto ad illud tantùm respiciamus, sæ-

pè in absurdum deueniemus. Nam verbi gratia vt 8. sit maior quàm 1 C. + 1 Q. sufficit si æquemus 8. alicui cubo maiori quàm 1 C. + 1 Q. dum is non sit maior quàm 8. At talis est 1 C. + 3 Q. + 3 N. + 1. Huic ergo æquemus 8. & latus lateri comparantes fient 2. æquales 1 N. + 1. & erit 1 N. 1. Quare quæsiti numeri erunt 1. & 2. quod est absurdum, nam per eorum productum 2. si diuidas 8. fiet 4. qui maior est vtroque, cùm deberet esse maior minimo, minor maximo. Non sufficit igitur vt cubus cui æquatur 8. sit maior quàm 1 C. + 1 Q. sed oportet simul vt sit minor quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. Hoc vt arte certa consequamur fingemus cubum in quo præter 1 C. contineatur 1 Q. & aliquid amplius, quod tamen non æquet 2 Q. Quare cùm latus cubi ponendum sit 1 N. + aliquot vnitatibus, ac proinde quadratorum numerus in cubo contentorum sit triplum illarum vnitatum, patet in latere ponendas tot vnitates, vt earum triplum sit minus quàm 2. sed non minus quàm 1. Quare vtriusque trientem sumentes concludemus, fingendum latus cubi 1 N. +. tot vnitatibus quæ sint minus quàm $\frac{2}{3}$ sed non minus quàm $\frac{1}{3}$. sic Diophantus posuit huiusmodi latus 1 N. + $\frac{1}{3}$ quod æquans lateri ipsius 8. puta 2. inuenit valorem Numeri $\frac{5}{3}$. & si fingas latus 1 N. + $\frac{1}{2}$. hoc æquabitur 2. & fiet 1 N. $\frac{3}{2}$. Erunt ergo quæsiti duo numeri $\frac{3}{2}$ & $\frac{5}{2}$. quorum productus $\frac{15}{4}$ per quem diuidendo 8. fit medius $\frac{32}{15}$. tres enim $\frac{3}{2}$. $\frac{32}{15}$. $\frac{5}{2}$. satisfaciunt proposito, hoc est solidus sub ipsis contentus, est cubus latus habens summã interuallorum quibus bini inter se distant, & omnia reducendo ad integros, fient 45. 64. 75. per quos si velis soluere quæstionem propositam, pones quæsitos Numeros 45 N. 64 N. 75 N. horum summa 184 N. æquatur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{46}$. sunt ergo quæsiti Numeri $\frac{45}{46}$. $\frac{64}{46}$. $\frac{75}{46}$.

Itaque vt compendiosissime propositum lemma perficiatur, cùm fiat valor Numeri auferendo à binario vnitates positas in latere fictitio cubi, & ostensum sit vnitates illas minores esse debere quàm $\frac{2}{3}$ non minores quàm $\frac{1}{3}$. his autem à binario detractis, supersint $\frac{4}{3}$ & $\frac{5}{3}$. patet valorem Numeri maiorem esse debere quàm $\frac{4}{3}$ non maiorem quàm $\frac{5}{3}$. sic sumi poterũt pro valore Numeri $\frac{3}{2}$. $\frac{8}{5}$. $\frac{7}{5}$. $\frac{9}{6}$. & alij infiniti. Vnde constat allucinari Xilandrum, cùm asserit valorem numeri esse posse $\frac{5}{4}$. nam is cadit extra limites constitutos, eumque proposito non satisfacere senties experiendo.

Restat videndum cur Diophantus loco ipsorum $\frac{8}{3}$. $\frac{9}{5}$. $\frac{5}{3}$. sumat ipsos 40. 27. 25. in iisdem rationibus. Quod ne cui scrupulum moueat, demonstrabitur hoc Theoremate.

Si fuerint tres numeri, ita vt solidus sub ipsis contentus, sit cubus latus habens duplum interualli maximi & minimi; & tres alij quicunque in iisdem rationibus idem præstabunt.

F 27000.
D 30. E 15.
A 40. B. 27. C 25.
G 80. H 54. K 50.
L 60. M 30.
P 216000.

Sint tres A B C. & interuallum extremorum esto E. cuius duplum D. At solidus sub ipsis A B C. esto F cubus, cuius latus sit D. & sumantur tres G H K in iisdem rationibus cum ipsis A B C. & sit extremorum interuallum M. cuius duplum L. & solidus sub ipsis G H K esto P. dico P. esse cubum cuius latus est L. Etenim cùm latera A B C. G H K sint proportionalia, erunt solidi F P similes ex definitione.
27. octaui. Quare [1] habebunt inter se rationem cubi ad cubum, ac proinde cùm F sit cubus, [2]
25. octaui. erit & P cubus. Quoniam verò ex hypothesi est A ad C. vt G ad K, erit diuidendo E ad C. vt M ad K. ac proinde erit D, duplus ipsius E, ad C; sicut L. duplus ipsius M, ad K; & permutando erit D ad L. vt C ad K. Atqui solidi si-
19. octaui. miles F P [3] sunt in triplicata ratione laterum C K. & similiter cubi F P. [4] sunt in
12. octaui. triplicata ratione lateris D ad latus ipsius P. Igitur est C ad K. sicut D ad latus cubi P. sed vt C ad K. sic est D ad L. vt ostensum est. Igitur L est latus cubi P. Quod erat demonstrandum.

Cæterùm eodem artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire tres numeros, vt solidus sub ipsis contentus sit cubus, latus habens summam interuallorum, quibus bini inter se distant, ipsa autem summa interuallorum sit datus numerus.

esto summa interuallorum 15. Quærentur vt prius tres numeri, ita vt solidus sub ipsis contentus sit cubus summæ interuallorum, & inuenientur 40. 27. 25. Quare ponentur quæsiti 40 N. 27 N. 25 N. & fit summa interuallorum 30 N. æqualis 15. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Sunt igitur quæsiti numeri $\frac{40}{2}$. $\frac{27}{2}$. $\frac{25}{2}$.

QVÆSTIO XXVII.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione vtrolibet adiecto faciat cubum. Pono primum, aliquot numerorum cubicorum, puta 8 N. secundum verò 1 Q. − 1. Ita alteri postulatorum satisfit. Nam productus eorum multiplicatione adscito primo, facit cubum. Restat vt idem productus adscito secundo faciat cubum. Sed productus ille adscito secundo facit 8 C. + 1 Q. − 8 N. − 1. hæc ergo æquantur cubo. Formo cubum à 2 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{14}{13}$. Ad positiones. erit primus $\frac{112}{13}$. secundus $\frac{27}{169}$.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ κύβον. τάσσω τὸν πρῶτον ἐκ κυβικῶν ϛϛ. ἔστω δὲ ϛϛ η. τὸν δεύτερον δ $\bar{\alpha}$ ⋔ μ° α. καὶ συμφωνῇ μοι ἓν ἐπίταγμα. ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κύβον. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν κύβον. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιεῖ κύβους η δύναμιν α λείψει ϛϛ η μ° α ἴσους κύβῳ. πλάσσω τὸν κύβον ἀπὸ ἀριθμῶν β λείψει μ° α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιδ ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ριβ ιγ. ὁ δὲ δεύτερος κζ ρξθ.

IN QVAESTIONEM XXVII.

NVMERI cubo æquandi 8 C. + 1 Q. − 8 N. − 1. latus ingeniosè fingitur 2 N. − 1: vt cubo vtriusque partis elidantur 8 C. − 1. & remaneat æqualitas inter Numeros & quadratos. Cæterùm positiones diuersis modis institui possunt. Nam primus quæsitorum poni potest quilibet Numerorum numerus siue cubicus, siue non, dum secundus statuatur certus quadratorum numerus − 1. ita tamen vt ex primo in quadratos secundi fiat numerus cubus, ita si ponatur primus 4 N. ponetur secundus 2 Q. − 1. fitque productus 8 C. − 4 N. qui adscito primo cubum facit. Restat ergo vt idem productus adscito secundo cubum faciat, facit autem 8 C. + 2 Q. − 4 N. − 1. Hoc ergo cubo æquatur, cuius latus fingetur 2 N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{7}$. erunt ergo quæsiti numeri $\frac{20}{7}$ & $\frac{1}{49}$. qui soluunt quæstionem, nam eorum productus $\frac{20}{343}$ vtroque adscito cubos facit $\frac{1000}{343}$ & $\frac{27}{343}$. Verùm aduerte talem statuendum esse Numerorum numerum pro primo, vt sit maior vel æqualis numero quadratorum qui ponitur in secundo, nam si ponatur minor, æquatio quidem ritè procedet, sed valorem Numeri applicando positionibus, secundus inuenietur nihil, vel minor nihilo. Ita si ponas primum 2 N. secundum 4 Q. − 1. erit productus 8 C. − 2 N. qui adscito primo cubum facit. At idem productus adscito secundo facit 8 C. + 4 Q. − 2 N. − 1. æqualem cubo à latere 2 N. − 1. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Quare secundus inuenitur nihil. At si ponas primum 8 N. secundum 8 Q. − 1. fiet tandem 64 C. + 8 Q. − 8 N. − 1. æqualis cubo à latere 4 N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{14}$. eruntque quæsiti numeri qui suprà $\frac{20}{7}$ & $\frac{1}{49}$.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multi-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας ἑκάτερον,

ποιῇ κύβον. ὁμοίως ὁ πρῶτος τετάχθω κυβικῶν $\varsigma\varsigma$ η̄. ὁ δὲ δεύτερος δ^{υ} ᾱ [μ^{o} ᾱ] καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν πρῶτον, κύβος, ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν δεύτερον ποιεῖ κ^{υ} η̄ $\varsigma\varsigma^{oi}$ η̄ ⋔ δ^{υ} ᾱ μ^{o} ᾱ. ταῦτα ἴσα κύβῳ. καὶ ἔστιν ἀδύνατον. τάσσω τοίνυν πάλιν τὸν πρῶτον κυβικῶν $\varsigma\varsigma$ μετὰ μ^{o} ᾱ. ἔστω $\varsigma\varsigma$ η̄ μ^{o} ᾱ. τὸν δὲ δεύτερον δ^{υ} ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν δεύτερον, κύβος, ἀλλὰ λείψας τὸν πρῶτον ποιεῖ κ^{υ} η̄ δ^{υ} ᾱ λείψει $\varsigma\varsigma$ η̄ μ^{o} ᾱ. ταῦτα ἴσα κύβῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς $\varsigma\varsigma$ β̄ ⋔ μ^{o} ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς^{o} ι $\iota\gamma^{\omega\nu}$. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϙγ $\iota\gamma^{\omega\nu}$. ὁ δὲ δεύτερος ρ $\rho\xi\theta^{\omega\nu}$.

plicatione, vtrolibet detracto faciat cubum. Vt prius ponatur primus 8 N. secundus autem 1 Q. + 1. & productus eorum multiplicatione, dempto primo fit cubus; sed idem productus dempto secundo facit 8 C. + 8 N. − 1 Q. − 1. Hoc æquatur cubo. & est impossibile. Statuo ergo rursus primum, numerorum cubicorum aliquot addita vnitate, puta, 8 N. + 1. secundum autem 1 Q. & productus eorum multiplicatione dempto secundo fit cubus; sed dempto primo fit 8 C. + 1 Q. − 8 N. − 1. Hæc æquantur cubo à latere 2 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{10}{13}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{93}{13}$. secundus $\frac{100}{169}$.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

TEXTVS lacunas malè cùm repleuisset Xilander, non mirum est si Diophanti mentem minimè assequutus est. Attamen satis apparet Diophantum primò voluisse imitari operationem præcedentis quæstionis. Quemadmodum enim posuerat ibi primum 8 N. secundum 1 Q. − 1. vt producto 8 C. − 8 N. addendo primum fieret cubus. Ita hîc ponere voluit primum 8 N. secundum 1 Q. + 1. vt à producto 8 C. + 8 N. detrahendo primùm, cubus superesset. Verùm ab eodem producto auferendo secundum relinquebatur 8 C. + 8 N. − 1 Q. − 1. quod est impossibile cubo æquari, nam is cubus non potest fingi nisi à latere 2 N. − 1. vt tollantur cubi & vnitates. Quare hac æquatione tandem 11 Q. + 2 N. remanent æquales nihilo. Idcirco vt hoc incommodum vitetur aliter instituendæ sunt positiones, & primus ponendus est 8 N. + 1. secundus 1 Q. resque optimè succedit.

Cæterùm infinitis aliis modis institui possunt positiones, dum primus ponatur quilibet numerus Numerorum + 1. & secundus quilibet Quadratorum numerus, qui ductus in numerum Numerorum primi, cubum faciat. Ita si ponas primum 4 N. + 1. secundum 2 Q. erit productus 8 C. + 2 Q. qui multatus secundo, cubum relinquit. At multatus primo, manet 8 C. + 2 Q. − 4 N. − 1. qui æquabitur cubo à latere 2 N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{7}$. Erunt ergo quæsiti numeri $\frac{27}{7}$ & $\frac{50}{49}$ qui soluunt quæstionem, nam productus fit $\frac{1350}{343}$. vnde auferendo ipsos numeros, remanent cubi $\frac{27}{343}$ & $\frac{1000}{343}$. Sed hîc etiam aduerte talem statuendum Numerorum numerum in primo, vt sit æqualis vel maior numero quadratorum qui ponitur pro secundo. Alioquin si ponatur minor, non poterit à producto detrahi vterque numerus. Ita si ponas primum 8 N. + 1. secundum 8 Q. res bene succedet, nam erit productus 64 C. + 8 Q. qui multatus secundo cubum relinquit, at multatus primo, remanet 64 C. + 8 Q. − 8 N. − 1. æqualis cubo à latere 4 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{5}{14}$. Sunt ergo quæsiti numeri qui suprà $\frac{27}{7}$ & $\frac{50}{49}$. Sed si ponas primum 2 N. + 1. secundum 4 Q. erit productus 8 C. + 4 Q. qui detracto secundo cubum relinquit, at primo detracto, relinquit 8 C. + 4 Q. − 2 N. − 1. æqualem cubo à latere 2 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. suntque quæsiti numeri 2. & 1. à quorum producto si primum auferas, nihil remanet.

QVÆSTIO XXIX.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, summa ipsorum siue addita, siue detracta cubum faciat. Quoniam productus eorũ multiplicatione adsumens vtrumq; facit cubum, faciat 64. Rursus quia idem productus vtroq; detracto facit cubum, faciat 8. Itaque duplum summę numerorum ęquatur interuallo horum cuborum 56. Proinde summa numerorũ est 28. sed productũ multiplicationis cum summa facit 64. relinquitur ergo productum mulriplicationis esse 36. Eo itaque loci deducta res est, vt inueniendi sint duo numeri, quorum summa sit 28. productum multiplicationis 36. Ponatut maior 1 N. + 14. Minor ergo erit 14 − 1 N. superest vt productum multiplicationis nimirum 196 − 1 Q. æquetur 36. & fit 1 Q. æqualis 160. & si vnitates 160. essent quadratæ, soluta esset quæstio. Sed 160. est excessus quo 196. superat 36. & 196. est quadratus ipsius 14. qui est semissis de 28. Quare 196. est semissis de 28. in se ductus. Atqui 28. est semissis ipsius 56. atque ideo 14. est quarta pars eiusdem 56. Cæterùm 56. est interuallum duorum cuborum 64. & 8. ipse verò 36. est summæ cuborum semissis. Itaque eo redactus sum vt inueniam duos cubos quorũ interualli quadrãs in se si ducatur,

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ κύβον. [ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν συναμφότερον ποιεῖ κύβον] ποιείτω μο ξδ. πάλιν ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιεῖ [κύβον, ποιείτω] μο η. δὶς ἄρα συναμφότερος ποιῶν αὐτῶν τὴν ὑπεροχήν, ἔσται μο νϛ. ὥστε συναμφότερος ἔσται μο κη. ἀλλὰ καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖ μο ξδ. λοιπὸς ἄρα ὁ ὑπ' αὐτῶν ἔσται μο λϛ. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς [ὧν συντεθέντες ποιοῦσι] μο κη. ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστι μο λϛ. τετάχθω ὁ μείζων ϛ α μο ιδ. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μο ιδ λείψει ϛ α. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπ' αὐτῶν τουτέστι μο ρϟϛ λείψει δυνάμεως α. ἰσῶσαι μο λϛ. καὶ γίνεται δυ α ἴση μο ρξ. καὶ εἰ ἦσαν μονάδες ρξ τετραγωνικαί, λελυμένον μὲν ἦν τὸ ζητούμενον. ἀλλ' αἱ μο ρξ ὑπεροχή ἐστι ᾗ ὑπερέχουσι μο ρϟϛ τὰς λϛ. ἀλλ' αἱ μο ρϟϛ ἀπὸ μο ιδ ἐστὶ τετράγωνος. ὁ δὲ ιδ ἥμισύ ἐστι τῶν κη. ὥστε τὰ ρϟϛ τὸ ἥμισύ ἐστι τῶν κη ἐφ' ἑαυτό. ἀλλ' ὁ κη ἥμισύ ἐστι τῶν νϛ. ὥστε τὰ ιδ τέταρτόν ἐστι τοῦ νϛ. ἀλλ' ὁ νϛ δύο κύβων ἐστὶ ὑπεροχὴ τοῦ ξδ καὶ τοῦ η. ὁ δὲ λϛ συναμφοτέρων ἐστὶ τῶν κύβων τὸ ἥμισυ. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους ὅπως τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τὸ τέταρτον, ἐφ' ἑαυτὸ γενόμενον,

καὶ λείψας συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ἡ τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ς^ο ᾱ μ° ᾱ. ἡ δὲ τοῦ ἐλάσσονος ς^ο ᾱ ⋔ μ° ᾱ. καὶ γίνονται οἱ κύβοι ὁ μὲν μείζων Κ^Υ ᾱ Δ^Υ γ̄ ςς γ̄ μ° ᾱ. ὁ δὲ ἐλάσσων Κ^Υ ᾱ ςς γ̄ λεῖψις Δ^Υ γ̄ μ° ᾱ. καὶ τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ τέταρτον Δ^Υ ᾱ. ᾱ^β μ° ᾱ^β. ταῦτα ἐφ' ἑαυτά, γίνονται δυναμοδυνάμεις β̄. ᾱ^δ Δ^Υ ᾱ. ᾱ^β μ° ᾱ^δ. ταῦτα ἐὰν λείψῃ συναμφοτέρου τῶν κύβων τὸ ἥμισυ, ὅπερ ἐστὶ Κ^Υ ᾱ ςς γ̄. λοιπὸν γίνονται ΔΔ^Υ β̄. ᾱ^δ Δ^Υ ᾱ. ᾱ^β μ° ᾱ^δ ⋔ Κ^Υ ᾱ ςς γ̄ ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ πάντα τετράκις διὰ τὸ μόριον γίνεται ΔΔ^Υ θ̄ Δ^Υ ς̄ μ° ᾱ λεῖψις Κ^Υ δ̄ ςς ιβ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ δυνάμεων τριῶν μ° ᾱ ⋔ ςς ς̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ΔΔ^Υ θ̄ Δ^Υ μβ̄ μ° ᾱ λεῖψις Κ^Υ λς̄ ςς ιβ̄. ἴσων δυναμοδυνάμεσι θ̄ Δ^Υ ς̄ μ° ᾱ ⋔ Κ^Υ δ̄ ςς ιβ̄. καὶ κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ λοιποὶ Κ^Υ λβ̄ ἴσοι Δ^Υ λς̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ο θ̄ η^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὰς τῶν κύβων πλευρὰς τὴν μὲν ς^ο ᾱ μ° ᾱ. τὴν δὲ ς^ο ᾱ λεῖψις μ° ᾱ. καὶ ἔσται ἡ μὲν ιζ̄ η^ων. ἡ δὲ ᾱ η^ων. αὐτοὶ ἄρα οἱ κύβοι ἔσονται ὁ μὲν πρῶτος ,δϡιγ φιβ^ων. ὁ δὲ δεύτερος ᾱ φιβ^ων. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ ζητῶ τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν κύβον τὸν ,δϡιγ φιβ^ων. τὸν δὲ ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφοτέρου ποιεῖν κύβον τὸν ᾱ φιβ^ων. ἐπεὶ οὖν ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖ κύβον, τουτέστι μονάδας ,δϡιγ φιβ^ων.

& ab hoc quadrato auferatur summæ cuborum semissis, fiat quadratus. Sit latus maioris cubi 1 N. + 1. minoris verò 1 N − 1. & fiunt cubi maior quidem 1 C. + 3 Q. + 3 N. + 1. minor autem 1 C. + 3 N. − 3 Q. − 1. & horum interualli quadrans est 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$ hoc in se ducto fiunt 2 $\frac{1}{4}$ QQ. + 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{4}$. hinc si auferatur summæ cuborum semissis, nempè 1 C. + 3 N. relinquitur 2 $\frac{1}{4}$ QQ. + 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{4}$ − 1 C. − 3 N. Hoc æquatur quadrato. Sed propter minutias, omnia quadruplicentur, fit 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. hæc quadraro æquantur à latere 3 Q. + 1 − 6 N. Ipse quadratus est 9 QQ. + 42 Q. + 1 − 36 C. − 12 N. qui æquatur 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. Communis addatur defectus, & à similibus auferantur similia, relinquuntur 32 C. æquales 36 Q. & fit 1 N. $\frac{9}{8}$. Ad positiones. Posueram latera cuborum, hoc quidem 1 N. + 1. illud verò 1 N. − 1. Erit ergo alterum $\frac{17}{8}$. alterum $\frac{1}{8}$. Ipsi ergo cubi erunt, primus quidem $\frac{4913}{512}$. secundus autem $\frac{1}{512}$. venio ad id quod initio propositum erat, ac quæro quomodo détur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione cum vtriusque summa faciat $\frac{4913}{512}$ & idē productus detracta eadem summa faciat $\frac{1}{512}$. Quoniam ergo productum multiplicationis additum summæ facit cubum $\frac{4913}{512}$.

& idem productum detracta summa facit cubum $\frac{1}{512}$. horum cuborum interuallum, nempè $\frac{4912}{512}$. est vtique duplum summæ. Ipsa igitur summa est $\frac{2456}{512}$. sed productum multiplicationis cum summa facit $\frac{4913}{512}$. & summa inuenta est $\frac{2456}{512}$. erit igitur productum multiplicationis $\frac{2457}{512}$. Quod reliquum est vt conficiatur demonstratum est libro ptimo, sed explicandæ causa quæstionis denuò ostendamus. Ponatur ptimus 1 N. cum semisse vnitatum quæ summā exprimunt, hoc est $\frac{1228}{512}$. secundus erit $\frac{1228}{512}$ – 1 N. & est summa illorum $\frac{2456}{512}$. Sed productum multiplicationis est $\frac{1507984}{262144}$. – 1 Q. hoc ergo æquatur $\frac{2457}{512}$ & omnia per denominatorem 262144. multiplicentur, & auferantur similia à similibus fiunt 262144 Q. ęquales 250000. & fit 1 N. $\frac{500}{512}$. Ad positiones erit primus $\frac{1728}{512}$. secundus $\frac{728}{512}$. & demonstratio est euidens.

ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιεῖ κύβον, τουτέστι μονάδος α^{φιβ}. ὁ δὶς ἄρα συναμφότερός ἐστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχή, τουτέστι ͵δϡιβ^{φιβ}. ὥστε συναμφότερος ἔσται ͵βυνϛ^{φιβ}. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ἐστὶ ͵δϡιγ^{φιβ}. ὧν συναμφότερος ͵βυνϛ^{φιβ}. ἔσται ἄρα ὁ ὑπ' αὐτῶν μ° ͵βυνζ^{φιβ}. καὶ προδέδεικται αὐτῇ ἡ ἀπόδειξις ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ νῦν δὲ δειχθήσεται διὰ τὸ πρόβλημα. τετάχθω ὁ πρῶτος ϛ^{ς} α καὶ μ° τῆς ἡμισείας, ὧν εἰσι συναμφότεροι, τουτέστι μ° ͵ασκη^{φιβ}. ὁ δὲ δεύτερος ἔσται μονάδων ͵ασκη^{φιβ} λείψει ϛ^{ς} α. καὶ ἐστι μὲν συναμφότερος μ° ͵βυνϛ^{φιβ}. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστι μ° ρν. ͵ζϡπδ μορίου κϛ. ͵βρμδ λείψει δυνάμεως α. ταῦτα ἴσα μ° ͵βυνζ^{φιβ}. καὶ πάντα ἐπὶ μόριον τουτέστι κϛ. ͵βρμδ. καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, γίνεται δ^{ς} κϛ. ͵βρμδ ἴσαι μ° [μυρ.] κε. καὶ γίνεται ὁ ϛ^{ς} μ° φ^{φιβ}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος ͵αψκη^{φιβ}. ὁ δὲ δεύτερος ψκη^{φιβ}. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXIX.

Hic duo imprimis supponuntur à Diophanto.

Primùm interuallum cuborum qui fiunt addita & adempta summa numerorũ producto multiplicationis ipsorũ, esse duplũ eiusdem summæ numerorum, quod facile est demonstrare. Sit enim A cubus minor: C maior, & B productus multiplicatione quæsitorum numerorum, quorum summa D adempta ipsi B relinquat A, & addita eidem B. faciat C. dico interuallum cuborum C A esse duplum ipsius D. & patet, cùm enim interuallum duorum C B sit D. & duorum B A. interuallum sit rursus D. euidens est extremorum C A. interuallum esse duplum ipsius D. Quod erat propositum.

D 28.		D 28.
A 8.	B 36.	C. 64.

Secundò supponit Diophantus ipsum productum B. semissem esse summæ cuborum A C. quod etiam euidens est, cùm enim tres A B C. sint in medietate arithmetica ex hypothesi, erit medius B. semissis summæ extremorum. Quod erat intentum. Hinc apparet, quod ait Diophantus quærendos esse duos numeros, quorum summa sit D. productum B. Id autem fiet per trigesimam primi, cuius operationem hîc repetit. Cùm autem ex huiusmodi operatione, vel ex Canone inde eruto constet, vt quæstio solui possit oportere à quadrato semissis summæ auferendo productum, relinqui quadratum, sequitur oportere vt à quadrato semissis ipsius D. auferendo B. relinquatur quadratus. Atqui, vt ostensum est, 5.1. porif.

D. est semissis interualli cuborum A C. ac proinde semissis ipsius D. est quadrans interualli eorundem cuborum; & rursus, vt ostensum quoque est, B. est semissis summæ cuborum A C. Igitur euidenter colligitur necessitas lemmatis à Diophanto assumpti, quo quæruntur tales duo cubi, vt à quadrato quadrantis interualli eorum auferendo semissem summæ eorundem, relinquatur quadratus. In huius lemmatis explicatione multa occurrunt obseruanda.

Primò aduerte latera cuborum poni 1 N. + 1. & 1 N. − 1. vt cuborum tam summa quàm interuallum ex paucissimis constet speciebus. Nam horum laterum cubi prorsus similes sunt, nisi quod quadrati & vnitates deficiunt in cubo residui, cùm adsint in cubo binomij, sicut docuimus ad primam huius, cubi genesim explicantes. Vnde colligendo summam cuborum, cùm quadrati & vnitates ob signa contraria sese mutuò elidant, fit vt summa cuborum constet solùm ex cubis & Numeris, vt in hypothesi fit summa cuborum 2 C. + 6 N. similiter cuborum interuallum ex duabus tantùm componitur speciebus, ex quadratis scilicet, & vnitatibus, quia cuborum & Numerorum iidem vtrimque reperiuntur numeri, sic in hypothesi est cuborum interuallum 6 Q. + 2. cuius quadratus est 1 ½ Q. + ½.

Secundò aduerte quadratum huius quadrantis, necessariò esse trinomium constans ex quadrato quadratis, quadratis, & vnitatibus, vt colligere est ex genesi quadrati quam tradidit Euclides quarta secundi. fit enim huiusmodi quadratus 2 ¼ QQ. + 1 ½ Q. + ¼. Quare cùm ab hoc quadrato auferri debeat semissis summæ cuborum, qui constat, vt iam diximus, ex cubis & Numeris, necesse est hanc subtractionem fieri per signum defectus, cùm in dicto quadrato non reperiantur species eorundem nominum. Itaque fiet huiusmodi subductione quinomium constans ex quadrato quadratis, quadratis, & vnitatibus, cum defectu cuborum & Numerorum, nimirum 2 ¼ QQ. + 1 ½ Q. + ¼ − 1 C. − 3 N. qui æquandus est quadrato, vt soluatur propositum lemma. Sed ad vitandas fractiones, omnia per 4. multiplicantur, & fit 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. æqualis quadrato.

Tertiò aduerte ita formandum latus propositi quinomij, vt æqualitas consistat inter duas species proximas. Quare tria potissimum sunt præstanda. Primò tollendi sunt quadrato quadrati. Secundò vnitates quoque tollendæ. Tertiò vel Numeri tollendi sunt, vt æqualitas consistat inter cubos & quadratos. vel tollendi sunt cubi, vt æquales maneant quadrati & Numeri. Duo quidem præstabuntur facilè, quia tam quadratoquadratorum quàm vnitatum numerus, quadratus est, puta 9 QQ. & 1. quare si in latere fictitio ponantur horum quadratorum latera, nimirum 3 Q. & 1. habebitur intentum. Tertium verò, vt perficiatur, adiicienda est in latere fictitio tertia species, qua vel cubi vel Numeri elidantur, vnde duplex æquationis ratio consurgit, quarum primã duntaxat prosequutus est Diophantus, nos vtramque non grauatim explicabimus. Primùm ergo si libeat abolere numeros, curandum nobis erit vt in quadrato fictitio reperiantur − 12 N. Cùm igitur Numeri produci non possint, nisi ex ductu Numerorum in vnitates, patet in latere fictitio numeros ponendos esse; vt verò eorum multitudo nobis innotescat, cùm latus fictitium debeat
1. 2. poris. esse trinomium constans ex quadratis, Numeris, & vnitatibus, erit quadratus illius æqualis quadratis singularum partium, & duplo producti ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, ac proinde Numeri qui erunt in quadrato fictitio, erunt duplum producti ex vnitatibus in Numeros in latere contentos. Quamobrem cùm vt docuimus, in latere, vnitatum numerus sit 1. vt ex eius ductu in Numeros bis, fiant 12 N. manifestum est in latere ponendos esse 6 N. & quia signi quoque ratio habenda est, & − 12 N. fieri possunt siue ex 6 N. in − 1. bis, siue ex 1. in − 6 N. bis, dubitari potest vtrum latus fictitium ponendum sit 3 Q. + 6 N. − 1. vel 3 Q. + 1 − 6 N. nam vtroque modo, in quadrato reperientur 9 QQ. + 1 − 12 N. Sed si ponatur latus fictitium 3 Q. + 6 N. − 1. fit totus quadratus 9 QQ. + 1 − 12 N. + 36 C. + 30 Q. vbi quoniam vterque cuborum & quadratorum Numerus maior est numero cuborum & quadratorum numeri quadrato æquandi. manent enim 30 Q. + 36 C. æquales 6 Q. − 4 C. id tandem incommodi accidit, vt 24 Q. + 40 C. æquentur nihilo. Igitur fictitium latus poni non potest 3 Q. + 6 N. − 1. Quamobrem restat vt fingatur 3 Q. + 1 − 6 N. vt fecit Diophantus, &

æquatio ritè procedit, nam fit 1 N. $\frac{1}{8}$ sunt ergo cuborum latera $\frac{17}{8}$ & $\frac{1}{8}$ ipsi cubi $\frac{4913}{512}$ & $\frac{1}{512}$. Quorum summæ semissis $\frac{2457}{512}$ interualli verò semissis $\frac{2456}{512}$. Quare si inueniamus duos numeros, quorum summa sit $\frac{2456}{512}$. productus verò $\frac{2457}{512}$ soluta erit quæstio. Inuenientur autem per trigesimam primi, & erunt quæsiti numeri in minimis $\frac{27}{8}$ & $\frac{91}{64}$. quorum productus $\frac{2457}{512}$. cui addendo & detrahendo summam ipsorum numerorum, fiunt cubi $\frac{4913}{512}$. & $\frac{1}{512}$ à lateribus $\frac{17}{8}$ & $\frac{1}{8}$.

Aliam viam si libeat amplecti, & curare vt æqualitas consistat inter quadratos & Numeros, abolendo cubos, puta $-$ 4 C. Cùm in latere sint 3 Q. patet ex 3 Q. bis in $\frac{2}{3}$ N. fieri 4 C. vnde constat in latere ponendos $\frac{2}{3}$ N. Sed & signi ratio si habeatur $-$ 4 C. æquè bene fiunt ex 3 Q. in $-$ $\frac{2}{3}$ N. atque ex $\frac{2}{3}$ N. in $-$ 3 Q. Verùm si ponas latus fictitium 3 Q. + 1 $-$ $\frac{2}{3}$ N. fiet quadratus 9 QQ. + 1 $-$ 4 C. + 6 $\frac{4}{9}$ Q. $-$ $\frac{4}{3}$ N. vnde hoc incommodi accidit, vt tam quadratorum quàm Numerorum numerus, excedat numerum quadratorum & Numerorum qui, sunt ex altera æquationis parte, puta 6 Q. $-$ 12 N. ac proinde tandem $\frac{4}{9}$ Q. + 10 $\frac{2}{3}$ N. æquantur nihilo. Superest igitur vt latus fictitium ponatur 1 + $\frac{2}{3}$ N. $-$ 3 Q. & fit quadratus 9 QQ. + 1 $-$ 4 C. + $\frac{4}{3}$ N. $-$ 5 $\frac{5}{9}$ Q. qui æquatur 9 QQ. + 6 Q. + 1 $-$ 4 C. $-$ 12. N. & fit 1 N. $\frac{15}{13}$. Sunt igitur quæsitorum cuborum latera $\frac{28}{13}$ & $\frac{2}{13}$. ipsi cubi $\frac{21952}{2197}$ & $\frac{8}{2197}$. Per quos si propositam initio quæstionem soluere velimus, cùm horum summæ semissis sit $\frac{10980}{2197}$. Quærendi sunt duo numeri quorum summa sit $\frac{10972}{2197}$. productum verò $\frac{10980}{2197}$. Igitur operantes per Canonem trigesimæ primi sumemus quadratum semissis summæ, puta $\frac{30096196}{4826809}$ à quo auferemus productum, & relinquetur $\frac{5973136}{4826809}$, cuius latus $\frac{2444}{2197}$ additum & ademptum semissi summæ $\frac{5486}{2197}$ dabit quæsitos numeros $\frac{7930}{2197}$ & $\frac{3042}{2197}$ seu in minimis $\frac{610}{169}$ $\frac{18}{13}$. Horum productus est $\frac{10980}{2197}$. cui si addas & adimas summam numerorum $\frac{10972}{2197}$ fient cubi qui suprà. $\frac{21952}{2197}$ & $\frac{8}{2197}$.

Cæterùm & latera cuborum qui per hoc lemma quęruntur diuersimodè fingi possunt, nimirum alterum poni potest quodlibet binomium constans ex Numeris & vnitatibus, alterum verò eiusdem binomij residuum, vt 2 N. + 2. & 2 N. $-$ 2. vel 3 N. + 2. & 3 N. $-$ 2. Semper enim aliquo modorum quos explicauimus, ad æquationem commodam peruenietur.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE tres numeros, vt productus eorum multiplicatione siue addita summa ipsorum, siue detracta cubum faciat. Hac in re scias quod quolibet quadrato diuiso in duas partes, quarum altera sit latus eius, productus harum partium multiplicatione addita summa illarum, cubum facit. Ponatur igitur quadratus 1 Q. & diuidatur in latus suum, & in id quod superest, nimirum in 1 N. & 1 Q. $-$ 1 N. & productum multiplicationis eorum, vtroque adscito facit cubum. Superest vt idem productum, detracto vtroque faciat cubum. Atqui facit 1 C. $-$ 2 Q. Hæc ergo cu-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ κύβον. ἐν τῷ τοιούτῳ ἅπας τετράγωνος ἀριθμὸς διαιρεθεὶς εἴς τε τὴν πλευρὰν, καὶ τὸν λοιπὸν, ποιεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου, κύβον. τετάχθω τοίνυν ὁ τετράγωνος δυνάμεως α. καὶ διῃρήσθω εἴς τε τὴν πλευρὰν καὶ τὸν λοιπὸν, ἔσται ς α. καὶ δυνάμεως α λείψει ς α. καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου, κύβος. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον, ποιεῖν κύβον. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιεῖ κύβον α λείψει δυνάμεων β. ταῦτα ἴσα κύβῳ

ἐλάσσονι τοῦ κύβου α. πλάσσω κύβον ἀπὸ τοῦ ϛ^ου α^ϛ. [τουτέστι] κ^υ α^η. καὶ πάντα ὀκτάκις. γίνονται κ^υ η λεῖψει δυνάμεων ιϛ ἴσοι κύβῳ α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ^ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιϛ^ζ. ὁ δὲ δεύτερος ρμδ^μθ.

bo æquantur qui sit minor quàm 1 C. formo cubum ab $\frac{1}{2}$ N. is est $\frac{1}{8}$ C. & omnia octies fiunt 8 C. − 16 Q. æquales 1 C. & fit 1 N. $\frac{16}{7}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{16}{7}$. secundus $\frac{144}{49}$.

IN QVAESTIONEM XXX.

HÆC quæstio eadem est cum præcedente, sed tractatio eius diuersa, & quidem facilior. Lemma quod assumitur de inueniendis duobus numeris, quorum productus adscita amborum summa cubum faciat, facile est demonstratu. Sit enim quilibet Numerus A cuius quadratus B. vnde auferendo ipsum A supersit C. ductoque A in C. fiat D. dico si ad ipsum D addatur summa ipsorum A C. seu B fieri cubum. Etenim ducendo A in suum quadratum B. fit cubus ipsius A. Sed ducere A in B idem, est ac ducere A sigillatim in ipsos A. C. ex quibus B componitur; productus autem ex A in A est B, & productus ex A in C est D. Igitur summa amborum B D æquatur cubo ipsius A. Quod erat demonstrandum. Reliqua sunt perspicua, nec maiori explicatione indigent.

A 5. B 25. C 20. D 100.

Cæterùm simili prorsum artificio soluentur & huiusmodi quæstiones.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione siue addito siue detracto ipsorum interuallo cubum faciat.

Ponatur alter quæsitorum numerorum 1 N. alter 1 Q. + 1 N. nam productus eorum multiplicatione, puta 1 C. + 1 Q. detracto interuallo ipsorum, cubum facit. Superest vt idem productus addito eodem interuallo cubum faciat, facit autem 1 C. + 2 Q. hoc ergo æquatur Cubo. Esto 8 C. & fit 1 N. $\frac{2}{7}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{2}{7}$ & $\frac{18}{49}$ qui soluunt quæstionem. Nam eorum productus est $\frac{36}{343}$. cui addendo & adimendo interuallum numerorum, putà $\frac{28}{343}$. fiunt cubi $\frac{64}{343}$ & $\frac{8}{343}$. Vbi & animaduersione dignum est interuallum numerorum esse semper quadratum, sicut & in priore quæstione summa Numerorum quadratus erat.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt eorum summa siue addito siue detracto producto multiplicationis eorundem, cubum faciat.

Ponatur alter 1 N. alter 1 Q. − 1 N. sic enim summa addito producto cubum facit. Superest vt à summa detrahendo productum, cubus fiat. Fit autem 2 Q. − 1 C. æqualis cubo, sit is quilibet numerus cuborum cubicus minor vnitate, vt fiat valor Numeri vnitate minor, & haberi possit alter numerorum qui positus est 1 Q. − 1 N. sit ergo cubus $\frac{1}{8}$ C. æqualis 2 Q. − 1 C. & fit 1 N. $\frac{16}{9}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{16}{9}$ & $\frac{112}{81}$ qui soluunt quæstionem, nam productus est $\frac{1792}{729}$ summa verò ad eandem denominatorem redacta $\frac{2304}{729}$ cui addendo & adimendo productum, fiunt cubi $\frac{4096}{729}$ & $\frac{512}{729}$ à lateribus $\frac{16}{9}$ & $\frac{8}{9}$.

QVAESTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum siue addito siue detracto producto cubum faciat.

D – D –
A – B – C –

Vtentes eodem logismo ferè quo vsus est Diophantus quæstione vigesima nona huius. Sint cubi qui fieri debent A C. & productus multiplicatione quæsitorum numerorum esto D. interuallum eorundem B. Igitur ex hypothesi addendo D ad B fiet cubus C. & auferendo eundem D ab eodem B remanebit cubus A. Quamobrem cuborum A C interuallum duplum est ipsius D. At quoniam A B C sunt in medietate arithmetica, [1] B est semissis summæ ipsorum A C. Eò ergo redacti sumus vt inueniamus duos Numeros, quorum productus sit semissis interualli duorum cuborum, & eorundem interuallum sit semissis summæ eorundem cuborum. Atqui, vt constat ex Canone trigesimæ tertiæ primi, dato interuallo duorum numerorum, & producto multiplicationis, si quærantur numeri, vt solutio contingat rationalis, oportet vt quadrato interualli addendo quadruplum producti quadratus fiat. Igitur quærendi sunt duo cubi tales, vt quadrato semissis summæ ipsorum addendo quadruplum semissis interualli, seu duplum interualli eorundem, fiat quadratus. Ponantur ipsorum latera 1 N. + 1. & 1 – 1 N. Erit summa cuborum 6 Q. + 2. cuius semissis 3 Q. + 1. cuius quadratus 9 QQ. + 6 Q. + 1. cui si addatur duplum interualli cuborum, puta 4 C. + 12 N. fiet 9 QQ. + 6 Q. + 1. + 4 C. + 12 N. æqualis quadrato. Huius latus esto 1 + 6 N. – 3 Q. fiet quadratus 9 QQ. + 30 Q. + 1 + 12 N. – 36 C. æqualis 9 QQ. + 6 Q. + 1. + 4 C. + 12 N. vnde fit 1 N. $\frac{3}{5}$. & sunt cuborum latera $\frac{8}{5}$ & $\frac{2}{5}$. ipsi cubi $\frac{512}{125}$. & $\frac{8}{125}$. semissis summæ horum est $\frac{260}{125}$. semissis interualli $\frac{252}{125}$. Itaque si inueniamus duos numeros quorum interuallum sit $\frac{260}{125}$. productus verò $\frac{252}{125}$ soluta erit quæstio proposita. Inuenientur autem per trigesimam tertiam primi puta $\frac{14}{5}$ & $\frac{18}{25}$. quorum productus $\frac{252}{125}$. at interuallum $\frac{260}{125}$. cui si addatur & adimatur productus, fiunt cubi $\frac{512}{125}$ & $\frac{8}{125}$. 5. 1. poris.

QVAESTIO QVARTA.

Inuenire duos numeros, vt producto addendo summam, & ab eodem auferendo interuallum numerorum, fiat cubus vtrimque.

Patet ex hypothesi, cuborum qui fieri debent interuallum componi ex summa & ex interuallo quæsitorum numerorum. Quare sint cubi qui fieri debent 1. & 8. Igitur horum interuallum 7. est aggregatum ex summa & interuallo numerorum. [2] Quare 7. est duplum maioris numeri, & ipse maior numerus est $\frac{7}{2}$. ponatur minor 1 N. 23. 1. poris. erit productus $\frac{7}{2}$ N. cui addendo summam numerorũ, puta $\frac{7}{2}$ + 1 N. fit $\frac{7}{2}$ + $\frac{9}{2}$ N. æqualis 8. vel à producto auferendo interuallum numerorum, manet $\frac{9}{2}$ N. – $\frac{7}{2}$ æqualis 1. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique idem valor Numeri 1. Sunt ergo quæsiti Numeri 3 $\frac{1}{2}$ & 1. Ex hac autem operatione sequitur cubos ad placitum sumi posse qui fiant huiusmodi additione & subtractione.

QVAESTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros, vt producto addendo interuallum, & ab eodem auferendo summam numerorum, cubus fiat vtrinque.

Sumantur vt prius cubi ad placitum 8. & 64. qui fiant huiusmodi additione & subtractione. Igitur horum interuallum 56. componetur ex summa, & ex interuallo quæsitorum numerorum. [3] Quare 56. est duplum maioris numeri, ipse maior numerus 28. 13. 1. poris. ponatur minor 1 N. erit productus 28 N. cui si addas interuallum numerorum fit 27 N. + 28. æqualis 64. vel si ab eodem producto auferas summam Numerorum fit 27 N. – 28. æqualis 8. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique 1 N. $\frac{4}{3}$. sunt ergo quæsiti numeri 28. & $\frac{4}{3}$.

QVAESTIO SEXTA.

Inuenire duos numeros, vt summæ addendo interuallum, & ab eadem auferendo productum, cubus vtrimque fiat.

Sumantur cubi ad placitum dum duplum minoris non superet maiorem, sumantur ergo 8. & 64. Quia igitur summæ quæsitorum numerorum addendo interual- 23.1.poris. lum ipsorum, fit 64.[1] patet 64. esse duplum maioris numeri. ergo ipse maior numerus est 32. Ponatur minor 1 N. fiet summa 32 + 1 N. à qua auferendo productum 32 N. superest 32 – 31 N. æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{24}{31}$. Sunt ergo quæsiti numeri 32. & $\frac{24}{31}$.

QVAESTIO SEPTIMA.

Inuenire duos numeros, vt summæ addendo productum, & ab eadem auferendo interuallum, cubus fiat vtrimque.

Sumantur rursus cubi quicunque 8. & 64. Quia ergo ex summa Numerorum 23.1.poris. auferendo interuallum remanet 8.[2] Patet 8. esse duplum minoris numeri. Quare ipse minor est 4. Ponatur maior 1 N. erit productus 4 N. cui addendo summam fit 4 + 5 N. æqualis 64. & fit 1 N. 12. suntque quæsiti Numeri 4. & 12.

QVAESTIO OCTAVA.

Inuenire duos numeros, vt interuallo addendo summam, & ab eodem interuallo auferendo productum, cubus vtrimque conficiatur.

Sumantur duo cubi, quorũ maior superet duplũ minoris, quales sunt 8. & 64. Quia igitur interuallo numerorum addendo summam, fit 64. erit 64. duplum maioris numeri. Ipse maior numerus 32. Ponatur minor 1 N. erit interuallum 32 – 1 N. vnde auferendo productum, fiet 32 – 33 N. æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{8}{11}$ suntque quæsiti numeri 32. & $\frac{8}{11}$.

QVAESTIO NONA.

Inuenire duos numeros, vt producto multiplicationis, siue addatur summa, siue interuallum ipsorum, fiat cubus.

Ponãtur cubi qui fieri debent 8. & 64. Cùm igitur eidem producto addendo interuallũ & summã numerorum fiant 8 & 64. patet inter ipsos 8. & 64. eandem esse diffe- 23.1.poris. rẽtiam, quæ est inter summam & interuallum numerorum,[3] at hæc dupla est minoris Numeri. Igitur 56. est duplum minoris numeri, & ipse minor numerus est 28. Ponatur maior 1 N. erit productus 28 N. interuallum 1 N. – 28. quo ad productum addito fit 29 N. – 28. æqualis 8. vnde fit 1 N. $\frac{36}{29}$ maior numerus. Quod est impossibile, cum minor sit 28. Porrò 36. est compositum ex minore cubo, & ex semisse interualli cuborum, at 29. est ipse semissis interualli cuborum vnitate auctus. Igitur inueniendi sunt duo cubi, vt aggregatum ex minore & ex semisse interualli ipsorum, diuisum per eundem semissem vnitate auctum, det quotientem maiorẽ ipso semisse interualli cuborum; seu quod idem est, oportet vt aggregatum ex minore cubo & ex semisse interualli cuborum, superet productũ ex semisse interualli cuborum in seipsum vnitate auctum. At hic productus æquatur quadrato semissis interualli cuborum aucto suo latere. Igitur oportet vt aggregatũ ex minore cubo & ex semisse interualli cuborum, excedat quadratũ semissis eiusdem interualli auctum suo latere, & auferendo vtrimque eundem semissem interualli cuborũ; Oportet vt minor cubus excedat quadratum semissis interualli cuborum. Statuatur maior, quilibet cubus, puta 8. & diuidatur 8. in duas partes, quarum maior excedat quadratum semissis minoris. Quoniam ergo diuiso 8. in partes æquales 4. & 4. contingit alteram æquari quadrato semissis alterius, patet si altera ponatur maior quàm 4. altera minor, haberi quod quæritur nam maior excedet quadratum semissis minoris. Proinde posito maiore cubo 8. talis ponendus est minor vt sit maior quàm 4. Sic enim minor cubus excedet quadratum semissis interualli cuborum. Hoc vt facilè fiat, reducatur 8. ad fractionem cubicam denominatam à maiore aliquo cubo, puta ad $\frac{216}{27}$. & ad eiusdem denominationis fractionem reducatur 4. fiet $\frac{108}{27}$. Tum sumatur cubus aliquis inter 108. & 216. puta 125. cui subscribendo denominatorem eundem, fient quæsiti Cubi

$\frac{125}{27}$ & $\frac{216}{27}$ seu 8. per quos commodè soluetur quæstio. Nam eorum interuallum est $\frac{91}{27}$ cuius semissis $\frac{91}{54}$ est minor quæsitorum numerorum. Ponatur maior 1 N. erit summa 1 N. + $\frac{91}{54}$ productus verò $\frac{91}{54}$ N. cui addendo summam fit $\frac{145}{54}$ N. + $\frac{91}{54}$ æqualis 8. vnde fit 1 N. $\frac{341}{145}$ maior scilicet numerus, minor autem est $\frac{91}{54}$. & soluitur quæstionem.

Vt autem methodus quam tradidi ad inueniendum duos cubos, quorum minor excedat quadratum semissis interualli ipsorum, firmius comprehendatur: statuatur rursus maior cubus 64. qui diuidatur in duas partes, quarum maior superet quadratum semissis minoris. Erit igitur maior pars 32 + 1 N. minor 32 − 1 N. huius semissis 16 − $\frac{1}{2}$ N. cuius quadratus 256 + $\frac{1}{4}$ Q. − 16 N. debet esse minor quàm 32 + 1 N. & addendo vtrimque æqualia, tum auferendo similia à similibus, ac demum omnia per 4 multiplicando, fiunt 68 N. maiores quàm 896 + 1 Q. Qua æquatione resoluta fit 1 N. maior, vel certè non minor quàm 18. vnde constat maiorem partem de 64. debere esse 50. vel maiorem quàm 50. Ponatur 50. minor 14. Patet igitur maiore Cubo posito 64. minorem sumendum esse non minorem quàm 50. sic enim eorum interuallum minus erit quàm 14. ac proinde semissis interualli quadratus minor erit minore cubo, vt requiritur. Itaque reducatur 64. ad fractionem cubicam, puta ad $\frac{4096}{64}$. & ad eandem denominationem reducatur 50. fiet $\frac{3200}{64}$ sumatur ergo cubus inter 3200. & 4096. qualis est 3375. Huic igitur eundem denominatorem adscribendo, habebuntur cubi quæsiti $\frac{3375}{64}$ & $\frac{4096}{64}$. seu 64. Per quos rursus, si libet, solues quæstionem.

QVAESTIO DECIMA.

Inuenire duos numeros, vt producto multiplicationis siue adimatur summa, siue interuallum ipsorum, fiat cubus.

Eodem ferè logismo quo suprà concludemus, reperiendos esse duos cubos, quorum maior superet quadratum semissis interualli ipsorum. Ponatur ergo minor 8. maior 8 + 1 N. Igitur 8 + 1 N. debet esse maior quàm $\frac{1}{4}$ Q. Quæ æquatione resoluta fit 1 N. minor quàm 8. Quare posito minore cubo 8. debet maior esse minor quàm 16. reducantur 8. & 16. ad fractionem denominationis cubicæ, puta ad $\frac{64}{8}$ & $\frac{128}{8}$. Quærendus ergo est cubus inter 64. & 128. qualis est 125. eruntque quæsiti cubi 8. & $\frac{125}{8}$. Quorum interuallum $\frac{61}{8}$ cuius semissis $\frac{61}{16}$ est minor quæsitorum numerorum. Ponatur maior 1 N. fiet summa 1 N. + $\frac{61}{16}$. productus verò $\frac{61}{16}$ N. vnde auferendo summam, manet $\frac{45}{16}$ N. − $\frac{61}{16}$ æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{21}{5}$. Tantus est maior, minor verò $\frac{61}{16}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XXXI.

INVENIRE quatuor numeros quadratos, quorum summa cum summa laterum coniuncta, numerum imperatum faciat. Sit is 12. Quandoquidem omnis quadratus suo latere & vnitatis quadrante auctus facit quadratum, cuius latus semisse vnitatis multatum, exhibet prioris quadrati latus. At quatuor numeri qui quæruntur, suis lateribus adsum-

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς [τετραγώνους] οἳ συντεθέντες καὶ προσλαβόντες τὰς ἰδίας πλευρὰς συντεθείσας ποιῶσι δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω δὴ τὸν ιβ. ἐπεὶ πᾶς τετράγωνος λαβὼν τὴν ἰδίαν πλευρὰν καὶ μονάδος τέταρτον, ποιεῖ τετράγωνον. οὗ ἡ πλευρὰ λείψασα μονάδος ἡμίσεως ποιεῖ ἀριθμόν τινα, ὅς ἐστι τοῦ ἐξ ἀρχῆς τετραγώνου πλευρά, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἄρα προσλαβόντες μὲν τὰς ἰδίας πλευ-

ρας ποιοῦσι μονάδας ιβ. προσλαβόντες δὲ τὰ τέσσαρα τέταρτα ποιοῦσι τέσσαρας τετραγώνους, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ μονάδες ιβ. μετὰ τεσσάρων τετάρτων. ὅ ἐστι μονὰς μία, μονάδες ιγ. τὰς ιγ ἄρα μονάδας διαιρεῖν δεῖ εἰς τέσσαρας τετραγώνους, καὶ ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς ἀφελὼν μονάδος τὸ ἥμισυ, ἕξω τῶν τεσσάρων τετραγώνων τὰς πλευράς. διαιροῦνται δὲ οἱ ιγ εἰς δύο τετραγώνους, τόν τε δ καὶ τὸν θ. καὶ πάλιν ἑκάτερος τούτων διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους εἰς ξδ κε'. καὶ λϛ κε'. καὶ ρμδ κε'. καὶ πα κε'. λαβὼν τοίνυν ἑκάστου τὴν πλευρὰν η ε'. ϛ ε'. ιβ ε'. θ ε'. αἴρω ἀπὸ ἑκάστου τούτων μονάδος τὸ ἥμισυ, καὶ ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν ζητουμένων τετραγώνων ια ι'. ζ ι'. ιθ ι'. ιγ ι'. αὐτοὶ ἄρα οἱ τετράγωνοι. ὃς μὲν ρκα ρ'. ὃς δὲ μθ ρ'. ὃς δὲ τξα ρ'. ὃς δὲ ρξθ ρ'.

ptis faciunt 12. iidem vtiq; adsumentes quatuor vnitatis quadrantes, facient quatuor quadratos. Atqui vnitates 12. auctæ quatuor quadrantibus vnitatis, hoc est 1. fiunt 13. Oportet igitur diuidere 13. in quatuor quadratos, tunc si à cuiuslibet latere detraxero $\frac{1}{2}$. habebo quæsitorum quatuor quadratorum latera. Diuiditur autem 13. in duos quadratos 4. & 9. & rursus quilibet ipsorum diuiditur in duos quadratos, nempe alter in $\frac{64}{25}$ & $\frac{36}{25}$. alter in $\frac{144}{25}$ & $\frac{81}{25}$. sumens igitur cuiusque latus, nempe $\frac{8}{5}$. $\frac{6}{5}$. $\frac{12}{5}$. $\frac{9}{5}$. aufero ab vnoquoque illorum $\frac{1}{2}$. & sunt latera quæsitorum quadratorum $\frac{11}{10}$. $\frac{7}{10}$. $\frac{19}{10}$. $\frac{13}{10}$. Ipsi ergo quadrati sunt $\frac{121}{100}$. $\frac{49}{100}$. $\frac{361}{100}$. $\frac{169}{100}$.

IN QVAESTIONEM XXXI.

LEMMA quod assumit Diophantus, sic breuissimè demonstratur. Esto quilibet numerus A B. & semissis vnitatis B C. sintque ipsorum quadrati D. E. & summa ipsorum A B. D. E sit F. Dico F esse quadratum à cuius latere si auferatur B C. relinquitur A B. [a] Etenim quadratus totius A C æquatur quadratis D. E. & producto bis ex A B in B C. sed quia B C est semissis vnitatis, hic productus bis æquatur ipsi A B. vt euidens est. Igitur quadratus totius A C. æquatur summæ ipsorum AB. D. E. seu ipsi F. Quare F est quadratus, cuius latus A C. à quo auferendo B C. remanet A B. Quod erat demonstrandum.

A ..... B $\frac{1}{2}$ C.
4. secundi. D 25. E $\frac{1}{4}$. F 30 $\frac{1}{4}$.

Quoniam verò infra docebimus quæstionem hanc vniuersalius proponi posse, nimirum inueniri posse quatuor quadratos, quorum summa adscito quolibet multiplice summæ laterum, datum conficiat numerum, necesse est & hoc lemma vniuersalius concipi, nimirum sic.

Omnis quadratus quolibet multiplice sui lateris auctus, & quadrato semissis multiplicatoris, quadratum exhibet, cuius latus multatum semisse multiplicatoris, fit prioris quadrati latus.

Esto quadratus E cuius latus A B. & sit multiplicator D. cuius semissis B C. cuius quadratus F. & summa ipsorum E. F. & producti ex A B in D. esto G. Dico G esse quadratum, à cuius latere si auferatur B C. remanet A B. etenim quadratus totius A C. [a] æquatur quadratis partium, nimirum ipsis E. F & producto bis ex A B in B C. seu producto ex A B in D. Quamobrem G. est quadratus ipsius A C. vnde patet auferendo B C. relinqui A B. Quod erat demonstrandum.

D 6.
A ..... B ... C.
E 25. F 9. G 64.
4. secundi.

Cæte-

Cæterùm totum analyseos Diophantææ negotium in eo consistit, vt datus numerus vnitate auctus diuidatur in quatuor quadratos. Quod quâ vniuersaliter fieri possit non docuit Diophantus. Equidem si datus numerus vnitate auctus quadratus sit, vel suaptè natura ex duobus quadratis compositus, facilè diuidetur in quatuor, atq; etiam in plures quotlibet quadratos per octauam secundi. Sed si harum proprietatum neutra illi accidat, quomodo res absoluenda sit non constat ex Diophanto. Etenim datus numerus esto 13. Tunc numerus 14. diuidendus erit in quatuor quadratos. Sed quo artificio? Nam 14. nec quadratus est, nec ex duobus quadratis compositus. Hæc difficultas non immeritò prima fronte inextricabilis appareat, quãuis rem subtilius considerati facilè euanescat. Etenim datus numerus vnitate auctus etsi nec quadratus sit, nec ex duobus quadratis cõpositus, attamen eum ex tribus, vel etiam ex quatuor quadratis suapte natura cõponi necesse est. Ita supradictus numerus 14. cõponitur ex tribus quadratis 1. 4. 9. Quare vno ex illis in duos diuiso per octauam secundi, iam totus numerus in quatuor quadratos diuisus erit. Omnem autem numerum vel quadratum esse, vel ex duobus, aut tribus, aut etiam quatuor quadratis componi satis experiendo deprehendes. Mihi sanè perfecta id demonstratione assequi nondum licuit, quam qui proferet maximas ei habebo gratias, præsertim cùm non solùm in hac quæstione, sed & in nonnullis libri quinti hoc supponere videatur Diophãtus. Interim libet id inductione confirmare, ostendendo propriũ esse numerorum omnium ab 1. vsque ad 120. vt constat ex sequenti diagrammate.

1. Quadratus.
2. ex 1. 1.
3. ex 1. 1. 1.
4. Quadratus.
5. ex 1. 4.
6. ex 1. 4. 1.
7. ex 1, 1. 1. 4.
8. ex 4. 4.
9. Quadratus.
10. ex 1. 9.
11. ex 1. 1. 9.
12. ex 4. 4. 4. vel 1. 1. 1. 9.
13. ex 4. 9.
14. ex 1. 4. 9.
15. ex 1. 1. 4. 9.
16. Quadratus.
17. ex 1. 16.
18. ex 9. 9. vel 1. 1. 16.
19. ex 1. 9. 9. vel 1. 1. 1. 16.
20. ex 4. 16. vel 1. 1. 9. 9.
21. ex 1. 4. 16.
22. ex 4. 9. 9. vel 1. 1. 4. 16.
23. ex 1. 4. 9. 9.
24. ex 4. 4. 16.
25. Quadratus.
26. ex 1. 25. vel 4. 4. 9. 9.
27. ex 1. 1. 25. vel 9. 9. 9.
28. ex 1. 1. 1. 25. vel 1. 9. 9. 9. vel 4. 4. 4. 16.
29. ex 4. 25.
30. ex 1. 4. 25.
31. ex 1. 1. 4. 25. vel 4. 9. 9. 9.
32. ex 16. 16.
33. ex 1. 16. 16.
34. ex 9. 25.
35. ex 1. 9. 25.
36. Quadratus.
37. ex 1. 36.
38. ex 1. 1. 36.
39. ex 1. 1. 1. 36. vel 1. 4. 9. 25.
40. ex 4. 36.
41. ex 16. 25. vel 1. 4. 36.
42. ex 1. 16. 25.
43. ex 9. 9. 25. vel 1. 1. 16. 25.
44. ex 4. 4 36.
45. ex 9. 36. vel 4. 16. 25.
46. ex 1. 9. 36. vel 1. 4. 16. 25.
47. ex 1. 1. 9. 36. vel 4. 9. 9. 25.
48. ex 16. 16. 16. vel 4. 4. 4. 36.
49. Quadratus.
50. ex 1. 49. vel 25. 25.
51. ex 1. 1. 49. vel 1. 25. 25.
52. ex 16 36.
53. ex 4. 49. vel 1. 16. 36.
54. ex 1. 4. 49.
55. ex 1. 1. 4. 49. vel 1. 9. 9. 36.
56. ex 4. 16. 36.
57. ex 1. 4. 16. 36.
58. ex 9. 49.
59. ex 1. 9. 49. vel 9. 25. 25.
60. ex 1. 1. 9. 49. vel 1. 9. 25. 25. vel 4. 4. 16. 36.
61. ex 25. 36.
62. ex 1. 25. 36.
63. ex 1. 1. 25. 36.
64. Quadratus.
65. ex 1. 64. vel 16. 49.
66. ex 1. 1. 64. vel 1. 16. 49.
67. ex 9. 9. 49.
68. ex 4. 64.
69. ex 1. 4. 64. vel 4. 16. 49.
70. ex 9. 25. 36.
71. ex 1. 9. 25. 36.
72. ex 36. 36. vel 4. 4. 64.

73. ex 9. 64.
74. ex 25. 49.
75. ex 1. 25. 49.
76. ex 4. 36. 36. vel 1. 1. 25. 49.
77. ex 4. 9. 64.
78. ex 4. 25. 49.
79. ex 1 4. 25. 49. vel 9. 9. 25. 36.
80. ex 16. 64.
81. Quadratus.
82. ex 1. 81.
83. ex 1. 1. 81. vel 9. 25. 49.
84. ex 4. 16. 64.
85. ex 4. 81. vel 36. 49.
86. ex 1. 4. 81. vel 1. 36. 49.
87. ex 1. 1. 4. 81. vel 1. 1. 36. 49.
88. ex 16. 16. 36.
89. ex 25. 64.
90. ex 9. 81.
91. ex 1. 9. 81.
92. ex 1. 1. 9. 81. vel 4. 16. 36. 36. vel 9. 9. 25. 49.
93. ex 4. 25. 64.
94. ex 4. 9. 81. vel 9. 36. 49.
95. ex 1. 4. 9. 81. vel 1. 9. 36. 49.
96. ex 16. 16. 64.
97. ex 16. 81.
98. ex 49. 49. vel 1. 16. 81.
99. ex 1. 49. 49. vel 9. 9. 81.
100. Quadratus.
101. ex 1. 100.
102. ex 1. 1. 100.
103. ex 1. 1. 1. 100. vel 4. 9. 9. 81. vel 4. 25. 25. 49. vel 9. 9. 36. 49.
104. ex 4. 100.
105. ex 1. 4. 100.
106. ex 25. 81.
107. ex 1. 25. 81.
108. ex 36. 36. 36. vel 1. 1. 25. 81.
109. ex 9. 100.
110. ex 1. 9. 100.
111. ex 1. 1. 9. 100.
112. ex 4. 4. 4. 100. vel 4. 36. 36. 36. vel 16. 16. 16. 64.
113. ex 49. 64.
114. ex 1. 49. 64.
115. ex 9. 25. 81.
116. ex 16. 100.
117. ex 36. 81.
118. ex 1. 36. 81.
119. ex 9. 25. 36. 49.
120. ex 4. 16. 100.

Tu, si vacat vlterius experiare licebit. Ego sanè de omnibus numeris vsque ad 325. experimentum sumpsi. Facile autem ad quotlibet quadratos extendetur quæstio sed si duo tantùm quadrati postulentur, quorũ summa cum laterum datum conficiat numerum, oportebit dati numeri quadruplũ auctum binario componi ex duobus quadratis. Et si tres quærantur quadrati, oportebit dati numeri quadruplum auctum ternario componi ex tribus quadratis. Si verò plures postulentur quadrati, nulla conditio præscribetur, quia tunc continget quendam numerum diuidendũ esse in quatuor aut in plures quadratos, quod semper fieri posse docuimus. Denique eadem arte, & ampliando lemma Diophanti, vt supra fecimus, inuenientur quotlibet quadrati, quorum summa adsumpto quolibet multiplici summæ laterum, datum conficiat numerum. Quoniam autem in his omnibus quæstionibus plerumque accidit aliquem numerum ita diuidendum esse in duos, vel tres vel plures quadratos, vt quilibet eorum excedat certum aliquem numerum, quod ritè perfici nequit, nisi per artificium quo vtitur Diophantus duodecima, decima tertia, & decima quarta quinti, satius erit huiusmodi quæstionum explicationem in eum locum reiicere.

QVÆSTIO XXXII.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας τετραγώνους, οἳ συντεθέντες καὶ λείψαντες τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας, ποιῶσι δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω δὴ ὁ δ. ἐπεὶ οὖν [θέλω] τὸν πρῶτον λείψαντα αὐτοῦ τὴν πλευρὰν, καὶ τὸν δεύτερον λείψαντα αὐτοῦ τὴν πλευρὰν, καὶ τὸν τρίτον, καὶ τὸν τέταρτον ὁμοίως λείψαντας [αὐτῶν τὰς πλευρὰς] ποιεῖν μο δ. ἀλλὰ μὴν καὶ πᾶς τετράγωνος

INVENIRE quatuor quadratos, quorum summa, laterum summa detracta faciat præscriptum numerum. Sit is 4. Quia volo primum suo multatum latere, & secundum suo multatum latere, itemque tertium & quartum suis multatos lateribus facere 4. Cæterum om-

nis quadratus suo latere multatus, & adsumens vnitatis quadrantem, facit quadratum, cuius latus adscito vnitatis semisse exhibet prioris quadrati latus; quatuor vtique quadrati quæsiti multati suis lateribus, & adsumentes quatuor vnitatis quadrantes, nimirum 1. facient quatuor quadratos. Sed & iidem multati suis lateribus, faciunt vnitates 4. & adsumentes 1. faciunt 5. Hoc ergo mihi incumbit vt diuidam 5. in quatuor quadratos, quorum singulorum lateribus vbi adiecero $\frac{1}{2}$. inuenero latera quæsitorum quadratorum. Diuiditur autem 5. in quatuor quadratos $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{64}{25}$. $\frac{36}{25}$. Horum sumo latera, nimirum $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{6}{5}$. addo cuilibet illorum $\frac{1}{2}$. & inuenio latera $\frac{11}{10}$. $\frac{13}{10}$. $\frac{21}{10}$. $\frac{17}{10}$. Sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{121}{100}$. $\frac{169}{100}$. $\frac{441}{100}$. $\frac{289}{100}$.

λείψας τὴν ἑαυτοῦ πλευρὰν, καὶ προσλαβὼν μονάδος τέταρτον ποιεῖ τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ προσλαβοῦσα μονάδος ἡμίσεως ποιεῖ τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς τετραγώνου πλευρὰν, ὥστε ἀριθμοὶ τέσσαρες τετράγωνοι λείψαντες αὐτῶν τὰς πλευρὰς καὶ προσλαβόντες μονάδος τέσσαρα τέταρτα, τουτέστι μονάδα μίαν ποιήσουσι τέσσαρας τετραγώνους. ἀλλὰ καὶ ἀριθμοὶ τέσσαρες λείψαντες αὐτῶν τὰς πλευρὰς ποιοῦσι μο δ. προσλαβόντες δὲ καὶ μονάδα μίαν ποιοῦσι μο ε. ἀπῆκται οὖν μοι τὸν ε διελεῖν εἰς τέσσαρας τετραγώνους, ἑκάστη τῶν πλευρῶν προσθεὶς μονάδος τὸ ἥμισυ, καὶ εὑρὼν ἀριθμὸν τὰς τῶν ζητουμένων τετραγώνων πλευράς. διαιρεῖται δὲ ὁ ε. εἰς τέσσαρας τετραγώνους θ^{κε}. καὶ ιϛ^{κε}. καὶ ξδ^{κε}. καὶ λϛ^{κε}. λαμβάνω τούτων τὰς πλευράς, γίνονται γ^{ε}. δ^{ε}. η^{ε}. ϛ^{ε}. προστίθημι ἑκάστῳ τούτων μονάδος τὸ ἥμισυ, καὶ εὑρίσκω τὰς πλευράς, ἣν μὲν ια^{ι}. ἣν δὲ ιγ^{ι} ἣν δὲ κα^{ι}. ἣν δὲ ιζ^{ι}. ἔσονται δὲ ἄρα οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ὃς μὲν ρκα^{ρ}. ὃς δὲ υμα^{ρ}. ὃς δὲ σπθ^{ρ}.

IN QVAESTIONEM XXXII.

LEMMA Diophanti vniuersalius etiam proponetur hoc pacto.

Omnis quadratus quolibet multiplice sui lateris multatus, & adsumens quadratum semissis multiplicatoris, quadratum facit, cuius latus adscito semisse mulriplicatoris, exhibet latus prioris quadrati. Oportet autem latus prioris quadrati esse maius semisse multiplicatoris.

H 48. D 6.
A ..... B ... C.
E 25. F 9. G 64.

Esto quadratus G. cuius latus A C. & sit multiplicator D cuius semissis B C. cuius quadratus F. productus autem ex D in A C. sit H. Itaque auferendo H ex G. & residuo addendo F. fiat E. Dico E quadratū esse à latere A B. cui addito B C. fit A C latus prioris quadrati G. Etenim quia productus ex D in A C puta H. [1] æquatur productis ex D in singulos A B. B C. productus autem ex D in suum semissem B C æquatur duplo quadrati F. patet auferre H ex G. idē esse, atque auferre ex G productum ex D in A B & duplum quadrati F. Quare cùm residuo addendo F fiat E, patet E fieri si ex G auferatur productus ex D in A B & quadratus F. vnde è conuerso si ipsi E addantur productus ex D in A B & quadratus F. fiet G. sed vt constat ex lemmate præcedentis, si quadrato ex A B addantur idem productus ex D in A B. & idem quadratus F fiet idem quadratus G. Igitur E est quadratus ipsius A B. Quod demonstrandum erat.

[1] 1. primi.

Hæc quæstio quoque ad quotlibet numeros extendetur, vt aliquot exẽplis ostendere libet, cùm hîc ad propositiones libri quinti recurrere minimè cogamur. Itaque

Inueniantur duo numeri, vt summa quadratorum, laterum summa detracta conficiat datum numerum. Oporret autem dati numeri quadruplum auctum binario componi ex duobus quadratis.

Datus esto 6. Igitur ad 6. addendo duos quadrantes vnitatis, patet $6\frac{1}{2}$ diuidendum in duos quadratos, & vtrique lateri addendo $\frac{1}{2}$ fient quæsitorum quadratorum latera. ducantur omnia in 4. fiet 26. diuidendus in duos quadratos. Diuiditur autem in 25. & 1. quorum latera 5 & 1. quorum semissis, puta $\frac{5}{2}$ & $\frac{1}{2}$ sunt latera quadratorum ex quibus $6\frac{1}{2}$ componitur. Addo ergo vnicuique $\frac{1}{2}$. & fiunt latera quæsitorum quadratorum 3. & 1. quæ soluunt quæstionem, nam summa laterum est 4. quadratorum 10. vnde auferendo 4. manet 6. Rursus

Inueniantur tres quadrati, quorum summa, laterum summa detracta datum conficiat numerum. Oporret autem dati numeri quadruplum auctum ternario componi ex tribus quadratis.

Datus esto 8. Igitur ad 8. addendo tres quadrantes vnitatis, fiet $8\frac{3}{4}$ diuidendus in tres quadratos, omnia per 4. fiet 35. diuidendus in tres quadratos. Diuiditur autem in 1. 9. 25. quorum latera 1. 3. 5. quorum semissis $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{5}{2}$. sunt latera quadratorum, ex quibus $8\frac{3}{4}$ componitur. Quare vnicuique addendo $\frac{1}{2}$ fient quæsitorum latera quadratorum 1. 2. 3. Nam summa quadratorum fit 14. vnde auferendo 6. summam laterum, superest 8. Rursus

Inueniantur quinque quadrati, quorum summa, laterum summa detracta, datum faciat numerum.

Datus esto 3. Igitur ad 3. addendo quinque quadrantes vnitatis fiet $4\frac{1}{4}$ diuidendus in quinque quadratos omnia per 4. fiet 17. diuidendus in quinque quadratos. Diuiditur autem in 4. 9. 4. & si duo ex illis in duos diuidantur, totus 17. in quinque diuisus erit, diuidatur ergo 4. in quadratos $\frac{16}{25}$ & $\frac{64}{25}$. & rursus 9. diuidatur in duos quadratos $\frac{81}{25}$ & $\frac{144}{25}$. sic totus 17. diuisus est in quinque quadratos, quorum latera 2. $\frac{4}{5}$. $\frac{8}{5}$. $\frac{9}{5}$. $\frac{12}{5}$. quorum semisses 1. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{9}{10}$. $\frac{6}{5}$. sunt latera quadratorum ex quibus componitur $4\frac{1}{4}$. vnde singulis addendo $\frac{1}{2}$. fiunt quæsitorum quadratorum latera $\frac{3}{2}$. $\frac{9}{10}$. $\frac{13}{10}$. $\frac{14}{10}$. $\frac{17}{10}$. & soluunt quæstionem. Item

Inueniantur quatuor quadrati, quorum summa, detracto sextuplo summæ laterum, datum conficiat numerum. Datus esto 4.

Quoniam, vt constat ex lemmate supra tradito, omnis quadratus multatus sextuplo sui lateris, & adsumens 9. quadratum facit, cuius latus adscito 3. exhibet prioris quadrati latus. Quatuor vtique quadrati multati sextuplo laterum & adsumentes quater 9. nimirũ 36. facient quatuor quadratos. Quare cùm quatuor quadrati multati sextuplo laterum faciant 4. patet addito 4. ad 36. fieri 40. diuidendum in quatuor quadratos, quorum lateribus si addatur 3. sigillatim, fient latera quæsitorum quadratorum. Porro 40. diuiditur in duos quadratos 36. & 4. quorum quilibet si diuidatur rursus in duos, puta 4. in $\frac{16}{25}$ & $\frac{64}{25}$. & similiter 36. in $\frac{324}{25}$ & $\frac{576}{25}$. Iam totus 40. in quatuor quadratos diuisus erit, quorum latera $\frac{4}{5}$. $\frac{8}{5}$. $\frac{18}{5}$. $\frac{24}{5}$. quibus addendo sigillatim ternarium, fiunt latera quæsitorum quadratorum $\frac{19}{5}$. $\frac{23}{5}$. $\frac{33}{5}$. $\frac{39}{5}$. & soluunt quæstionem. Rursus

Inueniantur quinque quadrati, quorum summa, detracto sexruplo summæ laterum, datum faciat numerum.

Datus esto 10. Igitur ad 10. addendo quintuplũ nouenarij, nimirum 45. fiet 55. diuidendus in quinque quadratos, & cuiuslibet lateri addendo 3. fient quæsitorum quadratorum latera. Diuiditur autem 55. in quatuor quadratos 1. 1. 4. 49. Quare vnus illorum puta 1. rursus in duos diuidatur, nimirum in $\frac{9}{25}$ & $\frac{16}{25}$. & sic totus 55. in quinque quadratos diuisus erit, quorum latera $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$. 1. 2. 7. quibus addendo sigillatim 3. fient latera quæsitorum quadratorum $\frac{18}{5}$. $\frac{19}{5}$. 4. 5. 10. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XXXIII.

VNITATEM diuidere in duos numeros, & vtriq; addere datum numerum, & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Esto diuidenda vnitas in duos numeros, & oporreat alteri addere 3. alteri 5. & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Ponatur primus 1 N. ergo secundus erit 1 − 1 N. & si primo addantur 3. fit 1 N. + 3. At si secundo addantur 5. fit 6 − 1 N. & productus eorum multiplicatione est 3 N. + 18 − 1 Q. æqualis quadrato. Esto quadrato 4 Q. Communis addatur defectus, fiunt 3 N. + 18. æquales 5 Q. & non est rationalis æquatio. Atqui 5 Q. est quadratus numerus vnitate auctus. Oportet itaque hunc ductum in vnitates 18. & adsumentem quadratum semissis 3 N. nimirum 2 ¼. facere quadratum. Eò igitur nunc redactus sum, vt quæram quadratum qui adsumpta vnitate, & per 18. multiplicatus, adscitisque 2 ¼ faciat quadratū. esto quadratus ille 1 Q. Hic vnitate auctus & ductus in 18. adscitisq; 2 ¼ fit 18 Q. + 20 ¼ æqualis quadrato. Omnia quater, fiunt 72 Q. + 81. æqualia quadrato. Formo quadratum à 8 N. + 9. & fit 1 N. 18. Ad positiones. Erit quadratus 324. Redeo ad propositū initio, & 3 N. + 18 − 1 Q. æquo quadrato iam inuento. 324 Q. & fit 1 N. 78/325 hoc est 6/25.

THN μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. ἔστω τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς. καὶ ᾧ μὲν προστιθέναι μ γ. ᾧ δὲ μ ε. καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς α. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μ α ↑ ς α. καὶ ἐὰν μὲν τῷ πρώτῳ προστεθῶσι μ γ. ἔσται ς α μ γ. ἐὰν δὲ τῷ δευτέρῳ μ ε. ἔσται μ ς ↑ ς α. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν ςς γ μ ιη ↑ δυ α. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω δυ δ. καὶ κοινὴ προσκείσθω τὰ τῆς λείψεως, γίνονται ςς γ μ ιη ἴσοι δυ ε. καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ἴσωσις ῥητή. ἀλλ' αἱ δυ ε. ἐστι τετράγωνος μετὰ μ α. δεῖ δὴ ταῦτα ἐπὶ τὰς ιη. μονάδας πολλαπλασιασθέντα, καὶ προσλαβόντα τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμισείας τῶν ἰδίων ςς τετράγωνον. τουτέστι β. α δ. ποιεῖν τετράγωνον. διὰ οὖν τοίνυν ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ ζητῆσαι τετράγωνον ὃς προσλαβὼν μ α. καὶ ὀκτωκαιδεκάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μ β. α δ. ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ τετράγωνος δυ α. οὗτος μετὰ μ α ὀκτωκαιδεκάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μ β. α δ. ποιεῖ δυ ιη μ κ. α δ. ἴσας τετραγώνῳ. πάντα τετράκις, γίνονται δυ οβ μ πα ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς η μ θ. γίνεται ὁ ς μ ιη. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ τετράγωνος τκδ. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς ἰσῶσαι ςς γ μ ιη ↑ δυ α ἴσοις τετραγώνῳ. ὃν νῦν πλάσσω δυ τκδ. καὶ γίνεται ὁ ς οη τκε. τουτέστιν ς κε.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϛ^{πε}. ὁ δὲ δεύτερος ιδ^{πε}.

Ad positiones. Erit primus $\frac{6}{5}$. secundus $\frac{14}{5}$.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

HIC Diophantus in solutione lemmatis assumpti ad regulas compositas deuoluitur. Sed subtili sane artificio cauet, ne incidat in numeros surdos, cuius defectu cautionis oon arbitratus sum ad huiusmodi regulas deueniendum esse vigesima tertia quæstione libri huius. Quamuis enim in proposito ibi exemplo res bene succedat, & solutio contingat rationalis, attamen non ostendit author quomodo id necessariò eueniat si aliquo modo mutetur operatio, quod in hac quæstione eleganter præstitit. Cæterùm quid sibi velit Diophantus, non satis adsequutus est Xilander. Putat enim eò quod 5 Q. æquantur 3 N. + 18. æquationem reducendam esse ad 1 Q. diuidendo scilicet omnia per 5. vnde fit 1 Q. æqualis $\frac{3}{5}$ N. + $\frac{18}{5}$. Quamobrem cùm Diophantus ait quadratum semissis de 3 N. addendum producto ex 5. in 18. censet Xilāder sumi debere semissem non de 3. simpliciter, sed de $\frac{3}{5}$. & eius quadratum esse nō 2 $\frac{1}{4}$ simpliciter, sed 2. $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{25}$. quæ interpretatio nimis coacta est, & à mēte Diophanti prorsus aliena. Tenebras autē effudit Xilandro, ignoraotia methodi qua regulas compositas resoluit Diophantus, quam ad trigesimā tertiam primi explicauimus. Nam ad vitandas fractiones, rarò Diophanrus æquatiooem reducit ad 1 Q. Sed ducto numero quadratorum in numerum vnitatum, addit producto quadratum semissis numeri Numerorum, & reliqua perficit, vt loco citato docuimus. Hinc est cur velit 5. numerum quadratorum duci in vnitates 18. & producto 90. addi 2 $\frac{1}{4}$ quadratum semissis numeri numerorum 3. Quoniam verò, vt solutio rationalis sit, oportet hac additiooe fieri quadratum, apparet oecessitas lemmatis assumpti. Cùm enim numerus quadrato æquandus sit 3 N. + 18 − 1 Q. patet quærendum esse quadratum, qui vnitate auctus & per 18. multiplicatus, itaque adsumens 2 $\frac{1}{4}$. faciat quadratum.

In huius quoque lemmatis explicatione insignis occurrit difficultas, cuius tamen ne verbum quidem Xilander. Cùm enim tandem 72 Q. + 81. æquandus sit quadrato, euidens est quadrati latus commodè fingi non posse, nisi vel quadratorum vel vnitatum oumerus, quadrarus sit. Ostendendum ergo est necessario euenire vt vnitatum numerus, qualis est hîc 81. quadratus sit alioquin casu, non arte certa res succedere videbitur. Atqui 81. est quadruplum ipsius 20 $\frac{1}{4}$. Quare vt 81. quadratus sit oportuit prius 20 $\frac{1}{4}$ quadratum esse. Porro 20. $\frac{1}{4}$ fit ad 18. addendo 2 $\frac{1}{4}$. Videndum igitur vnde prouenerint 18. & 2 $\frac{1}{4}$. factus est autem 18. ex 3. in 6. & 2 $\frac{1}{4}$ est quadratus semissis de 3 N. Fiunt autem 3 N. addendo simul + 6 N. & − 3 N. in multiplicatione 1 N. + 3. per 6 − 1 N. Quare cùm ob signorum contrarietatem additio io subtractionem mutetur, patet 3 N. tandem fieri auferendo 3 N. à 6 N. Quamobrem 18. est productus ex 3. in 6. At 2 $\frac{1}{4}$ est quadratus semissis interualli eorundem 3. &
2. 2. poris. 6. [1] Constat autem producto multiplicationis duorum numerorum addendo quadratum semissis interualli eorundem, fieri quadratum semissis summæ ipsorum. Quare patet propositum; sic vides 20 $\frac{1}{4}$ seu $\frac{81}{4}$ esse quadratum semissis duorum 3. & 6. seu ipsius $\frac{9}{2}$.

Rursus in fingendo latere quadrati 72 Q. + 81. magna cautio adhibenda est, quod non vidit Xilander, nec attigit ipse Diophantus. Etenim si ad hanc æquationē solùm respicias, sufficit si ponas hoc latus 9 + tot Numeris, quorum quadratus sit minor quàm 72. Sed si ponas hoc latus 9 + 8 N. vel 9. + aliquo numero N umerorum minore quàm 6. fiet valor Numeri qui prioribus positionibus nullatenus accommodari poterit, cùm enim eius quadratus æquabitur 3 N. + 18 − 1 Q fiet 1. N. maior vnitate. quod est absurdum, cùm 1 N. ponatur pars vnitatis. Hoc igitur incommodum vt vitemus, sic ratiocinandum est. Quia 3 N. + 18 − 1 Q. sit quadrato æquandus est, vt fiat 1 N. minor vnitate, in hac autem æquatione debent tandem 3 N. + 18. æquari cuidam quadratorum numero, & si 1 N. ponatur æqualis vnitati, vtique 3 N. + 18. æquabuntur 21 Q. Quo verò minor ponetur

valor Numeri, eo maiori numero quadratorum æquabuntur 3 N. + 18. manifestum est vt fiat 1 N. minor vnitate oportere vt 3 N. + 18. æquentur numero quadratorum maiori quàm 21. Porrò numerus iste quadratorum fit ex quodam quadrato vnitate aucto, quare sublata vnitate de 21. consequens est quadratum, cui æquari debet 3 N. + 18 − 1 Q. maiorem esse quàm 20. Cùm ergo latus proximum ipsius 20. sit $4\frac{1}{2}$ manifestum est, latus quadrati 72 Q. + 8. ita ponendum esse vt fiat valor Numeri maior quàm $4\frac{1}{2}$. fit autem in hac æquatione valor Numeri, auferendo à 72. quendam quadratum, & per residuum diuidendo productum ex 18. in latus eiusdem quadrati. Igitur $\frac{18\ N}{72 - 1\ Q}$. maior esse debet quàm $4\frac{1}{2}$. & tandem re ad integros redacta 18 N. maiores sunt quàm $324 - 4\frac{1}{2}$ Q. & addito defectu, atque etiam facto parabolismo, quia commode potest fieri, tandem 72. maior esse debet quàm 4 N. + 1 Q. Qua æquatione resoluta cùm fiat 1 N. $6\frac{2}{3}$ ferè patet latus fictitium ponendum 9 + tot numeris, qui excedant $6\frac{2}{3}$. sic Diophantus posuit 9 + 8 N. Poni quoque poterat 9 + 7 N. vel 9 + aliquot Numeris, qui excedant $6\frac{2}{3}$. & quorum quadratus sit minor quàm 72.

Eodem prorsus artificio quæstio hæc ad omnem numerum extendetur. Quod vt exemplo comprobemus. Esto 2. diuidendus in duas partes, vt primæ addendo 3. secundæ 5. & summas inter se multiplicando, fiat quadratus. Esto prima pars 1 N. ergo secunda 2 − 1 N. & si primæ addatur 3. secundæ 5. fiunt 1 N. + 3. & 7 − 1 N. & productus eorum multiplicatione est 4 N. + 21 − 1 Q. æquandus quadrato, videlicet alicui quadratorum Numero quadrato, qui talis sumendus est, vt auctus vnitate, & multiplicatus in 21. itaque adsumens 4. faciat quadratum. Ponatur is 1 Q. Igitur 21 Q. + 25. quadrato æquandus est. Sed curandum vt talis hîc prouenfat valor Numeri, vt applicatus priori æquationi, fiat in ea 1 N. minor quàm 2. quia 1 N. ponitur esse pars binarij. Cùm ergo æquando 4 N. + 21 − 1 Q. alicui quadrato, tandem 4 N. + 21. æquentur aliquot quadratis, si autem 1 N. ponatur 2. fiant 4 N. + 21. æquales $7\frac{1}{4}$ Q. patet vt fiat 1 N. minor quàm 2. oportere 4 N. + 21. æquari quadratorum numero maiori quàm $7\frac{1}{4}$. Et quia ille quadratorum numerus est quadratus vnitate auctus, auferendo vnitatem de $7\frac{1}{4}$ sequitur quadratum qui æqualis ponetur 4 N. + 21 − 1 Q. maiorem esse debere quàm $6\frac{1}{4}$. atque ideo latus eius maius esse oportet quàm $\frac{5}{2}$. Quamobrem numeri 21 Q. + 25. latus ita fingendum est, vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{5}{2}$. Fit autem 1 N. auferendo quadratum quendam de 21. & per residuum diuidendo decuplum lateris illius. Quare $\frac{10\ N}{21 - 1\ Q}$ maior esse debet quàm $\frac{5}{2}$. qua æquatione ritè præparata, tandem fiunt 4 N. + 1 Q maiores quàm 21. vnde constat 1 N. excedere debere 3. Ponatur igitur latus fictitium 5 + 4 N. fiet quadratus 25 + 40 N. + 16 Q. æqualis 21 Q + 25. & fiet 1 N. 8. quadratus 64. Redeo ad propositum initio, & 4 N. + 21 − 1 Q æquo quadrato 64 Q. & fit 1 N. $\frac{39}{65}$. Prima pars binarij. Secunda verò est $\frac{91}{65}$ quæ soluunt quæstionem nam primæ addendo 3. secundæ 5. fiunt $\frac{234}{65}$. & $\frac{416}{65}$ quorum mutuo ductu fit $\frac{97344}{4225}$ quadratus à latere $\frac{312}{65}$.

QVÆSTIO XXXIV.

VNITATEM diuidere in duos numeros, & addere vtrique datum numerum, & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Sit vnitas diuidenda in duos numeros, & oporteat alteri addere 3. alteri 5. & ita facere quadratum productum multiplicationis eorum. Ponatur primus 1 N. − 3. quandoquidem 3. de-

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. ἔστω δὴ τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ ᾧ μὲν προσθεῖναι μο γ. ᾧ δὲ μο ε. καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς α. καὶ λεῖψις μο γ ἃς προσλαμβάνει. λοιπὸς

ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται μο δ λεί ϛ α. καὶ ἐὰν μὲν τῷ πρώτῳ προστεθῶσι μο γ. γίνεται ϛ α. ἐὰν δὲ τῷ δευτέρῳ μο ε. γίνεται μο θ λεί ϛ α. καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν ϛϛ θ λεί Δ α ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω Δ δ. καὶ γίνεται ὁ ϛ α δ^ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ οὐ δύναμαι ἀφελεῖν ἀπὸ ϛ α. μονάδας γ. δεῖ οὖν τὸν ϛ μείζονα μὲν εἶναι μο γ. ἐλάσσονα δὲ μο δ. ὁ δὲ ϛ εὕρηται ἐκ τοῦ τὸν θ μερισθῆναι εἰς τὸν ε. ὅς ἐστι τετράγωνος σὺν μονάδι μιᾷ. εἰ δὲ ὁ θ μεριζόμενος εἴς τινα τετράγωνον σὺν μο α. [ἀριθμὸν] ποιεῖ [μείζονα] μο γ. εἰς ὃν ἄρα μερίζεται [ἐλάσσων] ἐστὶ τῶν γ. εἰς ὃν δὲ ὁ θ μερίζεται τετράγωνός ἐστι σὺν μονάδι, ὥστε ὁ τετράγωνος σὺν μονάδι μιᾷ ἐλάσσων ἐστὶ τῶν γ. καὶ ἤρθω ἡ μονάς. ὁ ἄρα τετράγωνος ἐλάσσων ἐστὶ μο β. πάλιν θέλομεν τὸν δεύτερον μεριζόμενον εἰς τετράγωνον σὺν μονάδι μιᾷ ποιεῖν ἀριθμὸν ἐλάσσονα μο δ. εἰς ὃν ἄρα μερίζεται, μείζων ἐστὶ μο β. α δ^ε. εἰς ὃν δὲ μερίζεται ὁ θ τετράγωνός ἐστι σὺν μονάδι μιᾷ, ὥστε ὁ τετράγωνος σὺν τῇ μονάδι μείζων ἐστὶ μο β. α δ^ε. καὶ ἤρθω ἡ μονὰς μία. ὥστε ὁ τετράγωνος μείζων ἐστὶ μονάδος, καὶ α δ^ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐλάσσων μο β. γέγονε οὖν μοι εὑρεῖν τινα τετράγωνον ὅς ἐστι μείζων μο α. α δ^ε. ἐλάσσων δὲ β. καὶ διαλύω ταῦτα εἰς μόρια τετραγωνικά, εἰς ξδ^α· καὶ γίνονται π. καὶ ρκη. τοῦτο

bet illi addi, relinquetur ergo secundus 4 - 1 N. & si primo addantur 3 fit 1 N. si autem secundo addantur 5. fit 9 - 1 N. & fit eorum multiplicatione 9 N. - 1 Q. æqualis quadrato. Esto quadrato 4 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$. si ad positiones hoc applicare coner, non possum auferre 3 de 1 N. Oportet igitur numerum maiorem quidem esse quàm 3. minorem verò quàm 4. Atqui 1 N. factus est diuiso 9. per 5. Ipse autem 5. est quadratus vnitate auctus. Iam si 9. diuisus per quadratum aliquem vnitate auctum facit numerum maiorem quàm 3. oportet eum per quem diuiditur minorem esse quàm 3. Sed is per quem 9. diuiditur est quadratus vnitate auctus. Ergo quadratus vnitate auctus minor est quàm 3. Auferatur vnitas. Igitur quadratus minor est quàm 2. Rursus quia volumus secundum diuisum per quadratum vnitate auctum, facere numerum minorem quàm 4. oportet eum per quem diuiditur maiorem esse quàm 2 $\frac{1}{4}$. Is autem per quem 9. diuiditur est quadratus vnitate auctus, proinde quadratus vnitate auctus maior est quàm 2 $\frac{1}{4}$. Auferatur vnitas. Ergo quadratus maior est quàm 1 $\frac{1}{4}$. Sed iam ostensus est minor quàm 2. Eo itaque res deducitur, vt inueniam aliquem quadratum maiorem quàm 1 $\frac{1}{4}$ minorem quàm 2. Resoluo hæc in partes quadratas, nempè in sexagesimas quartas, & fiunt 80. & 128. Facile ergo

inuenietur quadratus $\frac{100}{64}$ seu $\frac{25}{16}$. Reuertor ad id quod initio erat propositum. Quærebam 9 N. – 1 Q. æquare quadrato. esto inuento quadrato $\frac{25}{16}$ Q. & fit 1 N. $\frac{144}{41}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{21}{41}$. secundus $\frac{20}{41}$.

δ' ὅτι ῥᾴδιον, καὶ ἔστιν ὁ τετράγωνος ρ^{ξδ}. τουτέστιν κε^{ις}. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ ἐζήτουν ςς^{οι} θ. λείψει Δ^υ α ἴσα τετραγώνῳ. τουτέστι τῷ εὑρημένῳ, Δ^υ κε^{ις}. καὶ γίνεται ὁ ς ρμδ^{μα}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος κα^{μα}. ὁ δεύτερος κ^{μα}.

IN QVAESTIONEM XXXIV.

EADEM est quæstio hæc cum præcedente, sed diuersa operatio, qua videtur Diophantus rem absoluere voluisse absque auxilio regularum compositarum. Nam ita suas instituit positiones, vt tandem fiat 9 N. – 1 Q. quadrato æquandus, quod fit per simplicem æquationem qua quadrati Numeris æquales sunt, & fit valor Numeri diuidendo 9. per aliquem quadratum vnitate auctum. Quoniam verò altera pars vnitatis posita est 1 N. – 3. altera 4 – 1 N. patet 1 N. debere esse maiorem quàm 4. Igitur quærendus est quadratus qui vnitate auctus, & diuidens 9. det quotientem minorem quàm 3. maiorem quàm 4. Quare cùm diuidendo 9. tum per 3. tum per 4. fiant 3. & 2. $\frac{1}{4}$ patet quadratum vnitate auctum consistere debere inter 3. & 2 $\frac{1}{4}$. ac proinde auferendo vtrimque vnitatem, quærendus erit quadratus minor quàm 2. maior quàm 1 $\frac{1}{4}$. Tales infiniti reperientur reducendo 2. & 1 $\frac{1}{4}$ ad fractiones quadratas ab eodem aliquo quadrato maiore denominatas, vt fecit Diophantus qui reduxit ad sexagesimas quartas.

Cæterùm & hanc operationem cuilibet numero applicabimus, quod iam antè nos præstitit vieta noster zetetico 13. lib. 5. Sit diuidendus 3. in duas partes, vt alteri addendo 6. alteri 12. & summas inter se multiplicando, fiat quadratus. Ponatur pars altera 1 N. – 6. altera ergo erit 9 – 1 N. & primæ addendo 6. secundæ 12. fiunt 1 N. & 21. – 1 N. quorum mutuo ductu producitur 21 N. – 1 Q. æquandus quadrato. Sed ex ipsis positionibus apparet quærendum esse quadratum qui vnitate auctus & diuidens 21. det quotientem maiorem quàm 6. minorem quàm 9. Itaque cùm 21. diuisus tum per 6. tum per 9. det quotientes 3 $\frac{1}{2}$ & 2 $\frac{1}{3}$. Quadratus vnitate auctus sumendus erit inter 3 $\frac{1}{2}$ & 2 $\frac{1}{3}$. & ablata vnitate quærendus quadratus minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. maior quàm 1 $\frac{1}{3}$. Reducatur vterque ad trigesimas sextas, fient $\frac{90}{36}$ & $\frac{48}{36}$ inter quos sumi possunt quadrati proposito satisfacientes $\frac{49}{36}$. $\frac{64}{36}$. $\frac{81}{36}$. si sumas vltimum seu $\frac{9}{4}$ æquabis $\frac{9}{4}$ Q & 21 N. – 1 Q vnde fiet 1 N. $\frac{84}{13}$. Sunt ergo quæsitæ partes ternarij $\frac{6}{13}$. & $\frac{33}{13}$. quæ soluunt quæstionem, nam primæ addendo 6. secundæ 12. fiunt $\frac{84}{13}$ & $\frac{189}{13}$ quorum mutuo ductu fit $\frac{15876}{169}$ quadratus à latere $\frac{126}{13}$.

Sed & aliam analysim huic soluendæ quæstioni excogitauimus, Diophantæa vtráque non deteriorem, atque etiam faciliorem. sit 2. numerus diuidendus, & addendi 3. & 5. patet ergo summarum aggregatum fore 10. Quare res eò deducitur vt 10. diuidatur in duos planos similes, quorum alter superest 3. alter excedat 5. Sic enim ab altero auferendo 3. ab altero 5. remanebunt quæsitæ binarij partes. Porrò 10. diuidetur in duos huiusmodi planos similes hac arte. Sumpto minore addendorum 3. comparo illum cum residuo de 10. puta cum 7. & quæro duos quadratos, quorum sit minor ratio quàm 3. ad 7. quales sunt 4 & 9. vel 9. & 16. & alij infiniti. Diuidatur ergo 10. in duos numeros in ratione 4. ad 9. Inuenientur hi per Canonem secundæ primi $\frac{40}{13}$ & $\frac{90}{13}$. Quare si ab altero detraxero 3. ab altero 5. remanebunt quæsitæ binarij partes $\frac{1}{13}$ & $\frac{25}{13}$. Rursus si diuisero 10. in duos numeros seruantes rationem 9. ad 16. erunt hi $\frac{18}{5}$ & $\frac{32}{5}$ & à primo auferendo 3. à secundo 5. remanent quæsitæ binarij partes $\frac{3}{5}$ & $\frac{7}{5}$.

Eadem arte licebit & sequentes quæstiones soluere.

QVAESTIO PRIMA.

Datum numerum in duas partes secare, vt ab vtraque auferendo datum numerum, ex residuorum mutuo ductu, fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum maiorem esse summa detrahendorum numerorum.

Diuidendus sit 12. in duas partes, vt ab altera auferendo 3. ab altera 5. ex residuorum mutuo ductu, quadratus fiat. Ponatur altera 1 N. + 3. altera ergo erit 9 − 1 N. & à prima auferendo 3. à secunda 5. remanent 1 N. & 4 − 1 N. quorum mutuo ductu fit 4 N − 1 Q. æquandus quadrato. Esto cuilibet quadratorum numero quadrato, puta 9 Q. fiet 1 N. $\frac{2}{5}$ Sunt ergo partes quæsitæ 3 $\frac{2}{5}$ & 8 $\frac{3}{5}$. & soluunt quæstionem.

Aliter. Quoniam summa detrahendorum est 8. qua ablata de 12. superest 4. oportet diuidere 4. in duos quoscunque planos similes, sic enim alteri addendo 3. alteri 5. fient quæsitæ partes numeri 12.

QVAESTIO SECVNDA.

Datum numerum secare in duas partes, vt vtramque auferendo à dato numero, ex residuorum mutuo ductu fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum minorem esse summa numerorum, à quibus partes detrahendæ sunt.

Diuidendus sit 4. in duas partes, vt alteram auferendo à 3. alteram à 5. ex residuorum mutuo ductu fiat quadratus. Ponatur altera 3 − 1 N. altera ergo erit 1 + 1 N. & primam auferendo à 3. secundam à 5. remanent 1 N. & 4 − 1 N. quorum mutuo ductu fit 4 N. − 1 Q. æquandus quadrato, qui sic ponendus est, vt vnitate auctus & diuidens 4. det quotientem minorem quàm 3. quia scilicet altera pars posita est 3 − 1 N. At diuidendo 4. per 3. fit $\frac{4}{3}$. patet ergo quadratum vnitate auctum, debere esse maiorem quàm $\frac{4}{3}$ & ablata vnitate, quadratus debet esse maior quàm $\frac{1}{3}$. sit is 9 Q. fiet 1 N. $\frac{2}{5}$. Sunt ergo quæsitæ partes 2 $\frac{3}{5}$ & 1 $\frac{2}{5}$. & soluunt quæstionem.

QVAESTIO TERTIA.

Datum numerum secare in duas partes, vt alteri addendo datum numerum, ab altera datum etiam numerum detrahendo, ex mutuo ductu summæ & residui, fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum maiorem esse detrahendo.

Sit diuidendus 8. in duas partes, vt alteri addendo 3. ab altera detrahendo 5. ex summa in residuum fiat quadratus. Ponatur altera pars 1 N. − 3 ergo altera erit 11 − 1 N. & primæ addendo 3. à secunda auferendo 5. fiunt 1 N. & 6 − 1 N. Quorum mutuo ductu fit 6 N. − 1 Q. æquandus quadrato, qui sic ponendus est vt vnitate auctus & diuidens 6. det quotientem maiorem quàm 3. Quare cùm diuidendo 6. per 3. fiat 2. patet quadratum vnitate auctum debere esse minorem quàm 2. & detracta vnitate, sumendus erit quadratus minor quàm 1. Ponatur $\frac{1}{4}$ Q. fiet 1 N. $\frac{24}{5}$. sunt ergo quæsitæ partes $\frac{9}{5}$ & $\frac{31}{5}$.

QVAESTIO QVARTA.

Datum numerum secare in duas partes, vt alteri addendo datum numerum, alteram detrahendo à dato numero, ex summa in residuum fiat quadratus.

Hic duplex casus datur, quia numerus à quo fit detractio nunc minor, nunc maior esse potest numero diuidendo. Primùm ergo sit 8. secandus in duas partes, vt primæ addendo 3. secundam auferendo à 5. fiat quod postulatur. esto secunda 5 – 1 N. ergo prima erit 3 + 1 N. & secundam auferendo à 5. & addendo 3. primæ fiunt 1 N. & 6 + 1 N. quorum mutuo ductu fit 6 N. + 1 Q. æquandus quadrato, qui sic ponendus est, vt multatus vnitate & diuidens 6. det quotientem minorem quàm 5. Quare cùm diuiso 6. per 5. fiat $\frac{6}{5}$. patet quadratum vnitate multatum, debere esse maiorem quàm $\frac{6}{5}$. & addita vnitate, sumendus est quadrarus maior quàm $\frac{11}{5}$. esto 9 Q. fiet 1 N. $\frac{3}{4}$. Sunt ergo quæsitæ partes prima $\frac{15}{4}$ secunda $\frac{17}{4}$.

Deinde sit 8. secandus in duas partes, vt primæ addendo 3. secundam auferendo à 20. fiat quod petitur. Ponatur secunda 20 – 1 N. ergo prima est 1 N. – 12. & secundam auferendo à 20. addendo 3. primæ, fiunt 1 N. & 1 N. – 9. quorum mutuo ductu fit 1 Q. – 9. N. æquandus quadrato, qui talis ponendus est vt detracto eo ab vnitate, & per residuum diuidendo 9. fiat quotiens minor quàm 20. maior quàm 12. Cùm itaque diuidendo 9. tum per 20. tum per 12. fiant $\frac{9}{20}$ & $\frac{3}{4}$. & vtrumque auferendo ab vnitate, relinquantur $\frac{11}{20}$ & $\frac{1}{4}$. patet sumendum esse quadratum maiorem quàm $\frac{1}{4}$. minorem quàm $\frac{11}{20}$. sumatur $\frac{4}{9}$ Q. fiet ergo 1 N. $\frac{81}{5}$. & erunt quæsitæ partes. Prima $\frac{21}{5}$. secunda $\frac{19}{5}$.

QVÆSTIO XXXV.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, vt qui fit primo in secundum ducto, siue addito tertio, siue detracto quadratum faciat. Esto datus 6. Ponatur tertius 1 N. secundus vnitatum aliquot quæ sint minus quàm 6. puta 2. Primus ergo erit 4 – 1 N. Restant duo postulata, nimirum vt productus ex primo in secundum, tertio siue addito siue detracto faciat quadratum. Et occurrit duplicata æqualitas, nam 8 – 1 N. æquatur quadrato, & 8 – 3 N. æquantur quadrato. Expediri autem non potest, quia numeri inter se non habent rationem quam habet quadratus ad quadratum. Sed 1 N. vnitate minor est quàm 2. & 3 N. vnitate maior eodem 2. Eò itaque res deducta est, vt inueniam numerum aliquem loco ipsius 2. vt qui eo vnitate maior est ad eum qui vnitate minor est eodem, rationem habeat

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου ἐάν τε προσλάβῃ τὸν τρίτον, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ ϛ. τετάχθω ὁ τρίτος ϛος α. καὶ ὁ δεύτερος μο ὑπὲρ ὧν τὸ ϛ. ἔστω μο β. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται μο δ λείψει ϛος α. καὶ λοιπά ἐστι δύο ἐπιτάγματα, τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου ἐάν τε προσλάβῃ τὸν τρίτον, ἐάν τε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης μο η λείψει ϛος α. ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ μο η. λείψει ϛϛ γ ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ οὐ ῥητόν ἐστι διὰ τὸ μὴ εἶναι τοὺς ϛϛ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀλλὰ ὁ ϛ α. μονάδι ἐλάσσων τοῦ β. οἱ δὲ ϛϛ γ. ὁμοίως μείζονες μονάδι τοῦ β. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, ὥστε τὸν β. ἵνα ὁ μονάδι αὐτοῦ μείζων, πρὸς τὸν μονάδι αὐτοῦ ἐλάσσονα, λόγον

ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἔστω ὁ ζητούμενος ς^ος α. καὶ μονάδι μιᾷ αὐτοῦ μείζων, ἔσται ς α μ° α. ὁ δὲ μονάδι αὐτοῦ ἐλάσσων ς^ος α. λεῖψει μ° α. θέλομεν οὖν αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν ἔστω δ πρὸς α. ὥστε ς^ος εἷς λεῖψει μ° α ἐπὶ μονάδας δ. γίνονται ςς^οι δ λεῖψει μ° δ. καὶ ς^ος εἷς μ° α ἐπὶ τὴν μονάδα μίαν γίνεται ς α μ° α. καὶ εἰσὶν οὗτοι οἱ ἐκκείμενοι ἀριθμοὶ λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. νῦν ςς δ. λεῖψει μ° δ. ἴσοι ς^ῳ α μ° α. καὶ γίνεται ὁ ς^ος μ° ε^γ. τάσσω οὖν τὸν δεύτερον μ° ε^γ. ὁ γὰρ τρίτος ἐστὶ ς^ος α. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται μ° ιγ^γ. λεῖψει ς^ος α. λοιπὸν δεῖ εἶναι τὸ ἐπίταγμα τουτέστι τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου προσλαβόντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ λείψαντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου προσλαβὼν τὸν τρίτον ποιεῖ μ° ξε^θ. λεῖψει β^γ. ςς. ἴσα τετραγώνῳ. λείψας δὲ τὸν τρίτον ποιεῖ μ ξε^θ. λεῖψει ςς η^γ. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ πάντα εἰς τὰ θ. καὶ γίνονται μ° ξε. λεῖψει ςς ς ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ μ° ξε λεῖψει ςς κδ ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἐξισῶ τοὺς ςς^ους τῆς μιᾶς ἰσότητος ποιήσας τετράκις. καὶ ἔστι μ° σξ λεῖψει ςς κδ ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ μ° ξε λεῖψει ςς κδ ἴσοι τετραγώνῳ. νῦν τούτων λαμβάνω τὴν ὑπεροχήν, καὶ ἔστι μ° ρϞε. καὶ ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ἐστὶ μ° ρϞε. καί εἰσι ιε. καὶ ιγ. καὶ τῆς τούτων ὑπεροχῆς

quam habet quadratus ad quadratum. Esto quæsitus 1 N. erit ergo vnitate maior 1 N. + 1. At vnitate minor 1 N − 1. Volumus igitur hos inter se rationem habere quam habet quadratus ad quadratum, sit vt 4. ad 1. Itaque cùm ducto 4. in 1 N. − 1. fiat 4 N. − 4. & ducta 1. in 1 N. + 1. fiat 1 N. + 1. vt habeant expositi numeri rationem quam habet quadratus ad quadratum. erunt 4 N. − 4. æquales 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{5}{3}$. Pono igitur secundum $\frac{5}{3}$ nam tertius est 1 N. ergo primus erit $\frac{13}{3}$ − 1 N. Restat vt postulata perficiantur, videlicet vt productus ex primo in secundum siue adscito tertio, siue dempto faciat quadratum. Sed productus ex primo in secundum adscito tertio facit $\frac{65}{9}$ − $\frac{2}{3}$ N. hoc ergo æquatur quadrato, & idem productus dempto tertio facit $\frac{65}{9}$ − $\frac{8}{3}$ N. hoc etiam æquatur quadrato. Omnia nouies, fiunt 65 − 6 N. æqualia quadrato & 65 − 24 N. æqualia quadrato. Exæquo numeros æquationis vnius, multiplicans per 4. & est 260 − 24 N. æqualis quadrato, itemque 65 − 24 N. æquatur quadrato Horum nunc interuallum sumo quod est 195. & expono duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 195. ij sunt 15. & 13. Horum interualli

& sit

semissis in se æquatur minori, & fit 1 N. $\frac{8}{3}$. Ad positiones. erit primus $\frac{5}{3}$. secundus $\frac{5}{3}$. tertius $\frac{8}{3}$. & demonstratio est euidens.

τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ᾖ τῷ ἐλάσσονι τετραγώνῳ. καὶ γίνεται ὁ ς' μ° η γ'. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ε γ'. ὁ δὲ δεύτερος ε γ'. ὁ δὲ τρίτος η γ'. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXXV.

QVID hîc præstiterim in Diophanto restituendo coniicere est ex versione Xilandri, cùm in codicem emendatiorem non inciderim, sed textus lacunas replere, & passim deprauata emendare certissimis coniecturis coactus sim; vbi legebatur ipso initio ὁ δεύτερος μ° ὑφ' ὧν τὸ ῃ. restitui ὑφ' ὧν τὸ ϛ. vt sit sensus, Ponendum secundum aliquot vnitatum super quas sit 6. idest quæ sint minus quàm 6. quod necesse est vt pars inueniatur minor toto.

Cæterùm emendato textu satis perspicua est operatio Diophanti; vtitur duplicata æqualitate eo modo quem explicauimus ad decimam octauam tertij, & nihil amplius hîc addendum, nisi quod limitationes quædam attendendæ sunt, quibus neglectis in absurdum aliquod incidamus necesse est. Primùm ergo cùm quæritur numerus qui vnitate auctus ad seipsum vnitate multatum rationem habeat quadrati ad quadratum, vnde colligitur 1 N. $+$ 1. ad 1 N. $-$ 1. debere esse in ratione quadrati ad quadratum, non temerè sumendi sunt duo quadrati quibus propositi numeri proportionales sint. Etenim 1 N. debet esse secundus Numerus quæsitorum, at proinde pars totius numeri diuidendi 6. & per consequens minor quàm 6. Quamobrem tales duo quadrati deligendi sunt quorum summa, ad ipsorum interuallum minorem rationem habeat quàm 6 ad 1. Alioquin 1 N. maior inuenietur quàm 6. vt si esse ponatur 1 N. $+$ 1. ad 1 N. $-$ 1. sicut 49. ad 36. fiet enim per decimam nonam septimi 36 N. $+$ 36. æqualis 49. N. $-$ 49. & tandem 1 N. fiet $6\frac{7}{13}$. Quod est absurdum.

Deinde in duplicata æqualitate resoluenda cùm quæruntur duo numeri, quorum mutuò ductu fiat 195. hi tales sumendi sunt vt quadratus semissis summæ eorum sit minor quàm 260. vel vt quadratus semissis interualli eorundem sit minor quàm 65. quia scilicet numeri quadrato æquandi sunt 260 $-$ 24 N. & 65 $-$ 24. N. Quare cùm latus proximum de 65. sit 8. Oportet interuallum eorum non excedere 16. Idcirco sumi non potuerunt 194. & 1. neque 39. & 5. neque vlli integri præter 15. & 13. quos sumpsit Diophantus, sed per fractiones infinitis modis res expediri poterat.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE duos numeros, vt si alter ab altero eandem partem siue easdem partes acceperit, ratio ad reliquum sit ea quæ poscitur. Iubeatur vt primus accipiens secundi partem aliquam vel partes, sit ad residuum triplus. At secundus sumens à primo eandem partem, vel easdem partes, sit residui quincuplus. Ponatur secundus 1 N $+$ 1. Pars autem vel partes

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἕτερος παρὰ τοῦ ἑτέρου προσλαβὼν τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη λόγον ἔχῃ πρὸς τὸν καταλειφθέντα, τὸν ἐπιταχθέντα. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν πρῶτον προσλαβόντα παρὰ τοῦ δευτέρου μέρος τι, ἢ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι [τριπλασίονα, τὸν δὲ δεύτερον προσλαβόντα παρὰ τοῦ πρώτου τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι] πενταπλασίονα. τετάχθω ὁ δεύτερος ς' ᾱ μ° ᾱ. τὸ δὲ μέρος, ἢ μέρη

ἀυτοῦ ἔστω μ° α. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται ςς γ. λεῖψει μ° α. καὶ ὁ πρῶτος ἐὰν προσλάβῃ τοῦ δευτέρου μέρος τι, ἢ μέρη, τουτέστι μ° α. γίνεται τοῦ λοιποῦ τριπλασίων. θέλομεν δὴ καὶ τὸν δεύτερον προσλαβόντα [τοῦ πρώτου] τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι πενταπλασίονα. ἀλλ' ἐπεὶ οἱ δύο εἰσὶν ςς δ. καὶ ὁ δεύτερος λαμβάνει τι, καὶ ὁ πρῶτος δίδωσι, καὶ ὁ γινόμενος τοῦ λοιποῦ γίνεται πενταπλασίων, ὥστε ὁ συναμφότερος ὁ γινόμενος, καὶ ὁ λοιπὸς ἔσται ςς δ. ὥστε ὁ λοιπὸς ἔσται, ἐὰν τῶν ςς δ λάβωμεν τὸ ἕκτον τουτέστι ςς β^γ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ςς γ. λεῖψει μ° α. ἄρωμεν ςς β^γ. ἕξομεν τοῦ πρώτου μέρος ἢ μέρη. ἐὰν δὲ ἄρωμεν, γίνεται ςς ζ^γ. ⋔ μ° α. τοῦτο ἄρα τοῦ πρώτου μέρος ἐστὶν ἢ μέρη. λαβὼν γὰρ ὁ δεύτερος παρὰ τοῦ πρώτου ςς ζ^γ. λεῖψει μ° α. γίνεται πενταπλασίων τοῦ καταλιμπανομένου τοῦ πρώτου. λοιπὸν δὴ ἐνθάδε ζητῆσαι, εἰ ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη μονὰς μία, ςς ἑνὸς μ° α. τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ςς ζ^γ. λεῖψει μ° α. εἰσὶ τῶν ςς γ. λεῖψει μ° α. ὅταν δὲ τὸ τοιοῦτο ζητῇς, τὸ ὑπὸ τῶν ςς ζ^γ. λεῖψει μ° α. καὶ ς α μ° α. ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ςς γ. λεῖψει μ° α. ἐπὶ τὴν μονάδα. τουτέστι τὰ μέρη ἐναλλὰξ πολλαπλασιάζεται, ὧν εἰσιν δ ζ^γ. ςς δ^γ. λεῖψει μ° α. ἴσαι ἀριθμοῖς γ. λεῖψει μ° α. καὶ γίνεται ὁ ς ε^ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος η^ζ. ὁ δὲ δεύτερος ιβ^ζ. ἦν δὲ τοῦ δευτέρου μέρη μ° α. σκεπτόμεθα [ἃ μέρη] ἡ μ° α. τοῦ δευτέρου,

cius esto 1. Primus igitur erit 3 N – 1. sic enim primus sumens à secundo partem aliquam vel partes, nimirum 1. fit residui triplus. Volumus itaque & secundum sumentem primi eandem partem, vel easdem partes, residui quincuplum esse. Sed quoniam ambo simul faciunt 4 N. & secundus aliquid accipit, primusque id dat, & summa residui fit quincupla. Cæterùm summa eadem cum residuo iuncta facit 4 N. residuum vtique habebitur si sumamus sextantem de 4 N. nempe $\frac{2}{3}$ N. si ergo à 3 N. – 1. tollamus $\frac{2}{3}$ N. habebimus primi partem vel partes. Si autem tollamus, relinquitur $\frac{7}{3}$ N. – 1 Hoc ergo pars est vel partes primi. Nam secundus accipiens à primo $\frac{7}{3}$ N. – 1. fit quincuplus ad residuum ex primo. Superest hîc vt quæramus an quæ pars vel partes est 1. de 1 N + 1. eadem pars, vel eædẽ partes sit $\frac{7}{3}$ N – 1. de 3 N. – 1. Cùm autem tale aliquid quæris productum ex $\frac{7}{3}$ N. – 1. in 1 N. + 1. æquale est producto ex 3 N. – 1. in 1. hoc est partes alternatim multiplicantur, & fiunt $\frac{7}{3}$ Q. + $\frac{4}{3}$ N. – 1. æqualia 3 N. – 1. & fit 1 N. $\frac{5}{7}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{8}{7}$. secundus $\frac{12}{7}$. Erat autem 1. partes secundi, videamus ergo quæ partes secundi sit 1.

Est vtique $\frac{7}{12}$. Multiplico per 7. duos numeros; erit primus 8. secundus 12. Partes autem $\frac{7}{12}$. Et quia primus non habet duodecimam, multiplico per 3. vtrumque, ne incidamus in diuisionem vnitatis, & fit primus 24. secundus 36. Partes autem seu $\frac{7}{12}$ illius quidem 14. Huius verò 21. & demonstratio manifesta.

ἐστὶ δὲ ζ ιβ. καὶ ποιῶ ἑπτάκις τοὺς δύο ἀριθμούς. ἔσται ὁ πρῶτος μ° η. ὁ δεύτερος μ° ιβ. τὰ δὲ μέρη ζ ιβ. ἀλλ' ἐπεὶ ὁ πρῶτος οὐκ ἔχει δωδέκατον ποιῶ αὐτὰ τρὶς, ἵνα μὴ εἰς μονάδα ἐμπίπτει. ἔσται ὁ πρῶτος κδ. ὁ δεύτερος λϛ. τὰ δὲ μέρη τῶν ζ ιβ. [τοῦ μὲν ιδ. τοῦ δὲ κα.] καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXXVI.

INGENIOSA operatione quæstionem hanc soluit Diophantus. Sed emaculato textu, vt fecimus, omnia sunt perspicua. Cæterùm placet & aliam tradere analysim paulò compendiosiorem. Ponatur quæsitorum numerorum summa quotlibet vnitatum, puta 12. & sit primus 1 N. secundus 12 – 1 N. Cùm ergo primus sumpta parte secundi fiat triplus ad reliquum, si 12. diuidatur in partes seruantes proportionem triplam, per secundam primi nempe in 9. & 3. patet primum sumpta parte secundi fore 9. Quare inde detrahendo primũ, fiet pars secundi 9 – 1 N. similiter diuiso 12. in partes seruantes rationem quincuplam, puta in 10. & 2. patet secundum sumpta parte primi, fore 10. Quare inde auferendo secundum, fiet pars primi 1 N. – 2. Restat igitur, vt 1 N. – 2. sit eadem pars de 1 N. quæ pars est 9 – 1 N. de 12 – 1 N. Quamobrem hi quatuor numeri sunt proportionales, [a] ac proinde planus sub extremis æquatur plano sub medijs, idest 14 N. – 1 Q. – 24. æquatur 9 N. – 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{24}{5}$. suntque quæsiti numeri $\frac{24}{5}$ & $\frac{36}{5}$. Quod si communem denominatorem abiicere libeat, fient quæsiti numeri 24. & 36. iidem quos reperit Diophantus. Supponimus enim cum Diophanto inuentis semel duobus numeris quæstionem soluentibus, idem euenire duobus alijs quibuscunque sumptis in eadem ratione. Quod facile est demonstrare, quia de partibus proportionalibus agitur numerorum proportionalium, vt tibi considerandum relinquo. *19. septimi.*

QVÆSTIO XXXVII.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus ex ipsorum multiplicatione cum vtriusque summa datum faciat numerum. Faciat autem 8. Ponatur primus 1 N. secundus 3. & productus eorum multiplicatione cum summa vtriusque fit 4 N. + 3. Hæc æquantur 8. & fit 1 N $\frac{5}{4}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{5}{4}$. secundus 3. Nunc considero vnde 1 N. sit factus $\frac{5}{4}$. nimirum ex diuisione 5 per 4. sed 5. est excessus quo 8. superat 3.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἀορίστους, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. ποιείτω μ° η. τετάχθω ὁ πρῶτος ϛ α. ὁ δεύτερος μ° γ. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ἐστὶν ἀριθμῶν δ μ° γ. ταῦτα ἴσα μ° η. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε δ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος μ° ε δ. ὁ δεύτερος μ° γ. νῦν σκέπτομαι ὁ ϛ πόθεν ἐγένετο ε δ. ἐκ τοῦ τὰ ε μερισθῆναι εἰς τοὺς ϛϛ δ. ἀλλ' ὁ πέντε ἐστὶν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ η. ἧς ὑπερέχει τὰ γ.

ὁ δὲ ςς δ̄. εἰσὶν ὁ μονάδι μείζων τοῦ δευτέρου. ἐὰν ἄρα τάξωμεν τὸν δεύτερον ς οἵου δήποτε, καὶ ἄρω αὐτὸν ἀπὸ μ η̄. καὶ τὰ λοιπὰ μερίσω παρὰ τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἕξω τὸν πρῶτον. οἷον, ἔστω ὁ δεύτερος ς ᾱ λείψει μ ᾱ. ταῦτα αἴρω ἀπὸ μ η̄. λοιπὸν μ θ̄ λείψει ς ᾱ. ταῦτα μερίζω εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ς ᾱ. καὶ γίνεται μ θ ⋔ ς α. ἔσται ὁ πρῶτος. καὶ λέλυται ἐν τῇ ἀορίστῳ, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ η̄. τὸ δὲ ἐν τῇ ἀορίστῳ τοιοῦτόν ἐστιν, ἵνα τὸν ἀριθμὸν ὅσων ἄν τις θέλῃ μονάδων εἶναι ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

Et ipse 4. est secundus vnitate auctus. Si ergo statuam secundum numerorum quorlibet. Et auferam eum de 8. & residuum diuidam per secundum vnitate auctum, habebo primum. Verbi gratia sit secundus 1 N. – 1. hæc aufero de 8. restant 9 – 1 N. Hæc diuido per secundum vnitate auctum, id est per 1 N. & fit primus $\frac{9 - 1N}{1N}$. Et sic indefinitè soluta est quæstio, nam productus ex eorum multiplicatione, cum vtriusque summa facit 8. Indefinitè autem solui dicitur, quia quotcunque vnitatum ponatur 1 N satisfaciet postulatis.

IN QVAESTIONEM XXXVII.

QVID sit indefinitè quæstionem soluere, iam alibi docuit Diophantus, & hîc rursus explicat. Id enim fit cùm ita instituuntur positiones, vt quilibet numerus sumi possit pro valore Numeri. Quod tamen cautè accipiendum est. Etenim sæpè contingit non omnem omnino numerum sumi posse pro valore Numeri, sed omnem qui cadat intra certos limites. Vt in hypothesi Diophanti, cùm alter quæsitorum sit 1 N. – 1. alter $\frac{9 - 1N}{1N}$ patet 1 N. maiorem esse debere quàm 1. minorem quàm 9 Quod si ponas alterum quæsitorum 1. N. erit alter $\frac{8 - 1N}{1N + 1}$. vnde patet pro valore Numeri sumi posse quemlibet numerum minorem quàm 8. Porrò de huiusmodi terminis intra quos sumi debet valor Numeri, plura dicemus infrà ad quadragesimam primam.

QVÆSTIO XXXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι παρὰ μ ᾱ. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ η̄. τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ ιε̄. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ κδ̄. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν ὑπὸ

INVENIRE tres numeros, vt qui fiunt ex binorum mutuo ductu, adscita eorundem summa, faciant datos numeros. Oportet autem datos esse quadratos vnitate multatos. Imperatum sit vt productus ex primo in secundum adscito vtroque faciat 8. Productus ex secundo in tertium cum vtroque faciat 15. Denique productus ex primo in tertium cum vtroque faciat 24. Quoniam igitur volo

productum ex primo in secundum cum vtroque facere 8. si posuero secundum quemlibet, & eum de 8. detraxero, & residuum diuisero per vnitate maiorem secundo, habebo primum. Ponatur secundus 1 N − 1. & si eum abstulero de 8. & residuum diuisero per vnitate maiorem secundo, erit vtique primus $\frac{9}{1N} - 1$. Rursus simili ratione, quandoquidem volo productum ex secundo in tertium cum vtroque facere 15. Ab his aufero 1 N. − 1. & residuũ diuido per vnitate maiorem secundo, hoc est per 1 N. fiunt $\frac{16}{1N} - 1$. tantus est tertius. Superest vt productus ex primo in tertium cum vtroque faciat 24. Facit autem $\frac{144}{1Q} - 1$. Hæc æquantur 24. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{33}{12}$. secundus $\frac{7}{5}$. tertius $\frac{68}{12}$. & omnia ad eundem denominatorem, fit primus $\frac{165}{60}$. secundus $\frac{84}{60}$. tertius $\frac{340}{60}$.

πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ η. ἐὰν ἄρα τάξω τὸν δεύτερον ὅσου δήποτε, καὶ ἀπὸ μονάδων η ἄρω αὐτόν, καὶ τὸν λοιπὸν μερίσω παρὰ τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἕξω τὸν πρῶτον. τετάχθω ὁ δεύτερος ς α ⋔ μ α. καὶ ἐὰν ἀπὸ μ η ἄρω αὐτά, καὶ τὰ λοιπὰ μερίσω παρὰ τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἔσται ὁ πρῶτος θ ἀριθμοῦ μορίου. λεῖψει μ α. πάλιν ὁμοίως ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ ιε. ἀφελῶ ς α. λεῖψει μ α. καὶ τὸν λοιπὸν μερίσω εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ς α. γίνονται ις ἀριθμοῦ μορίου. λεῖψει μ α. ἕξω τὸν τρίτον. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν μ κδ. ποιεῖ δὲ ρμδ δυνάμεως μορίου. λεῖψει μ α. ταῦτα ἴσα μ κδ. καὶ γίνεται ὁ ς ιβ ε'. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος λγ ιβ'. ὁ δὲ δεύτερος ζ ε'. ὁ δὲ τρίτος ξη ιβ'. καὶ πάντα εἰς ἓν μόριον, καὶ γίνεται ὁ πρῶτος ρξε ξ'. ὁ δεύτερος πδ ξ'. ὁ δὲ τρίτος σμ ξ'.

IN QVAESTIONEM XXXVIII.

Cvr hîc requirat Diophantus datos numeros esse quadratos vnitate multatos, ratio est euidens; Cùm enim verbi gratia 25 Q. æquentur 144. vt solutio esset rationalis, oportuit diuidendo vnitates per quadratos, quotientem fieri quadratum, fit autem 25. addita vnitate ad 24. vnum datorum numerorum. Similiter 144. fit ex mutuo ductu 9. & 16. qui fiunt addita vnitate ad datos numeros 8. & 15. vnde sequitur ipsum 144. esse quadratum, cùm ex duorum quadratorum multiplicatione oriatur. Quamobrem quadrato 144. per quadratum 25. diuiso, produci quadratum necesse est, & proinde solutionem contingere rationalem.

Porrò ex his apparet conditionem hanc nimis strictè proponi à Diophanto, non enim erat necesse 144. & 25. quadratos fuisse, sed sufficiebat vt essent quadratorum similes, cùm certum sit huiusmodi numerorum siue multiplicatione, siue diuisione mutua semper procreari quadratum. Ita igitur præscribi debuit hæc conditio. *Oportet autem si cuilibet datorum numerorum addatur vnitas, productum ex binorum multiplicatione, ad reliquum habere rationem quadrati ad quadratum.* Verbi gratia. Summa primi & secundi adscito plano sub ipsis contento esto 11. secundi & tertij 19. tertij & primi 14. Hîc nullus datorũ numerorum est quadratus vnitate multatus. Attamen optimè

ſolui poteſt quæſtio, ob conditionis à nobis allatæ obſeruationem. Nam ponatur ſecundus 1 N. – 1. erit primus $\frac{12 - 1N}{1N}$. tertius verò $\frac{20 - 1N}{1N}$. ductoque primo in tertium, & ſumma illorum producto addita fiet $\frac{240 - 1Q}{1Q}$. æqualis 14. & tandem 240. æquantur 15 Q. vnde fit 1 N. 4. ſunt ergo quæſiti numeri 2. 3. 4. Itaque vides addita vnitate ad datos numeros 11. & 19. fieri 12. & 20. ex quorum mutuo ductu producitur 240. qui ad reliquum vnitate auctum, nempe ad 15. habet rationem quadrati ad quadratum. Hinc facile eſt Canonem formare.

Datis numeris adde vnitatem ſigillatim, productum ex binorum mutua multiplicatione diuide per reliquum, quotientis latus, erit vnus quæſitorum vnitate auctus.

Quod autem ait Xilander duobus primis vt collibuiſſet per præcedentem quæſtionem poſitis, puta $\frac{1}{2}$ & 7. licuiſſe tertium inuenire & ſatisfacere quæſtioni, falſum eſt vt ex hac ipſa hypotheſi potes colligere. Nam duobus primis ita poſitis, impoſſibile eſt tertium inueniri qui reliquas poſtulati partes impleat.

QVÆSTIO XXXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἀορίστους, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν ἀριθμὸν δοθέντα. ἔστω ἀριθμὸς η. τετάχθω ὁ πρῶτος ς α. ὁ δεύτερος μο γ. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν τὸν συναμφότερον ποιεῖ ςς β λείψει μο γ. ἴσους μο η. καὶ γίνεται ὁ ς μο ε. α β'. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο ε. α β'. ὁ δεύτερος μο γ. πάλιν οὖν σκέπτομαι πόθεν ἐγένετο ὁ ς. μο ε. α ς'. ἐκ τοῦ τὸν ια μερισθῆναι εἰς ἀριθμὸν β. ἀλλ' ὁ ια ὁ δοθείς ἐστι μετὰ τοῦ δευτέρου. ὁ δὲ ςς β εἰσὶν ὁ μοναδικῶς ἐλάσσων τοῦ δευτέρου. ἐὰν οὖν τάξωμεν ἀριθμὸν δεύτερον ὅσου δήποτε, καὶ προσθῶμεν αὐτὸν τῷ δοθέντι, καὶ τὰ γενόμενα μερίσωμεν παρὰ ἀριθμὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, εὑρήσομεν τὸν πρῶτον. ἔστω ὁ δεύτερος ς α μο α. ταῦτα μετὰ μο η. ποιεῖ ςα α. μο θ. μερίζω ταῦτα εἰς ἀριθμὸν μονάδι μιᾷ ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ςα α. καὶ γίνεται μο α. θ ςα α. καὶ λέλυται ἐν τῷ ἀορίστῳ. ὥστε ἀριθμὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον, ποιεῖν μο η.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus eorum multiplicatione multatus ſumma ipſorum, faciat datum numerum. Hic eſto 8. Ponatur primus 1 N. ſecundus 3. & productus eorum multiplicatione, vtroque dempto facit 2 N – 3. æquales 8. & fit 1 N. $5\frac{1}{2}$. Ad poſitiones. Erit primus $5\frac{1}{2}$. ſecundus 3. Rurſum igitur diſpicio vnde factum ſit quod 1 N eſt $5\frac{1}{2}$. nimirum ex diuiſione 11. per 2. ſed 11. eſt compoſitus ex dato & ſecundo, & 2 N. eſt numerus vnitate minor ſecundo. Itaque ſi ſtatuero ſecundum quantumcunque, cumque dato adiecero, & ſummam diuiſero per vnitate minorem ſecundo, inueniam primum. Eſto ſecundus 1 N + 1. huic addito 6. fit 1 N + 9. quem diuido per vnitate minorem ſecundo, hoc eſt per 1 N. & fit $1 + \frac{9}{1N}$. Itaque ſoluta eſt quæſtio indefinitè; nam productus eorum multiplicatione, amborum ſumma detracta, facit 8.

IN QVÆSTIONEM XXXIX.

Hic soluitur indefinitè quæstio, ita vt nullus omnino numerus excludatur à valore Numeri. Quod euenit quia in positionibus nullibi reperitur signum defectus, vt ex dicendis ad quadragesimam primam clarius patebit.

QVÆSTIO XL.

INVENIRE tres numeros, vt producti ex binorum mutua multiplicatione detracta amborum summa faciant datos numeros. Oportet autem datos esse quadratos vnitate multatos. Statutum sit productum ex primo in secundum vtroque detracto facere 8. Productum ex secundo in tertium vtroque dempto facere 15. & productum ex primo in tertium, vtroque ablato facere 24. Quia volo productum ex primo in secundum detracto vtroque facere 8. si secundum statuero quantumcunque, & cum adiecero ad 8. & summam diuisero per vnitate minorem secundo, habebo primum iuxta lemma iam expositum. Esto secundus 1 N ∔ 1. addo illi 8. fit 1 N ∔ 9. diuido hoc per vnitate minorem secundo, hoc est per 1 N. fit $1 + \frac{8}{N}$. Tantus est primus. Simili ratione inuenietur tertius $1 + \frac{16}{N}$. Ita duobus postulatis est satisfactum. Superest vt productus ex primo in tertium vtroque dempto faciat 24. facit autem $\frac{144}{Q} - 1$. hoc æquatur 24. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{57}{12}$. secundus $\frac{17}{5}$. Tertius $\frac{92}{12}$. Quos si velis idem habere nomen, omnia ad sexagesimas. Erit primus $\frac{285}{60}$. secundus $\frac{204}{60}$. tertius $\frac{460}{60}$.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λεῖψει συναμφοτέρου ποιῇ τοὺς δοθέντας. δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι παρὰ μονάδα. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν μ° η. τὸν δὲ ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν μ° ιε. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου λείψαντα συναμφοτέρου ποιεῖν μ° κδ. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν μ° η. ἐὰν ἄρα τάξω τὸν δεύτερον οἷον δήποτε, καὶ προσθῶ αὐτὸν εἰς μ° η. καὶ τὰ γινόμενα μερίζω παρὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, ἕξω τὸν πρῶτον, κατὰ τὸ λῆμμα τὸ προγεγραμμένον. ἔστω ὁ δεύτερος ς α μ° α. προστίθημι αὐτῷ μ° η. γίνεται ς α μ° θ. ταῦτα μερίζω εἰς τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ςς α. καὶ γίνεται μ° α. θ ςχ. ἔσται ὁ πρῶτος [ὁμοίως δὲ καὶ] ὁ τρίτος ἔσται μ° α. ιϛ ςχ. καὶ λέλυνταί μοι δύο ἐπιτάγματα. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν μ° κδ. ποιεῖ δὲ ρμδ ΔΥχ. λείψει μ° α. ἴσα μ° κδ. καὶ γίνεται ὁ ς ιβ ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος νζ ιβ. ὁ δὲ δεύτερος ιζ ε. ὁ δὲ τρίτος ϟβ ιβ. καὶ ἐὰν θέλῃς αὐτοὺς εἶναι ἑνὸς μορίου, πάντα εἰς ξ. ἔσται ὁ πρῶτος σπε ξ. ὁ δεύτερος σδ ξ. ὁ δὲ τρίτος υξ ξ.

IN QVAESTIONEM XXXX.

Hîc quoque conditio nimis strictè proponitur à Diophanto, & proponenda est omnino vt ad trigesimam octauam dictum est. Etenim summa primi & secundi detracta à plano sub ipsis fiat 11. secundi & tertij 19. tertij & primi 14. Quamuis nullus datorum numerorum sit quadratus vnitate multatus, tamen quia cuilibet addendo vnitatem, productus ex binorum mutua multiplicatione ad reliquum est in ratione quadrati ad quadratum, optimè soluetur quæstio. Esto enim secundus 1 N. + 1. erit ergo primus 1 + $\frac{12}{1N}$. At tertius 1 + $\frac{20}{1N}$. ita satisfit duobus postulatis. Superest vt productus ex primo in tertium, vtroque dempto faciat 14. facit autem $\frac{240}{1Q}$ − 1 hoc ergo æquatur 14. & fit 1 N. 4. Quare quæsiti numeri sunt 4. 5. 6. Hinc etiam elicietur iste Canon.

Datis numeris adde sigillatim vnitatem, productumque ex binorum mutua multiplicatione diuide per reliquum, quotientis latus, erit vnus quæsitorum vnitate multatus.

QVÆSTIO XLI.

ΕΥΡΕΙΝ ἀριθμοὺς ἀορίστους δύο. ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπ' αὐτῶν συναμφοτέρου εἶναι τριπλασίονα. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ο ᾱ. ὁ δεύτερος μ^ο ε̄. καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν ςς ε̄. ταῦτα θέλομεν εἶναι τριπλάσια ς^ο ᾱ μ^ο ε̄. ὥστε ςς^οι γ̄ μ^ο ιε̄. ἴσοι εἰσὶν ςς ε̄. καὶ γίνεται ὁ ς μ^ο ζ. ᾱ ∠^ς. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος μ^ο ζ. ᾱ ∠^ς. ὁ δεύτερος μ^ο ε̄. βλέπω οὖν [πόθεν] ὁ ς γέγονεν μ^ο ζ. ᾱ ∠^ς. ἐκ τοῦ τὸν ιε μερισθῆναι εἰς β̄. ἀλλ' ὁ ιε ὁ δευτέρου πολλαπλασίων ἐστὶν ἐπὶ τὸν λόγον. ὁ δὲ β̄ ἐστιν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς, ἧς ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὸν δεύτερον οἱουδήποτε ς^ο. καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν λόγον [τὸν γινόμενον μερίσωμεν εἰς τὴν ὑπεροχὴν, ἧς ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου, ἕξομεν τὸν πρῶτον. ἔστω ὁ δεύτερος ς^ο ᾱ. οὗτος ἐπὶ τὸν λόγον] ποιεῖ

INVENIRE duos numeros indefinite, vt productus eorum multiplicatione ad summã eorundem datam habeat rationem. Esto productus summæ triplus. Ponatur primus 1 N. secundus 5. & est productus eorum multiplicatione 5 N. hunc volumus triplum esse ad 1 N. + 5. Quamobrem 3 N. + 15. æquantur 5 N. & fit 1 N 7 ½. Ad positiones. Erit primus 7 ½. secundus 5. Considero hîc vnde 1 N. factus sit 7 ½. nimirum ex diuisione 15 per 2. At 15. est multiplex secundi secundum datam rationem. At 2. est excessus quo secundus superat denominatorem rationis. Ergo si secundum statuamus quantumcunque, & multiplicemus eum per denominatorem rationis, & productum diuidamus per excessum quo secundus superat denominatorem rationis, habebimus primum. Esto secundus 1 N. Hic in denominatorem rationis, fa-

cit 3 N. qui si diuidatur per excessum secundi supra denominatorem rationis, nimirum per 1 N − 3. fit primus $\frac{3 N}{1 N - 3}$.

ςς^ων γ̄. καὶ ἐὰν μερισθῇ εἰς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου, τουτέστιν εἰς ἀριθμὸν ᾱ. λεῖψει μ° γ̄. γίνεται ὁ πρῶτος ἀριθμῶν ς̄. ἐν μορίῳ ς^ου ᾱ. λεῖψει μ° γ̄.

IN QVAESTIONEM XLI.

QVAMVIS posito altero numerorum 1 N. altero $\frac{3 N}{1 N - 3}$ quæstio indefinitè soluta sit, non tamen quilibet numerus statui potest pro valore Numeri, sed sumendus est omnino numerus aliquis maior quàm 3. vt euidens est. Vt haberi possit 1 N. − 3. per quem diuidantur 3 N. Itaque quoniam huc reiecimus tractationem de inueniendis terminis intra quos consistere debet valor Numeri in huiusmodi quæstionibus quæ indefinitè soluuntur, esto hæc regula generalis. Quotiescunque ex lege problematis institutis positionibus, in aliqua vel in aliquibus illarum reperiuntur vnitates cum defectu Numerorum vel potestatis alicuius; aut è conuerso Numeri vel potestates cum defectu vnitatum; vel etiam vtrumque: necesse est vel dari terminum infrà quem, vel terminum supra quem, vel denique terminos intra quos sumi debet valor Numeri. Triplex ergo casus dari potest, ac proinde tria hæc obseruanda.

Primò si Numerus vel potestas alia adiunctum habeat defectum vnitatum, diuide vnitates per Numerorum vel potestatis numerum, quotiens erit terminus suprà quem sumi debet valor Numeri vel potestatis, vt in hac quæstione Diophanti, quia in vna positione reperitur 1 N. − 3. diuiso 3. per 1. fit quotiens 3 supra quem necesse est sumi valorem Numeri. Et si in aliqua positionum reperientur 2 N. − 10. diuiso 10. per 2. fieret 5. terminus supra quem consistere deberet valor Numeri; idemque de aliis dicendum potestatibus, nam si haberes 3 Q. − 12. diuidendo 12. per 3. quotiens 4. esset terminus supra quem sumendus esset valor quadrati.

Secundò si vnitates adiunctum habeant defectum Numerorum vel aliarum potestatum, diuide rursus vnitates per Numerorum vel potestatum numerum, quotiens erit terminus infrà quem sumi debet valor Numeri vel potestatis vt accidit in secunda analysi quam tradidimus trigesima septima huius, vbi ponentes alterum quæsitorum 1 N. alter positus est $\frac{8 - 1 N}{1 N + 1}$. Quare cùm diuidendo 8. per 1. fiat quotiens 8. conclusimus Numerum minorem sumi debuisse quàm 8. & sic de aliis.

Denique si in vna positionum reperiantur Numeri vel potestates aliæ cum defectu vnitatum, & simul in alia positione reperiantur vnitates cum defectu Numerorum, vel potestatis. Tunc vtrobique diuidendo vnitates per numerum Numerorum vel potestatum, fient quotientes, qui termini erunt intra quos sumi debet valor Numeri vel potestatis. Vt in analysi Diophantæa, quæstione trigesima septima citata, quoniam in vna positione reperitur 1 N. − 1. in altera 9 − 1 N. facta vtrobique diuisione producuntur 1. & 9. termini intra quos sumendus est valor Numeri. Quamobrem etiam inde facilè cognoscetur an proposita quæstio sit impossibilis, si enim tales termini reperiantur intra quos sumi non possit aliquis numerus, impossibilis erit quæstio. Verbi gratia, si in vna positione sit 3 − 15 N. in alia 2 N. − 12. Quia diuiso 15. per 3. fit 5. terminus infra quem sumendus est valor Numeri, at diuiso 12. per 2. fit 6. terminus suprà quem valor Numeri sumi debet, cùm euidens sit eundem numerum non posse esse maiorem quàm 6. minorem quàm 5. quæstionem impossibilem esse pronunciabimus.

Cæterùm si in diuersis positionibus eædem species ab iisdem deficiant, sed inæquali multitudine sumendus erit terminus quæsitus ab illa positione in qua defectus est maior. Vt in primo casu, si in vna positione sit 2 N. − 6. in altera 2 N. − 8. sumendus erit terminus à postrema, diuidendo scilicet 8. per 2. vnde fit 4. terminus suprà quem sumendus est valor Numeri. Sic in secundo casu si in vna positione sit 8 − 2 N. in altera 8 − 4 N. sumetur etiam valor Numeri à postrema in qua est defe-

ctus maior. Vel aliter, in primo casu sumendus est terminus ab illa positione, in qua diuisis vnitatibus per Numeros vel potestates, fit quotiens maior. Contrà in secundo casu sumẽdus est terminus ab illa positione, in qua diuisis vnitatibus per Numeros vel potestates fit quotiens minor. Sic in primo casu si occurrant 3 N. – 15. & 4 N. – 12. sumetur terminus à priore quia diuiso 15. per 3. fit quotiens maior quàm diuiso 12. per 4. sed in secundo casu si occurrant 8 – 2 N. & 12 – 3 N. sumetur terminus à posteriore ob contrariam causam.

His sanè praeceptis, tota de inueniendis huiusmodi terminis doctrina comprehenditur, quae cùm facilia sint, & è re ipsa nata, ita vt suam secum ferant demonstrationem, tamen à nemine ante nos tradita sunt, vt verè asserere possim quaestionum quamplurimarum quae indefinitè soluuntur, perfectam enodationem neminem hactenus calluisse; quod vno aut altero exemplo fiet manifestum. Sit enim propositum soluere pulcherrimum problema, quod omnium qui nos praecesserunt Arithmeticorum ingenia mirè torsit, quodque olim ex parte explicauimus libello nostro extremo iucundorum problematum qui per numeros absoluuntur, ante aliquot annus Lugduni edito, nimirum.

Datum numerum diuidere in quotlibet numeros, ita vt singulis in datos numeros ductis, summa productorum datum conficiat numerum. Oportet autem summam productorum cadere inter productos, ex numero diuidendo in maximum & in nimimum multiplicatorum.

Verbi gratia. Sit 20. diuidendus in tres numeros, ita vt primum ducendo in 4. secundum in $\frac{1}{2}$. tertium in $\frac{1}{4}$. summa productorum conficiat etiam 20. Esto primus 1 N. ergo reliqui duo simul erunt 20 – 1 N. & cum primo ducto in 4. fiant 4 N. his subductis à summa productorum, remanet 20 – 4 N. continens vtique $\frac{1}{2}$ secundi & $\frac{1}{4}$. tertij. Quare ducendo 20 – 4 N. in 4. fiet 80 – 16 N. continens bis secundum, & tertium semel. Proinde si hinc auferatur summa secundi & tertij, puta 20 – 1 N. relinquetur secundus 60 – 15 N. quem si auferas à summa secundi & tertij, nempe à 20. – 1 N. remanebit tertius 14 N. – 40. Itaque primo posito 1 N. fit secundus 60. – 15 N. tertius 14 N. – 40. & quaestio indefinitè soluta est. Quoniam verò secundus continet vnitates cum defectu numerorum, & tertius continet numeros cum defectu vnitatum, diuidendo vtrobique vnitates per Numeros, fient termini intra quos consistere debet valor numeri, nimirum 4. & 2 $\frac{6}{7}$. Quare soluetur quaestio si 1 N. ponatur quilibet numerus minor quàm 4. maior quàm 2 $\frac{6}{7}$. Verbi gratia ponatur 3. erit primus 3. secundus 15. tertius 2.

Rursus sit propositus 41. diuidendus in tres numeros ea lege, vt primum ducendo in 4. secundũ in 3. tertiũ in $\frac{1}{3}$. summa productorũ sit 40. Esto primus 1 N. ergo reliqui simul erunt 41 – 1 N. & cùm primo ducto in 4. fiant 4 N. his detractis à 40. summa productorum, remanet 40 – 4. N. continens ter secundum, & $\frac{1}{3}$ tertij. Quare ducendo 40 – 4 N. in 3. fiet 120 – 12 N. continens secundũ nouies, & tertium semel. Ac proinde si hinc auferatur summa secundi & tertij, nempe 41 – 1 N. relinquetur octuplum secundi, puta 79 – 11 N. Quare secundus erit 9. $\frac{7}{8}$ – 1 $\frac{3}{8}$ N. quo subducto à summa secundi & tertij, remanet tertius 31 $\frac{1}{8}$ + $\frac{3}{8}$ N. & quaestio indefinitè suluta est. Quoniam verò signum defectus reperitur tantùm in secundo numero 9 $\frac{7}{8}$ – 1 $\frac{3}{8}$ N. vnus tantùm hîc erit terminus, infrà quem scilicet sumendus erit valor Numeri, qui babetur diuidẽdo vnitates per numeros, estque 7 $\frac{2}{11}$. Quare soluetur quaestio si 1 N. ponatur quilibet numerus minor quàm 7 $\frac{2}{11}$. Ponatur 5. Erunt quaesiti numeri 5. 3. 33.

Saepe autem huiusmodi quaestiones ita proponuntur, vt requiratur solutionem in integris exhiberi seclusis fractionibus, quod accidit ex rerum quibus applicantur natura quae non patitur diuisionem in partes, vt si de hominibus vel animalibus mentio fiat. Verbi gratia proponatur ita prior quaestio. Fuerunt in symposio personae 20. nimirum viri, mulieres, & pueri, & expenderunt simul solidos 20. ita tamen vt quilibet virorum soluerit 4. solidos, quaelibet mulierum $\frac{1}{2}$ solidi, quilibet puerorum $\frac{1}{4}$ solidi. Quaeritur tam virorum, quàm mulierum, atque puerorum numerus sigillatim. Similiter sic proponatur posterior quaestio. Fuerunt personae 41. expenderuntque

solidos 40. & virorum quilibet persoluit 4. solidos, quælibet mulier 3 puerorum quilibet $\frac{1}{2}$ solidi. Quæritur idem quod prius. Hîc patet solutionem in integris omnino exhibendam esse. Quod quidem facilè præstabitur in priore quæstione, quia in positionibus nullæ omnino interueniunt fractiones, nam sufficiet si sumatur quilibet numerus integer cadens inter terminos inuentos 4. & 2 $\frac{6}{7}$. qualis est 3. vnde fiunt quæsiti numeri qui suprà 3. 15. 2. At in posteriore, vbi positiones habent fractiones admixtas, maiore artificio res opus habet. Veruntamen ita expedietur. Quoniam tertius numerus ponitur 31 [illegible] + $\frac{3}{8}$ N. euidens est vt solutio contingat in integris, oportere pro valore Numeri sumi numerum integrum minorem quàm 7 [illegible]. cuius tres octauæ partes adscita [illegible] vnitatis faciant integrum. Quia vero vt habeantur $\frac{3}{8}$ cuiuslibet numeri, ducendus est ille numerus in 3. & productus diuidendus per 8. Patet quærendum esse numerum minorem quàm 7 [illegible] quo ducto in 3. & producto addendo 1. fiat numerus multiplex ad 8. seu quod idem est. Quærendus est numerus multiplex ad 8. qui excedat vnitate multiplicem ad 3. ita tamen vt multiplicator ipsius 3. sit minor quàm 7 [illegible]. Id autem quî fieri possit abundè docuimus in elementis, immò demonstrauimus vniuersale hoc problema.

Datis duobus numeris inter se primis, inuenire multiplicem vnius, qui alterius multiplicem superet dato numero, ita vt inuenti multiplices sint minimi qui hoc præstent.

Inuentisque minimis, alios omnes ordinatim multiplices idem præstantes ostendimus inueniri posse. vnde sane propositæ quæstionis solutio manifesta est, inuenieturque 16 multiplex ad 8. qui excedit vnitate 15. multiplicem ad 3. & diuiso 15. per 3. fiet 5. quæsitus valor Numeri. Quare numeri qui prius reperiuntur 5. 3. 33.

Huius naturæ quæstio proponitur in veteri Epigrammate quod extat apud Pithœum lib. 4. & tale est.

Vt tot emantur aues, bis denis vtere nummis
Perdix, Anser, Anas empta vocetur auis.
Sit simplex obolus pretium Perdicis, ematur.
Sex obolis Anser, bisque duobus Anas.
Vt tua procedat in lucem quæstio, mentem
Consule, sic loquitur pectoris arca mihi.
Sint Anates tres atque duæ, simplex erit Anser.
Accipe perdices quatuor atque decem.

Huius quæstionis sensus est. Viginti Nummis, quorum quilibet duos obolos valet, seu 40. obolis emuntur Aues 20, videlicet Perdices, Anseres, Anates, sed Perdix obolo vno constat, Anser 6 obolis, Anas 4. Quæritur Perdicum numerus, itemque Anserum atque Anatum. Ponatur Anserum numerus 1 N. erit Perdicum & Anatum simul numerus 20 − 1 N. erit autem Anserum omnium pretium 6 N. quo detracto à 40. obolis, remanet pretium Perdicum & Anatum simul 40 − 6 N. Quare 40 − 6 N. continet Perdicum numerum semel, & Anatum numerum quater, ac proinde hinc auferendo numerum Perdicum & Anatum semel, nempe 20 − 1 N. remanet 20 − 5 N. triplum numeri Anatum, vnde Anatum numerus est $6\frac{2}{3} - \frac{5}{3}$ N. quo detracto à 20 − 1 N. remanet Perdicum numerus $13\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ N. & quæstio indefinitè soluta est. Sed quia in numero Anatum reperiuntur vnitates cum defectu Numerorum diuiso $6\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{3}$. fit 4. terminus infrà quem sumendus est valor Numeri. Rursus ob fractiones adiunctas, vt solutio contingat in integris, quia Perdicum numerus est $13\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ N. patet valorem Numeri esse debere, numerum integrum cuius $\frac{2}{3}$ adsciscentes $\frac{1}{3}$ faciant integrum. Seu quod idem est quærendus est multiplex ad 3. qui excedat vnitate multiplicem ipsius 2. ita tamen vt multiplicator ipsius 2. sit minor quàm 4. inuenieturque ipse 3 qui excedit vnitate ipsum 2. Quare diuiso 2. per 2. fit 1. quæsitus valor Numeri. Est ergo Anserum numerus 1. Anatum 5. Perdicum 14. vt voluit Epigrammatarius.

Iam verò diuidendus sit 100. in quatuor numeros, vt primo ducto in 3. secundo in

1. tertio in $\frac{1}{2}$. quarto in $\frac{1}{7}$. summa productorum sit 100. Ponatur primus 1 N. ergo reliquorum summa erit 100 – 1 N. & cùm ex primo in 3. fiant 3 N. erit summa trium reliquorum productorum 100 – 3 N. Superest igitur vt partiamur 100 – 1 N. in tres numeros vt primo ducto in 1. secundo in $\frac{1}{2}$. tertio in $\frac{1}{7}$ summa productorum sit 100 – 3 N. id autem vt fieri possit, propter adiectam ab initio huic quæstioni conditionem, oportet productum ex 1. maximo multiplicatorum in 100 – 1 N, nempe 100 – 1 N maiorem esse quàm 100 – 3 N. & rursus productum ex $\frac{1}{7}$ minimo multiplicatorum in 100 – 1 N, nempe $\frac{100}{7}$ – $\frac{1}{7}$ N. minorem esse quàm 100 – 3 N. Et primùm quidem manifestum est, nam per se patet 100 – 1 N. maiorem esse quàm 100 – 3 N. quod signum est non dari minimum terminum supra quem sumi debeat valor Numeri, sed ritè solui posse quæstionem quantumlibet exiguus statuatur primus quatuor quæsitorum numerorum. At verò vt secundum consequamur, cùm non statim appareat an $\frac{100}{7}$ – $\frac{1}{7}$ N. sit minor quàm 100 – 3 N. fingamus æquari, fiet 1 N. 30. maximus terminus, infrà quem vtique sumendus est valor Numeri. Vnde iam constat quæstionem infinitas recipere solutiones, cùm primus quatuor quæsitorum numerorum statui possit quilibet numerus minor quàm 30. Ponatur verbi gratia 20. erit ergo trium reliquorum summa 80. & cùm ex 20. in 3. fiat 60, quo subducto à 100. remanet 40. erit vtique trium reliquorum productorum summa 40. Superest igitur vt diuidamus 80. in tres partes, vt prima ducta in 1. secunda in $\frac{1}{2}$. tertia in $\frac{1}{7}$. summa productorum sit 40. Ponatur prima 1 N. erunt duæ reliquæ simul 80 – 1 N. & quia ex prima parte in 1. fit 1 N. patet duorum reliquorum productorum summam esse 40 – 1 N. quæ vtique continet $\frac{1}{2}$ secundæ partis & $\frac{1}{7}$ tertiæ. Quare multiplicando per 7. fiet 280 – 7 N. continens semel tertiam & $\frac{7}{2}$ secundæ. Proinde si hinc auferatur summa secundæ & tertiæ, puta 80 – 1 N. restat 200 – 6 N. continens $\frac{5}{2}$ secundæ. Quamobrem ipsa pars secunda reperietur 80 – $\frac{12}{5}$ N. quam auferendo à 80 – 1 N. restat pro tertia $\frac{7}{5}$ N. & quæstio indefinitè soluta est. Nam posito primo quatuor quæsitorum numerorum 20. erit secundus 1 N. tertius 80 – $\frac{12}{5}$ N. Quartus $\frac{7}{5}$ N. sed quoniam in tertio sunt vnitates cum defectu Numerorum diuiso 80. per $\frac{12}{5}$ fit 33 $\frac{1}{3}$ terminus infrà quem sumendus est valor Numeri. Quod si sumas 30. fient quæsiti Numeri 20. 30. 8. 42. qui satisfaciunt proposito. Et sic infinitis aliis modis solui potest quæstio, cùm admittendo fractiones infiniti numeri sumi possint infra 33 $\frac{1}{3}$.

Verùm si requiratur solutionem in integris exhiberi, vtendum erit eodem artificio quod suprà explicauimus. Vt si quæstio hæc ita proponatur. Fuerunt in symposio personæ 100. viri, mulieres, pueri, puellæ. Et vir quilibet expendit tres aureos, mulier 1. puer $\frac{1}{2}$. puella $\frac{1}{7}$. Quæritur virorum, & mulierum, puerorúmque & puellarum numerus, eodem vtentes ductu euidenter inferemus sumendum esse pro valor Numeri aliquem Numerum minorem quàm 33 $\frac{1}{3}$ quem quinarius metiatur, & sic sex solutiones in integris per hanc operationem reperientur, prout posito virorum numero 20. ponetur mulierum numerus 5. vel 10. vel 15. vel 20. vel 25. vel 30. Itaque vt omnes solutiones quæ in integris possunt exhiberi, reperiamus, cùm iam determinatum sit virorum numerum poni posse quemlibet infrà 30. toties repetenda erit hæc operatio quot sunt numeri integri infra 30. nimirum nouies & vicesies. Sed rem succedere non posse inueniemus, si numerus virorum ponatur 1. vel 2. vel 3. vel 29. Nam si ponatur 1. & mulierum numerus 1 N. erit puerorum numerus 232 – $\frac{12}{5}$ N. At puellarum $\frac{7}{5}$ N. – 133. Quare termini intra quos cadere debet valor Numeri erũt 97. & 96. $\frac{2}{3}$. inter quos nullus cadit integer numerus. Similiter si virorum numerus ponatur 2. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 224 – $\frac{12}{5}$ N. puellarum verò $\frac{7}{5}$ N. – 126. Quare termini intra quos consistere debet valor Numeri erunt 93 $\frac{1}{3}$. & 90. inter quos nullus cadit integer quem quinarius metiatur. Rursus si statuatur virorum numerus 3. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 216 – $\frac{12}{5}$ N. & puellarum $\frac{7}{5}$ N. – 119. Quare termini intra quos sumi debet valor Numeri reperientur 90. & 85. inter quos non cadit integer quem quinarius metiatur. Denique si numerus virorum ponatur 29. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 8 – $\frac{12}{5}$ N. puellarum verò $\frac{7}{5}$ N. + 63. Quare terminus infra quem sumendus est valor Numeri reperietur 3 $\frac{1}{3}$. Infra quem nullus est numerus integer quem quinarius metiatur. Cæterùm si virorum Numerus

merus statuatur quilibet cadẽs inter 3 & 29. res optimè succedet, & reperiẽtur in integris solutiones numero 81. quas omnes in sequẽti diagrãmate exhibeo, monẽs primũ numerũ esse virorum, secũdum mulierũ, tertium puerorũ, quartũ denique puellarũ.

28	27	26	26	25	25	25	24	24
5	5	10	5	15	10	5	15	10
4	12	8	20	4	16	28	12	24
63	56	56	49	56	49	42	49	42
24	23	23	23	23	22	22	22	22
5	20	15	10	5	20	15	10	25
36	8	20	32	44	16	28	40	4
35	49	42	35	28	42	35	28	49
22	21	21	21	21	21	20	20	20
5	25	20	15	10	5	30	25	20
52	12	24	36	48	60	8	20	32
21	42	35	28	21	14	42	35	28
20	20	20	19	19	19	19	19	19
15	10	5	35	30	25	20	15	10
44	56	68	4	16	28	40	52	64
21	14	7	42	35	28	21	14	7
18	18	18	18	18	17	17	17	17
35	30	25	20	15	40	35	30	25
12	24	36	48	60	8	20	32	44
35	28	21	14	7	35	28	21	14
17	16	16	16	16	16	15	15	15
20	45	40	35	30	25	45	40	35
56	4	16	28	40	52	12	24	36
7	35	28	21	14	7	28	21	14
15	14	14	14	14	13	13	13	13
30	50	45	40	35	55	50	45	40
48	8	20	32	44	4	16	28	40
7	28	21	14	7	28	21	14	7
12	12	12	11	11	11	10	10	10
55	50	45	60	55	50	65	60	55
12	24	36	8	20	32	4	16	28
21	14	7	21	14	7	21	14	7
9	9	8	8	7	7	6	5	4
65	60	70	65	75	70	75	80	85
12	24	8	20	4	16	12	8	4
14	7	14	7	14	7	7	7	7

Hinc apparet quæstiones huiusmodi à nobis perfectissimè resolui, cùm tamen Nicolaus Tartalea asserat, neq; per Algebrã, neque per aliam certã regulam id fieri posse. Sed & alius non contemnẽdus Arithmeticus, cùm hanc ipsam quæstionẽ sub eadem prorsus hypothesi sibi proposuisset enodandã, vnicam tantùm illius solutionẽ affert, eam scilicet quæ primum in superiore diagrãmate locũ obtinet, eamque etiam nõ satis certa ratione inuestigat, sed illa vtitur regula quam in libello nostro Iucundorum Problematum olim explicauimus, quamque vt nimis inperfectam meritò reiicimus.

Quod si postuletur exemplum in quo vnica solutio contingat in integris. Sit Personarum numerus 60. aureorum expensorum summa 100. & vir quilibet expendat 2. aureos. Mulier $\frac{3}{2}$. Puer $\frac{1}{3}$. Puella $\frac{1}{2}$. Ponatur virorum numerus 1 N. Igitur 60 − 1 N. erit numerus mulierum, puerorum & puellarum simul, & 100 − 2 N. erit reli-

quorum aureorum summa, quare ducendo tum $\frac{2}{3}$, tum $\frac{1}{2}$ in 60 − 1 N. fiet 40 − $\frac{2}{3}$ N. maior quàm 100 − 2 N & 30 − $\frac{1}{2}$ N. minor quàm 100 − 2 N. & vtraque æquatione sigillatim resoluta fient termini intra quos consistere debet valor Numeri 45. & 46. $\frac{2}{3}$. Proinde cùm inter eos cadat solus numerus integer 46. patet virorũ Numerorũ non posse poni nisi 46. Atque ideo relinquentur personæ 14. Aurei 8. statuatur mulierũ numerus 1 N. tandẽ inuenietur puerorum numerus 10 − $\frac{5}{3}$ N. Puellarum verò 4 + $\frac{2}{3}$ N. Quare cùm diuiso 10. per $\frac{5}{3}$ prodeat 6. patet pro valore Numeri sumendum esse Numerũ infrà 6. quẽ ternarius metiatur ob fractiones positionibus admixtas. Itaque cùm infrà 6. solus numerus 3. habeat tertiam partem in integris, vnica continget solutio posito scilicet valore Numeri 3. & erit virorum numerus 46. Mulierum 3. Puerorũ 5. Puellarum 6. eodem prorsus artificio diuidetur datus numerus in quinque aut plures numeros, ita vt singulis in datos numeros ductis, summa productorum datum conficiat numerum. Quamobrem ex omni parte satisfactum est proposito.

Cæterùm ad hanc quæstionem facilè reducuntur Alligationis regulæ, quarum perfectam enodationem, neminem antè nos tradidisse audacter asserere ausim. Etenim cùm tria rei alicuius genera proponuntur alliganda, patet vulgari regula vnicam tantùm reperiri solutionem, quamuis infinitæ tradi possint. Quod vt exemplo comprobemus. Sint alliganda tria Auri genera. Primum 24. graduum bonitatis quos vulgo Karattos vocant. Secundum 22. Karattorum. Tertium 18. & conficienda sit Massa librarum 60. auri Karattorum 20. sanè per vulgarem illam Alligationis regulam vnica reperietur solutio, & sumendæ erunt libræ 12. ex auro 24. Karattorum. Itemque libræ 12. ex auro 22. Karattorum. Ac denique libræ 36. ex auro 18. Karattorum. Sed quæstio suaptè natura infinitas recipit solutiones, quas sic indagabimus. Quoniam ducto 60. in 20. fit 1200. patet in tota massa conficienda contineri gradus bonitatis seu Karattos 1200. Quare superest vt diuidamus 60. in tres numeros, ita vt primo ducto in 24. secundo in 22. tertio in 18. summa productorum sit 1200. Ponatur primus 1 N. erit summa reliquorum 60 − 1 N. & cùm ducto 24. in 1 N. fiant 24 N. erit reliquorum productorum summa 1100 − 24 N. quæ continet secundum numerum bis & vicesies. Tertium verò decies & octies. Quare cùm 60 − 1 N. contineat secundum & tertium semel, ducto eo in 18. fiet 1080 − 18 N. continens vtrumque decies & octies, & si hic auferatur à 1200. − 24 N. remanet 120 − 6 N. continens secundum quater. Proinde secundus est 30 − $\frac{3}{2}$ N. quo detracto à 60 − 1 N. remanet tertius 30 + $\frac{1}{2}$ N. & quæstio indefinitè soluta est. Vt ergo habeamus terminum infra quem consistere debet valor Numeri diuidamus 30. per $\frac{3}{2}$ fiet 20. quæsitus terminus. Igitur ex auro 24. Karattorum sumi potest quilibet librarum numerus minor quàm 20. vnde constat infinitis modis solui posse quæstionem. Verbi gratia, sumantur ex prædicto auro libræ 18. sumemus ex secundo libras 3. ex tertio libras 39. Rursus sumantur primi auri libræ 16. secundi 6. tertij 38. Rursus sumantur, primi auri libræ 14. secundi 9. tertij 37. vel sumantur primi auri libræ 10. secundi 15. tertij 35. vel sumantur primi auri libræ 8. secundi 18. tertij 34. vel sumantur primi auri libræ 6. secundi 21. tertij 33. vel sumantur primi auri libræ 4. secundi 24. tertij 32. vel etiam sumantur primi auri libræ 2. secundi 27. tertij 31. His omnibus modis, etiam per integros soluitur quæstio, quod si fractiones admittere libeat, quæ ab hoc quæstionum genere non excluduntur, infinitas alias solutiones reperiri posse manifestum est. Hæc dixisse sufficiat, ne pulcherrimum vtilissimúmque inuentum posteris inuidisse videamur.

QVÆSTIO XLII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου συναμφοτέρους εἶναι τρίς. τὸν δ' ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου, συν-

INVENIRE tres numeros, vt quem bini producũt, is ad eorũ summam datam habeat rationem. Sit productus è primo in secundum, ad summam ipsorum triplus, productus è secundo in tertium, sit ad summam

eorum quadruplus, & productus è primo in tertium, summæ ambotum sit quintuplus. Statuatur secundus 1 N. erit ex præcedenti lemmate primus $\frac{3 N}{1 N - 3}$. eodem modo tertius erit $\frac{4 N}{1 N - 4}$. Restat vt productus ex primo in tertium ad summam ipsorum sit quincuplus. Sed productus ex primo in tertium est $\frac{12 Q}{1 Q + 12 - 7 N}$ summa verò primi & tertij est $\frac{7 Q - 24 N}{1 Q + 12 - 7 N}$. quæ sic habetur. Quoniam oportet addere minutias $\frac{3 N}{1 N - 3}$, & $\frac{4 N}{1 N - 4}$. Ipsi quidem numeri in denominatores alternatim multiplicabuntur, verbi gratia 3 N. in denominatorem alterius, hoc est in 1 N. – 4. & rursus 4 N. in denominatorem alterius, puta in 1 N. – 3. sic facta est summa 7 Q. – 24 N. sub denominatione partis quæ fit ex denominatorum mutua multiplicatione, hoc est 1 Q. + 12 – 7 N. Habemus autem & productum ex primo in tertiũ $\frac{12 Q}{1 Q + 12 - 7 N}$. Quamobrem $\frac{12 Q}{1 Q + 12 - 7 N}$ quincuplum est summæ. Proinde summa quinquies puta $\frac{35 Q - 120 N}{1 Q + 12 - 7 N}$. æqualis est $\frac{12 Q}{1 Q + 12 - 7 N}$. & omnia ducantur in communem denominatorem, puta 1 Q. + 12 – 7 N. fiunt 12 Q. æquales 35 Q. – 120 N. & fit 1 N. $\frac{120}{23}$. Ad hypostases. Posueram primum $\frac{3 N}{1 N - 3}$. secundum 1 N. tertium $\frac{4 N}{1 N - 4}$

ἀμφοτέροις ἐστὶ τετράκις. ὁ δὲ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου συναμφοτέροις ἐστὶ πεντάκις. τετάχθω ὁ δεύτερος ςς α. ἔσται δὴ διὰ τὸ λῆμμα ὁ πρῶτος ςς γ. ἐν μορίῳ ςς α. λείψει μο γ. ὁμοίως καὶ ὁ τρίτος ςς δ. ἐν μορίῳ ςς α. λείψει μο δ. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου συναμφοτέροις εἶναι πεντάκις. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δυ ιβ. ἐν μορίῳ δυ α μο ιβ. λείψει ςς ζ. συναμφότερος δέ ἐστιν ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος δυ ζ. λείψει ςς κδ. μορίου δυ α. μο ιβ. λείψει ςς ζ. οὕτως. ὅταν γὰρ δέῃ συνθεῖναι μόρια οἷον ςς γ. μορίου ςς α. λείψει μο γ. καὶ ςς δ. μορίου ςς α. λείψει μο δ. ὁ μὲν ςς ἐπὶ τὰ ἐναλλὰξ μόρια πολλαπλασιάζονται, οἷον ςς γ. ἐπὶ τὰ ἑτέρου μόρια τουτέστιν ἐπὶ ςς α. λείψει μο δ. καὶ πάλιν οἱ ςς δ. ἐπὶ τὰ μόρια τοῦ ἑτέρου ἐπὶ ςς α. λείψει μο γ. οὕτως ἐποίησεν ἡ σύνθεσις δυ ζ. λείψει ςς κδ. μορίου τοῦ ὑπὸ τῶν μορίων, τουτέστι δυ α. μο ιβ λείψει ςς ζ. ἔχομεν δὲ καὶ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου δυ ιβ. μορίου δυ α. μο ιβ. λείψει ςς ζ. δυνάμεις ἄρα ιβ. μορίου δυ α. μο ιβ. λείψει ςς ζ. πενταπλάσιαι εἰσὶ τῆς συνθέσεως. πεντάκις ἄρα ἡ σύνθεσις γίνεται δυ λε ⋔ ςς ρκ. μορίου δυ α. μο ιβ ⋔ ςς ζ. ἴσαι δυ ιβ. μορίου τοῦ αὐτοῦ, καὶ πάντα ἐπὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν μόριον δυ α. μο ιβ ⋔ ςς ζ. καὶ γίνονται δυ ιβ. ἴσαι δυ λε ⋔ ςς ρκ. καὶ γίνεται ὁ ςς ρκ κγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα δὲ τὸν μὲν πρῶτον ςς γ. μορίου ςς α ⋔ μο γ. τὸν δὲ δεύτερον ςς α. τὸν δὲ τρίτον ςς δ. μορίου ςς α. ⋔ μο δ.

ἀιρέθη δὲ ὁ ς ρκ ιγ. ἐὰν μὲν ἐπὶ τὸν πρῶτον ποιῇς, ἐπὶ ςς γ. ἔσονται μ τξ ιγ. λοιπὸς ἐπὶ τὸ μόριον, ρκ ιγ. ἐπὶ ς α λεῖψει μ γ. γίνονται μ να ιγ. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος τξ να. ὁ δὲ δεύτερος ρκ ιγ. οὐ γὰρ εἶχεν ἀριθμητικὸν μόριον. ὁ δὲ τρίτος ὁμοίως, ρκ ιγ. ἐπὶ τοὺς τέσσαρας ςς. γίνονται υπ ιγ. ὁμοίως, καὶ ἐπὶ τὸ μόριον, ρκ ιγ. ἐπὶ ς α ↑ μ δ. γίνονται μ κη ιγ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος μ υπ κη. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

At 1 N. inuentus est $\frac{120}{13}$. hunc si ducas in primum, eo ducto in 3 N. fiet $\frac{360}{13}$. At eo ducto in denominatorem 1 N. – 3. fient $\frac{51}{13}$. erit igitur primus $\frac{360}{51}$. secundus autem $\frac{120}{13}$. non enim habebat numericam minutiam. At tertius similiter inuenietur, nam ducto $\frac{120}{13}$ in 4 N. fiet $\frac{480}{13}$. Eodem modo ducto $\frac{120}{13}$ in denominatorem 1 N. – 4. fiet $\frac{28}{13}$. Est ergo tertius $\frac{480}{28}$. & demonstratio est manifesta.

IN QVAESTIONEM XLII.

Hîc quæstio pendet à præcedente, vt disertis verbis monet Diophantus. Cæterùm in sua versione Xilander multa omisit, quæ clarioris doctrinæ gratia posuit Diophantus, vt apparet ex textu Græco, & ex nostra versione.

QVÆSTIO XLIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου τῶν τριῶν εἶναι τριπλασίονα. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου τῶν τριῶν εἶναι τετραπλασίονα. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ τρίτου, καὶ τοῦ πρώτου τῶν τριῶν εἶναι πενταπλασίονα. ἐπεὶ οὖν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν ἐκ τῶν τριῶν λόγον ἔχει δεδομένον. ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμούς, καὶ τυχόντα, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν τυχόντα λόγον ἔχῃ τὸν ἐπιταχθέντα. ἔστω ὁ τυχὼν μ ε. καὶ ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου τυχόντος ἐστὶ τριπλασίων τουτέστι τοῦ ε. ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, ἄρα καὶ τοῦ δευτέρου ἔσται μ ιε. ἔστω ὁ δεύτερος ς α. ὁ ἀ-

INVENIRE tres numeros, vt quem bini producunt mutua multiplicatione, is ad compositum ex tribus datam habeat rationem. Sit productus ex primo in secundum ad summam trium triplus; at productus ex secundo in tertium, sit summæ quadruplus. Denique productus ex tertio in primum, summæ omnium sit quincuplus. Quia igitur productus ex binorum mutua multiplicatione ad summam trium datam habet rationem. Quæro primùm tres numeros, & aliquem vtcumque adscitum, ad quem producti ex binorum mutuo ductu datas habeant rationes. Arbitrarius esto 5. Tunc quia productus ex primo in secundum triplus est arbitrarij numeri, nempe ipsius 5. vtique productus ex primo in secundum erit 15. esto secundus 1 N. ergo

primus $\frac{15}{1\,N}$. Rursus quia productus ex secundo in tertium est quadruplus ipsius 5. vtique productus ex secundo in tertium erit 20. At secundus est 1 N. ergo tertius erit $\frac{20}{1\,N}$. Superest vt productus ex primo in tertium, nimirum $\frac{300}{1\,N}$. sit quincuplus ipsius 5. Proinde fiunt 300, æquales 25 Q. Hîc si species ad speciem rationem haberet quæ est quadrati ad quadratum, soluta esset quæstio. Enimuero 300. orti sunt ex 15. in 20. At 15. triplum est ipsius 5. & 20. est eiusdem 5. quadruplum. Volumus ergo vt triplo ipsius 5. per quadruplum eiusdem multiplicato, producti ad quincuplum eiusdem 5. ratio sit quæ quadrati ad quadratum. Atqui 5. arbitrarius est. Hoc igitur mihi negotij incumbit, vt quæram numerum, cuius triplus & quadruplus inter se multiplicati numerum producant qui ad quincuplum eiusdem, rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Esto qui quæritur 1 N. & triplus eius ductus in quadruplum facit 12 Q. Oportet igitur hunc ad quintuplum eiusdem rationem habere quæ est quadrati ad quadratum. Volumus ergo 12 Q. ad 5 N. esse in ratione quadrati ad quadratum. Quamobrem altero in alterum ducto fiet quadratus. Proinde 60 C. æquantur quadrato, sit ille 900 Q. & sit 1 N. 15.

ἄρα πρῶτος ἔσται ιε ἀριθμοστῶν. πάλιν ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου τοῦ ε. ἐστὶ τετραπλασίων. ὁ ἄρα ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου ἔσται μο κ. ἔστι δὲ ὁ δεύτερος ς α. ὁ ἄρα τρίτος ἔσται κ ἀριθμοστῶν. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ τρίτου ὅς ἐστι τ ἀριθμοστῶν. ταῦτα τοῦ ε. εἶναι πενταπλάσια, γίνονται μο τ. ἴσαι δυνάμεσι κε. καὶ εἰ ἦν τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχον ὃν τετραγώνος πρὸς τετράγωνον. λελυμένον ἂν ἦν μοι τὸ ζητούμενον, ἀλλ' αἱ μο τ. ὑπὸ τοῦ ιε. ἐστι καὶ τοῦ κ. ἀλλὰ τὰ ιε. τριπλασίων ἐστὶ τοῦ ε. ὁ δὲ κ. τετραπλασίων τοῦ ε. θέλομεν οὖν τοῦ τριπλασίονος τοῦ ε. ἐπὶ τὸν τετραπλασίονα τοῦ ε. πολλαπλασιασθέντος γινόμενον πρὸς τὸν πενταπλασίονα τοῦ ε. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ὁ δὲ ε. τυχών ἐστι. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ ζητεῖν τινα ἀριθμὸν ὅπως ὁ τριπλασίων αὐτοῦ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τετραπλασίονα αὐτοῦ, καὶ ὁ γινόμενος, πρὸς τὸν πενταπλασίονα αὐτοῦ, λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος ς α. καὶ ὁ τριπλασίων αὐτοῦ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τετραπλασίονα αὐτοῦ ποιεῖ δυνάμεις ιβ. δεῖ τοίνυν τοῦτον πρὸς τὸν πενταπλασίονα αὐτοῦ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. δυνάμεις ἄρα ιβ. πρὸς ἀριθμοὺς ε. ἐθέλομεν εἶναι ἐν λόγῳ ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν, καὶ αὐτὸς ἔσται τετράγωνος. κύβοι ἄρα ξ. ἴσοι τετραγώνῳ ἔστω δὴ ἄρα ἔστω δυνάμεσι ϡ. καὶ γίνεται ὁ ς μο ιε.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ ζητούμενος μο ιε. τάσσω οὖν αὐτὸν μο ιε. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου μο με. καί ἐστιν ὁ δεύτερος ς α. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται με ἀριθμοστοῦ α. ὁμοίως, καὶ ὁ τρίτος ξ ἀριθμοστοῦ α. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου τουτέστι ,βψ δυναμοστοῦ α. τῶν μο ιε. κατασκευάσαι πενταπλασίονα, τὸ ἄρα ,βψ δυναμοστοῦ α. ἴσον μο οε. καὶ γίνεται ὁ ς μο ς. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος μο ζ ∠'. ὁ δὲ δεύτερος μο ς. ὁ δὲ τρίτος μο ι. καὶ εἰ ἦν ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν μο ιε. λελυμένον ἦν μοι τὸ ζητούμενον. τάσσω οὖν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν Δυ ιε. αὐτοὺς δὲ τοὺς τρεῖς ἐν ἀριθμοῖς, ὡς εὕρομεν τὸν μὲν πρῶτον ςς ζ ∠'. τὸν δὲ δεύτερον ςς ς. τὸν δὲ τρίτον ςς ι. καὶ λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς εἶναι Δυ ιε. εἰσὶ δὲ οἱ τρεῖς ςς κγ ∠'. ἀριθμοὶ ἄρα κγ ∠' ἴσοι Δυ ιε. καὶ γίνεται ὁ ς μο μζ λ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τνβ λ ∠'. ὁ δὲ δεύτερος σπβ λ. ὁ δὲ τρίτος υο λ.

Ad positiones, erit quæsitus 15. Pono ergo eum 15. Quare productus ex primo in secundum erit 45. Atqui secundus est 1 N. ergo primus erit $\frac{45}{1N}$. similiter inuenietur tertius $\frac{60}{1N}$. superest vt productus ex primo in tertium, hoc est $\frac{2700}{1Q}$ ipsius 15. quincuplus reperiatur. Igitur $\frac{2700}{1Q}$ æquatur 75. & fit 1 N. 6. Ad positiones. erit primus 7 $\frac{1}{2}$. secundus 6. tertius 10. Horum summa si foret 15. soluta planè esset quæstio. Staatuo itaque summam trium 15 Q. Ipsos autem tres in numeris, quales eos inuenimus, primum scilicet 7 $\frac{1}{2}$ N. secundum 6 N. tertium 10 N. Superest igitur vt trium summa sit 15 Q. est autem 23 $\frac{1}{2}$ N. Quare 23 $\frac{1}{2}$ N. æquantur 15 Q. & fit 1 N. $\frac{47}{30}$ Ad positiones. Erit primus $\frac{352}{30}$ $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{282}{30}$. tertius $\frac{470}{30}$.

IN QVÆSTIONEM XLIII.

Hîc restituto textu, vt fecimus, omnia sunt perspicua, nec maiore explicatione indigent: nonnulla etiam omiserat Xilander, quorum defectu res obscurabatur, vt videre est si versio illius cum nostra conferatur.

QVÆSTIO XLIV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μὲν τὸν πρῶτον ποιῇ τρίγωνον, ἐπὶ δὲ τὸν δεύτερον ποιῇ τετράγωνον, ἐπὶ δὲ τὸν τρίτον ποιῇ κύβον. τετάχθω δὴ ὁ ἐκ τῶν τριῶν δυνάμεως α. ὁ δὲ πρῶτος δυναμοστὸν μονάδων τριγωνικῶν, ἔστω ς δυναμοστοῦ α. ὁ δὲ δεύτερος δυναμοστὸν

INVENIRE tres numeros, vt compositus ex tribus multiplicatus in primum faciat triangulum; in secundum, faciat quadratum, in tertium faciat cubum. Statuatur summa trium 1 Q. Primus autem fractio quadratica vnitatum triangularium, puta $\frac{6}{1Q}$. secundus fractio qua-

dratica vnitatum quadratarum, vt $\frac{4}{1Q.}$ Tertius denique fractio quadratica vnitatum cubicarum, nimirum $\frac{8}{1Q.}$ & quidem 1 Q. multiplicatus in primum facit 6. qui est triangulus, & 1 Q. multiplicatus in secundum facit 4. qui est quadratus, & rursus 1 Q. multiplicatus in tertium facit 8. qui est cubus. Superest vt trium summa sit 1 Q. sed trium summa est $\frac{18}{1Q.}$ hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia per 1 Q. multiplicentur, fit 1 QQ. æqualis 18. Oportet igitur 18. esse quadratoquadratum. Atqui 18. est compositus ex triangulo, quadrato, & cubo. Proinde reperiendus est quadratus, latus habens quadratum, & diuidendus in triangulum, quadratum, & cubum. Esto is 1 QQ. Quadratus autem 1. QQ. + 1 − 2 Q. si ergo de 1 QQ. abstulero 1 QQ. + 1 − 2 Q. relinquetur 2 Q. − 1. Hunc rursus oportet diuidere in cubum, & triangulum. Esto cubus 8. relinquitur ergo triangulus 2 Q. − 9. Porrò quiuis triangulus per 8. multiplicatus, & adsumens vnitatem, facit quadratum. Proinde 16 Q. − 71. æquantur quadrato. Formo quadratum à 4 N. − 1. fit 1 N. 9. Ad positiones. Erit triangulus 153. quadratus 6400. cubus 8. Venio ad id quod initio propositum fuit, & statuo compositum ex tribus quadratum 1 Q. Primum autem $\frac{153}{1Q.}$ vt fiat

μονάδων [τετραγωνικῶν ἔστω] δ^{δυ.α}. ὁ δὲ τρίτος δυναμοστὸν μονάδων κυβικῶν. ἔστω η^{δυ.α}. καὶ ἡ δύναμις μία πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ μὲν τὸν πρῶτον ποιεῖ μο ς. ὅς ἐστι τρίγωνος, ἐπὶ δὲ τὸν δεύτερον ποιεῖ μο δ. ὅς ἐστι τετράγωνος, ἐπὶ δὲ τὸν τρίτον ποιεῖ μο η. ὅς ἐστι κύβος. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς εἶναι δυ α. ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσὶν ιη^{δυ.α}. ἴσοι δυ α. καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν μίαν, γίνεται δυ δυ α. ἴση μο ιη. δεῖ οὖν τὸν ιη. εἶναι δυναμοδύναμιν, ἀλλ' ὁ ιη. σύνθεσίς ἐστι τριγώνου, καὶ τετραγώνου, καὶ κύβου. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον, καὶ αὐτὸν διελεῖν εἰς τρίγωνον, καὶ τετράγωνον, καὶ κύβον. ἔστω δυ δυ α. ὁ δὲ τετράγωνος δυ δυ α μο α λείψει δυ β. ἐὰν ἄρα ἀπὸ δυ δυ μιᾶς ἄρω δυ δυ α. μο α. λείψει δυ β. λοιπὸς καταλείπεται δυ β λείψει μο α. πάλιν ταῦτα δεῖ διαιρεθῆναι εἰς τε κύβον, καὶ τρίγωνον, καὶ ἔστω ὁ κύβος μο η. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίγωνος δυ β λείψει μο θ. πᾶς δὲ τρίγωνος ὀκτάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μονάδα τετράγωνος γίνεται. δυνάμεις ἄρα ις. λείψει μο οα. ἴσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς δ. λείψει μο α. γίνεται ὁ ς μο θ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τρίγωνος μο ρνγ. ὁ δὲ τετράγωνος ςυ. ὁ δὲ κύβος μο η. ἔρχομαι εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὸν ἐκ τῶν τριῶν συγκείμενον τετράγωνον δυ α. τὸν δὲ πρῶτον ρνγ^{δυ.α}. ἐπὶ

τρίγωνον γίνεσθαι. τὸ δὲ δεύτερον ,ςυ δυ. α. ἐπὶ τετράγωνον γίνεσθαι. τὸ δὲ λοιπὸν η δυ. α. ἐπὶ κύβον γενέσθαι. καὶ ἡ δύναμις α. τετράγωνος οὖσα, ἐφ᾽ ὃν ἂν πολλαπλασιασθῇ ποιεῖ, ὃν μὲν τρίγωνον, ὃν δὲ τετράγωνον, ὃν δὲ κύβον. δεῖ δὲ τοὺς τρεῖς εἶναι δυ. α. εἰσὶ δὲ ,ςφξα δυ. α. ἴσον δυ. α. καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν. γίνεται δυ. δυ. α. ἴσον μ ,ςφξα. καὶ γίνεται ὁ ς μ θ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρνγ πα. ὁ δὲ δεύτερος ,ςυ πα. ὁ δὲ λοιπὸς η πα. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

triangulus. Secundum $\frac{6400}{1Q}$. vt fiat quadratus. Tertium denique $\frac{8}{1Q}$ vt fiat cubus. & 1 Q. cùm sit quadratus ductus in vnumquemque, facit primum triangulum, secundum quadratum, tertium cubum. Oportet autem tres simul esse 1 Q. sunt autem $\frac{6561}{1Q}$. hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia in 1 Q. ducantur, fit 1 QQ. æqualis 6561. & fit 1 N. 9. Ad positiones. erit primus $\frac{153}{81}$. secundus $\frac{6400}{81}$. tertius $\frac{8}{81}$. & demonstratio manifesta.

IN QVAESTIONEM LXIIII.

Hîc tota obscuritas nascitur ex fractionibus quadraticis, quæ vt iam sæpe monuimus semper ambiguè exprimũtur apud Diophantum. Deerant & nonnulla verba quæ reposuimus, ea more nostro virgulis includentes. Numerus triangulus dicitur summa progressionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, & per vnitatem progredientis, cuius vltimus terminus, qui & idem est cum numero qui exprimit multitudinem terminorum dicitur latus trianguli vt quinque terminorum 1. 2. 3. 4. 5. summa 15. est triangulus cuius latus 5. & sex terminorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. summa 21. est triangulus cuius latus 6 Quod fusius explicat Diophantus libro de numeris multangulis. Nos quoque in appendice ad eundem librum vniuersalissimè demonstrabimus Theorema quod de Numeris triangulis profert Diophantus. nimirum. Omnis triangulus per octo multiplicatus & adsciscẽs vnitatem quadratum facit. Interim tamen peculiari demonstratione libet id ostendere, supponendo modum illum communem inueniendi summam cuiuscunque progressionis arithmeticæ, ducendo scilicet summam extremorum in semissem numeri terminorum; quem etiam demonstrat Diophantus loco citato. Vnde infertur in progressione cuius summa est numerus triangulus, vbi primus terminus est 1. maximus verò æquatur numero terminorum, seu lateri trianguli, ipsum triangulum haberi si latus ipsius vnitate auctum ducatur in semissem eiusdem lateris. His positis, sic pronuncio.

Omnis numerus triangulus per octo multiplicatus, & adsciscens vnitatem, quadratum facit, cuius latus est duplum lateris ipsius trianguli vnitate auctum.

A 21.
B . . . C . . . D. E
F 168. G 169.
H .... K . L

Sit numerus triangulus A cuius latus B D. cuius semissis B C. & sit vnitas D E. & octuplum ipsius A esto F cui addita vnitate fiat G. sumaturque H K duplum ipsius B D. cui addatur vnitas K L. dico G esse quadratum à latere H L. etenim ex suprà dictis constat triangulum A æquari producto ex
1. secundi. B C. in totum B E. sed hic productus [1] æquatur productis ex B C in B C. & in C D. & in D E. hoc est duplo quadrati ipsius B C. & ipsi B C semel. Quare octuplum ipsius A puta F. æquatur sedecuplo quadrati ipsius B C. & octuplo ipsius B C. Ergo G continet sedecuplum quadrati ipsius B C. octuplum ipsius B C & præterea vnitatem. Porro cùm B D sit duplus ad B C. & rursus H K sit duplus ad B D. patet H K esse quadruplum ipsius B C. ac proinde quadratus ipsius H K æ-

quatur sedecuplo quadrati ipsius B C. & duplum ipsius H K æquatur octuplo eiusdem B C. Igitur G æquatur quadrato ipsius H K. & duplo ipsius H K. & vnitati. Sed & quadratus ipsius H L [1] æquatur quadrato H K. & quadrato K L. hoc est 4. *secundi.* vnitati, & duplo producti ex H K. in vnitatem K L. hoc est duplo ipsius H K Ergo G æqualis est quadrato ipsius H L. Quod erat demonstrandum. Nec refert vtrum B D. secari possit bifariam indiuisa vnitate, necne, cùm hæc demonstratio nitatur solùm propositionibus libri secundi Euclidis, quæ abstrahunt ab integris & à fractis, vt manifestum est. Porro hinc euidenter colligitur omnem quadratum imparem vnitate multatum, esse multiplicem octonarij, nam metitur eum octonarius per numerum triãgulum, cuius latus æquatur semissi lateris quadrati vnitate multati.

Diligenter autem attendenda est operatio Diophanti, qui positiones suas appositissimè instituit vt solutio contingat rationalis. Etenim cùm quærendus sit quadratoquadratus constans ex triangulo, quadrato, & cubo, ponit eum 1. Q Q. Tum argutè quadratum statuit 1 Q Q. + 1. − 2 Q. à latere 1 Q. − 1. quo ablato ab 1 Q Q. superest 2 Q. − 1. qui ex cubo & ex triangulo componi debet. Hinc ergo si auferatur cubus quilibet, puta 8. restat 2 Q. − 9. æquandus triangulo. Quamobrem oportet vt ductus in 8. & adsciscens vnitatem, faciat quadratum per theorema suprà demonstratum. Vnde fit 16 Q. − 71. æquandus quadrato. Hoc autem fieri minimè posset, nisi 16. quadratorum numerus, esset quadratus. Itaque

Aduerte primò in quadrato detrahendo ab 1 Q Q. talem reperiri debere quadratorum numerum, vt is ad 8. habeat rationem quadrati ad quadratum, quales sunt 2. 8. 32. &c. sic poni poterat quadratus ille 1 Q Q. + 16 − 8 Q. à latere 1 Q. 4. vel etiam 1 Q Q. + 256 − 32 Q. à latere 1 Q. − 16. & sic de aliis. Verbi gratia si ponatur quadratus 1 Q Q. + 16 − 8 Q. eo detracto ab 1 Q Q. restabit 8 Q. − 16. vnde si auferas cubum aliquem, puta 8. remanebit 8 Q. − 24 æquandus triangulo. ac proinde ducto eo in 8. & producto addendo vnitatem, fiet 64 Q. − 191. æquandus quadrato, cuius latus si fingas 8 N. − 1. fiet 1 N. 12. cuius quadratoquadratus optimè satisfacit proposito.

Aduerte secundò, alium etiam quemlibet cubum quàm 8. sumi posse, vt in hypothesi Diophanti si sumatur cubus 27. fiet 2 Q. − 28. æquandus triangulo, quem si ducas in 8. & producto addas 1. fiet 16 Q. − 223. æquandus quadrato, cuius latus si ponas 4 N. − 1. fiet 1 N. 28. cuius quadratoquadratus rursus implet postulata.

Aduerte postremo in fingendo latere vltimi quadrati, talem adhibendam esse cautionem, vt valor Numeri reperiatur in integris numeris, cùm numerus triangulus non possit esse nisi integer. Id autem semper succedet operando modo à Diophanto tradito, si quadrati latus fingatur à tot numeris qui sint latus quadratorum in numero quadrato æquando contentorum − 1. Cæterùm vix aliter id fieri posse, satis experiendo deprehendes. Ex operatione autem Diophanti facilè est elicere Canonem ad inueniendum quadratoquadratum qui constet ex triangulo, quadrato, & cubo. nimirum.

Sume cubum quemlibet, & huic adde vnitatem, fiet latus quæsiti quadratoquadrati.

Quod si velis reperire quadratum, & cubum, & triangulum, ex quibus inuentus quadratoquadratus componitur. Adde 1. quadratoquadrato inuento, & hinc aufer duplum quadrati ab eodem latere profecti, relinquetur quadratus quæsitus. Cubus verò is est quem ab initio sumpsisti. Triangulus verò reperietur si ab inuento quadratoquadrato auferas compositum ex quadrato & cubo iam inuentis. Verbi gratia, sume cubum 1. cui adde 1. fiet 2. latus quæsiti quadratoquadrati. Is ergo est 16. quem dico componi ex quadrato, cubo, & triangulo. Nam adde 1. ad 16. fit 17. vnde aufer duplum quadrati à latere 2. puta 8. remanet quæsitus quadratus 9. cubus verò est is quem sumpsisti ab initio, nempe 1. Quare à quadratoquadrato 16. auferendo 9. & 1. simul, remanet triangulus 6. sed & quadratum sic aliter inuenies, aufer 1. à quadrato ab eodem latere profecto, à quo proficiscitur quadratoquadratus inuentus, residuum erit latus quæsiti quadrati, vt in eodem exemplo, cùm quadra-

tus lateris 2. fit 4. aufer hinc 1. remanet 3. latus quæsiti quadrati 9.

Rursus aliter inuenietur triangulus hac arte. Cape duplum cubi ab initio sumpti, & huic adde vnitatem, fiet latus quæsiti trianguli. Vt in eodem exemplo, duplo cubi 1. adde 1. fiet 3. latus trianguli 6.

Hoc verò lemmate soluto, soluetur & proposita quæstio huiusmodi Canone.

Sume quadratoquadratum ex triangulo, quadrato, & cubo compositum. Tum diuide sigillatim triangulum, quadratum & cubum, per quadratum à latere quadratoquadrati sumpti, orientur quæsiti numeri.

Vt in nostra hypothesi, diuide sigillatim 6. 9. 1. per 4. fient quæsiti numeri $\frac{6}{4}$. $\frac{9}{4}$. $\frac{1}{4}$. nam eorum summa est 4. qua ducta in primum fit triangulus 6. & eadem ducta in secundum 1. fit quadratus 9 & eadem ducta in tertium, fit cubus 1.

Dignum quoque animaduersione est, ex vi analyseos Diophanteæ sequi, summam quæsitorum numerorum esse quadratum numerum; quoniam ponitur huiusmodi summa 1 Q. sic vides in illius hypothesi, summam numerorum esse 81. At in nostra 4. & sic de aliis.

Sed & operepretium fuerit adnotasse, quæstionem hanc eodem prorsus artificio extendi posse ad quoslibet polygonos & quaslibet potestates, dummodo iis adnumerentur quadratus & triangulus. Verbi gratia.

Inueniantur quinque numeri, vt summa ipsorum ducta in primum, fiat triangulus, in secundum quadratus, in tertium cubus, in quartum Pentagonus. in quintum quadrato quadratus.

Hîc euidens est reperiendum esse quadratoquadratum compositum ex triangulo, quadrato, cubo, pentagono, & quadratoquadrato. Is esto 1 QQ. quadratus autem 1 QQ. + 1 − 2 Q. quo detracto ab 1 QQ. remanet 2 Q − 1. diuidendus in cubum, pentagonum, quadratoquadratum, & triangulum. Esto cubus 8. pentagonum 5. Quadratoquadratus 1. relinquitur ergo triangulus 2 Q. − 15. qui ductus in 8. & adsumens 1. facit 16 Q. − 119. æquandandum quadrato. Esto latus eius 4 N. − 1. fiet 1 N. 15. Est ergo triangulus 435. quadratus 50176. cubus 8. Pentagonus 5. Quadratoquadratus 1. Veniamus iam ad propositam quæstionem, & statuatur summa quæsitorum numerorum 1 Q. primus verò $\frac{435}{1 Q.}$ secundus $\frac{50176}{1 Q.}$ tertius $\frac{8}{1 Q.}$ quartus $\frac{5}{1 Q.}$ quintus $\frac{1}{1 Q.}$ Erit illorum summa $\frac{50625}{1 Q.}$ æqualis 1 Q. vnde fit 1 N. 15. Igitur primus est $\frac{435}{225}$. secundus $\frac{50176}{225}$. tertius $\frac{8}{225}$. quartus $\frac{5}{225}$. quintus $\frac{1}{225}$.

QVÆSTIO XLV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλάσσονος λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἔτι δὲ καὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι τριπλασίονα. ἐπεὶ δὲ συναμφότερος ὁ μέσος, καὶ ὁ ἐλάσσων ποιεῖ τετράγωνον. ποιείτω μο δ. ὁ ἄρα μέσος μείζων ἐστὶ δυάδος. ἔστω ἀριθμοῦ α. μο β. ὁ ἄρα ἐλάχιστος

INVENIRE tres numeros, vt interuallũ maioris & medij, ad interuallum medij & minoris datam habeat rationem; sed & bini sumpti quadratum constituant. Imperetur vt interuallum maioris & medij, interualli medij & minimi sit triplum. Iam cùm summa medij & minimi sit quadratus, esto 4. ergo medius maior est binario. esto 1 N. + 2. Igitur minimus

erit 2 - 1 N. & quoniam interuallũ maximi & medij, est triplũ interualli medij & minimi interuallũ autem medij & minimi est 2 N. erit interuallum maximi & medij 6 N. Quamobrẽ maximus erit 7 N. + 2. Supersunt duo postulata, nimirũ vt maximus cum medio faciat quadratum, & vt maximus cum minimo faciat quadratum, & occurrit duplicata æqualitas, nempè 8 N. + 4. æquales quadrato, & 6 N. + 4. æquales quadrato, & quia vnitates sunt quadratæ, expedita est æquationis ratio. Statuo duos numeros quorum mutuo ductu fiant 2 N. sicut nouimus in duplicata æqualitate faciendum. sunto ½ N. & 4. fit 1 N. 112. At vbi me ad positiones confero, non possum de 2. auferre 1 N. nimirum 112. Volo igitur numerum inueniri minorem quàm 2. atque sic etiam 6 N. + 4. minores erunt quàm 16. nam binario in 6 N. multiplicato, & additis 4. fiunt 16. Quandoquidem ergo quæro 8 N. + 4. æquari quadrato, & 6 N. + 4. æquari quadrato, sed & à binario fit quadratus 4. sunt tres quadrati 8 N. + 4 & 6 N. + 4. & 4. & interuallum maximi & medij est triens interualli medij & minimi: eò res rediit vt inueniantur tres quadrati, vt interuallum maximi & medij, sit triens interualli medij & minimi, sed & minimus

ἔσται μ° β̄. ⩚ ς° ᾱ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τριπλασίων ἐστί. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ςς^{οι} β̄. ἡ ἄρα ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου ἔσται ςς ϛ̄. καὶ ὁ μείζων ἄρα ἔσται ςς ζ̄. μ° β̄. λοιπόν ἐστι δύο ἐπιτάγματα, τό τε συναμφότερον τὸν μείζονα, καὶ τὸν μέσον ποιεῖν τετράγωνον τό τε τὸν μείζονα, καὶ τὸν ἐλάχιστον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεταί μοι διπλῆ ἡ ἰσότης ςς^{οι} η̄ μ° δ̄. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ ςς^{οι} ϛ̄. μ° δ̄. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ διὰ τὸ τὰς μονάδας εἶναι τετραγωνικάς, εὐχερής ἐστιν ἡ ἴσωσις. πλάσσω ἀριθμοὺς δύο, ἵνα τὸ ὑπὸ αὐτῶν ᾖ ςς β̄. καθὼς ἴσμεν διπλῆν ἰσότητα. ἔστωσαν ς° τὸ ἥμισυ, καὶ μ° δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° ριβ̄. ἐλθὼν ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, οὐ δύναμαι ἀφῃρεῖν ἀπὸ μ° β̄. τὸν ς^{ον} ᾱ. τουτέστι τὰς μ° ριβ̄. θέλω οὖν τὸν ς^{ον} εὑρεθῆναι ἐλάττονα μ° β̄. ὥστε καὶ ςς^{οι} ϛ̄. μ° δ̄. ἐλάσσονες ἔσονται μ° ιϛ̄. ἐὰν γὰρ ἡ δυὰς ἐπὶ ςς^{οὺς} ϛ̄. γένηται καὶ προσλάβῃ μ° δ̄. ποιεῖ μ° ιϛ̄. ἐπεὶ οὖν ζητῶ ςς^{οὺς} η̄. μ° δ̄. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ ςς^{οὺς} ϛ̄. μ° δ̄. ἴσους τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ἀπὸ τῆς δυάδος τουτέστι μ° δ̄. τετράγωνός ἐστι. γεγόνασι τρεῖς τετράγωνοι ςς η̄. μ° δ̄. καὶ ςς ϛ̄. μ° δ̄. καὶ μ° δ̄. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ἐστίν. ἀπήχθη μοι εἰς τὸ εὑρεῖν [τρεῖς] τετραγώνους, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ᾖ, ἔτι δὲ ὁ μὲν ἐλάχιστος

ἢ μο δ. ὁ δὲ μέσος ἐλάσσων μο ιϛ. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάχιστος μο δ. ἡ δὲ τοῦ μέσου πλευρὰ ϛ α. μο β. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυ α. ϛϛ δ. μο δ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ἐστί, καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου δυ α. ϛϛ δ. ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ μέσου ἔσται δυ α γ. ϛ α. α γ. καὶ ἔστιν ὁ μέσος δυ ϛϛ δ. μο δ. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται δυ α. α γ. ϛϛ ε. α γ μο δ. ἴσοι τετραγώνῳ. πάντα ἐννεάκις· δυνάμεις ἄρα ιβ. ϛϛοι μη. μο λϛ. ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ τὸ τέταρτον αὐτῶν δυ γ. ϛϛοι ιβ. μο θ. ἴσον τετραγώνῳ, δεῖ δὲ καὶ τὸν μέσον ἐλάσσονα εἶναι μο ιϛ. καὶ τὴν πλευρὰν δηλαδὴ ἐλάσσονα εἶναι μο δ. ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ μέσου ἐστὶν ϛ α. μο β. ἀριθμὸς ἄρα εἷς μο β. ἐλάττονές εἰσι μο δ. καὶ κοινῶν ἀφαιρεθεισῶν τῶν β μο. ὁ ϛ ἔσται ἐλάσσων μο β. γέγονε οὖν μοι δυ γ. ϛϛοι ιβ. μο θ. ἴσας ποιῆσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τετράγωνον τινὰ ἀπὸ μο γ. λειπόντων ϛϛοι τινας, καὶ γίνεται ὁ ϛ ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑξάκις γενομένου, καὶ προσλαβόντος τὸν ιβ. τουτέστι τῶν ἰσώσεως τῶν ϛϛοι ιβ. καὶ μερισθέντος εἰς τὴν ὑπεροχήν, ἣ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ ϛ τετράγωνος τῶν δυνάμεων τῶν ἐν τῇ ἰσώσει τριῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὃς ἑξάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μο ιβ. μεριζόμενος εἰς τὴν ὑπεροχὴν ἣ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τετράγωνος, τριάδος, ποιεῖ τὴν παραβολὴν ἐλάσσονα μο β. ἔστω

ſit 4. Medius autem minor quàm 16. Ponatur minimus 4. At medij latus 1 N. + 2. Ipſe igitur erit 1 Q. + 4 N. + 4. Quia ergo interuallum maximi & medij, eſt triens interualli medij & minimi, at interuallum medij & minimi eſt 1 Q. + 4 N. vtique maximi & medij interuallum erit $\frac{1}{3}$ Q. + 1 $\frac{1}{3}$ N. At eſt medius 1 Q. + 4 N. + 4. Igitur maximus erit 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 5 $\frac{1}{3}$ N. + 4. æqualis quadrato. Omnia nouies. Ergo 12 Q. + 48 N. + 36. æquatur quadrato, & huius quadrans, nempè 3 Q. + 12 N. + 9. æquatur quadrato. Atqui oportet & medium minorem eſſe quàm 16. Quare & latus minus eſſe oportet quàm 4. latus autem medij eſt 1 N. + 2. Proinde 1 N. + 2. minus ſunt quàm 4. & ſublato vtrimque binario. 1 N. minor eſt quàm 2. volens itaque 3 Q. + 12 N. + 9. æquare quadrato, formo quadratum à 3. cum defectu aliquot numerorum, & fit 1 N. ex aliquo numero ſexies ſumpto, & adſciſcente 12. nimirum 12 N. æquationis, & diuiſo per interuallum quo numeri quadratus ſuperat quadratos qui ſunt in æquatione, nempè 3. Eò itaque deducta res eſt, vt inueniatur numerus qui ſexies ſumptus, & adſciſcens 12. diuiſuſque per interuallum quo ipſius quadratus excedit ternarium, quotientem binario minorem exhibeat. Eſto

quæſitus

quæſitus 1 N. Hic ſexies ſūptus & adſciſcens 12. facit 6 N. + 12. Quadratus autē illius detracto ternario facit 1 Q. − 3. Volo ergo 6 N. + 12. diuidi per 1 Q. − 3. & facere quotientē minorem quā 2. Atqui 2. diuiſus per vnitatē, facit quotientē 2. Proinde 6 N. + 12. ad 1 Q. − 3. minorē habet rationē quàm 2. ad 1. Quare & planus plano inæqualis eſt. Igitur productus ex 6 N. + 12. in 1. minor eſt producto ex 2. in 1 Q. − 3. hoc eſt 6 N. + 12. minus ſūt quàm 2 Q. − 6. Adiiciantur quæ deſunt vtrimq; vnitates, erunt 2 Q maiores quàm 6 N. + 18. In æquatione autē hac explicanda, dimidium numerorum in ſe ducimus, & fit 9. ducimus etiā quadratos in vnitates, & fiunt 36. & addito 9. fiūt 45. cuius latus non minus eſt 7. Adde ſemiſſem numerorum, & diuide per quadratos, fit 1 N. minor 5. Oportet igitur 3 + 12 N. + 9. æquare quadrato à latere 3 − 5 N. & fit 1 N. $\frac{42}{22}$. hoc eſt $\frac{21}{11}$. Poſueram autē medij quadrati latus 1 N. + 2. erit ergo huiuſmodi latus $\frac{43}{11}$. ipſe verò quadratus $\frac{1849}{121}$. venio igitur ad primò propoſitum, & ſtatuo $\frac{1849}{121}$ qui eſt quadratus, æqualem 6 N. + 4. & omnia ducendo in 121. fit 1 N. $\frac{1365}{726}$. minor vtique binario. Ad poſitiones quæſtionis initio propoſitæ. Statueramus medium 1 N. + 2. minimum 2 − 1 N. Maxi-

ὁ ζητούμενος ς^ο ᾱ. οὗτος ἑξάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μ^ο ιβ̄. ποιεῖ ςς^οι ς̄. μ^ο ιβ̄. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος λείψας μ^ο γ̄. ποιεῖ δ^υ ᾱ. ⋔ μ^ο γ̄. θέλω οὖν ςς^οι ς̄. μ^ο ιβ̄. μερίζεσθαι εἰς δ^υ ᾱ ⋔ μ^ο γ̄. καὶ ποιεῖν τὴν παραβολὴν ἐλάσσονα μ^ο β̄. καὶ ὁ β̄ μεριζόμενος εἰς μονάδα μίαν ποιεῖ τὴν παραβολὴν, δυάδα, ὥστε ςς^οι ς̄ μ^ο ιβ̄ πρὸς δύναμιν ᾱ ⋔ μ^ο γ̄. ἐλάσσονα λόγον ἔχουσιν, ἤπερ δύο πρὸς ἕνα. καὶ χωρίον χωρίῳ ἄνισον. ὁ ἄρα ὑπὸ ςς ς̄ μ^ο ιβ̄. καὶ μονάδος μιᾶς, ἐλάσσων ἐστὶ, τοῦ ὑπὸ δυάδος καὶ δυνάμεως ᾱ ⋔ μ^ο γ̄. τουτέστι ςς^ο ς̄ μ^ο ιβ̄. ἐλάσσονές εἰσι δ^υ β̄ ⋔ μ^ο ς̄. καὶ κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ μονάδες, μείζονες ςς^οι θ̄ μ^ο ιη̄. αἱ δυνάμεις β̄. ὅταν δὲ τοιαύτην ἴσωσιν ἰσώσωμεν, ποιοῦμεν τῶν ςς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ, γίνεται θ̄. καὶ τὰς δ^υ β̄. ἐπὶ τὰς μ^ο ιη̄. γίνονται λς̄. προσθὲς τοῖς θ̄. γίνονται με̄. ὧν πλευρὰ οὐκ ἐλάττων ἐστὶ μ^ο ζ̄. πρόσθες τὸ ἡμίσευμα τῶν ςς [καὶ μέριζον εἰς δυνάμεις] γίνεται [ὁ ς^ο] οὐκ ἐλάττων μ^ο ε̄. γέγονεν οὖν μοι δυνάμεις γ̄. ςς^οι ιβ̄. μ^ο θ̄. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μ^ο γ̄. λείψει ἀριθμῶν ε̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ο μ^ο μβ^{κβ}. τουτέστι κα^{ια}. τέθηκα δὲ τὴν τοῦ μέσου τετραγώνου πλευρὰν ς^ο ᾱ. μ^ο β̄. ἔσται ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ μ^ο μγ^{ια}. αὐτὸς δὲ ὁ τετράγωνος μ^ο ,αωμθ^{ρκα}. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω μονάδας ,αωμθ^{ρκα}. ὄντα τετράγωνον ἴσον τοῖς ςς^οις ς̄. μ^ο δ̄. καὶ πάντα εἰς ρκα. καὶ γίνεται ὁ ς^ο. ,ατξε^{ψκς}. καὶ ἔστιν ἐλάσσων δυάδος. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις τοῦ προβλήματος τοῦ ἐξ ἀρχῆς. ὑπέστημεν δὲ τὸν μὲν μέσον ς^ο ᾱ. μ^ο β̄. τὸν δὲ ἐλάχιστον μ^ο β̄. ⋔

ς ᾱ. τὸν δὲ μέγιστον ςς ζ. μο β. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος ᾱ. ,αζ ψκς. ὁ δὲ δεύτερος βωιζ ψκς. ὁ δὲ ἐλάχιστος ὁ τρίτος σζ ψκς. καὶ ἐπεὶ τὸ μόριον τὸ ψκς οὐκ ἔστι τετράγωνος, ἕκτον δὲ ἐστιν αὐτοῦ ἐὰν λάβωμεν ρκα. ὅ ἐστι τετράγωνος. πάντων οὖν τὸ ἕκτον. καὶ ὁμοίως ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ,αωλδ ρκα. ᾱ β'. ὁ δὲ δεύτερος υξθ ρκα. ᾱ ς'. ὁ δὲ τρίτος λδ ρκα. ᾱ. καὶ ἐὰν ἐν ὁλοκλήροις θέλῃς, ἵνα μὴ τὸ ἥμισυ ἐπιτρέχῃ, εἰς τέσσαρα ἔμβαλες. καὶ ἔσται ὁ πρῶτος ,ζτλη υπδ. ὁ δὲ δεύτερος ,αωοη υπδ. ὁ δὲ τρίτος ρλη υπδ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

mum verò 7 N. + 2. erit ergo maximus $\frac{11007}{726}$. secundus $\frac{2817}{726}$. minimus seu tertius $\frac{207}{726}$. & quia denominator 726. non est quadratus sed eius sextans 121. est quadratus, omnium sextantes accipiamus, & erit similiter primus $\frac{1834\frac{1}{2}}{121}$. secundus $\frac{469\frac{1}{2}}{121}$. tertius $\frac{34\frac{1}{2}}{121}$. Quod si in integris hæc desideras, ne semissis intercurrat, omnia quadruplica, & erit primus $\frac{7338}{484}$. secundus $\frac{1878}{484}$. tertius $\frac{138}{484}$. & demonstratio manifesta.

IN QVAESTIONEM XLV.

PRÆCLARVM est hoc problema, & admirandæ subtilitatis, in quo etiam continetur nouus modus vtendi duplicata æqualitate, omnium quos hactenus explicauimus, elegantissimus. Cùm ergo tres operationes instituat Diophantus, age singulas persequamur, vt multa dilucidentur, in quibus omnino cæcutiit Xilander.

In prima itaque operatione. Aduerte primò pro quadrato quem conficiunt medius & minimus sumi potuisse quemlibet vnitatum numerum quadràtum. Author sumpsit 4. minimum scilicet more suo.

Aduerte secundo cur inferat medium maiorem esse debere binario, causam esse quia medius debet esse maior minimo. Quare posita summa medij & minimi 4. oportet medium excedere semissem ipsius 4.

Aduerte tertiò cùm æquandi sint quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. Diophantũ indicare primùm, modũ illum resoluendi duplicatam æqualitatem, quo sæpè in simili vsus est libro tertio. Quia enim vnitatum numerus vtrobique quadratus est, procedit æquatio, si sumantur duo numeri quorũ mutuo ductu fiat interuallũ 2 N. ita tamẽ vt in semisse sũmmæ illorũ contineatur 2. latus quadrati 4. tales sunt $\frac{1}{2}$ N. & 4. Quare si horũ summæ semissis quadratus æquetur ipsi 8 N. + 4. vel si eorundẽ interualli semissis quadratus æquetur ipsi 6 N + 4. fiet vtrobique 1 N. 112. Hinc autẽ hoc incõmodi accidit, vt per hũc Numeri valorẽ resolui non possint hypostases. Etenim cùm minimus positus sit 2 − 1 N. euidẽs est valorẽ Numeri debere esse minorem quàm 2. Proinde cùm hoc modo resoluendo duplicatam æqualitatem vnica solutio reperiri possit, qua fit 1 N. 112. patet eum hoc loco inutilem esse. Igitur

Aduerte quartò aliud hîc genus duplicatæ æqualitatis tradi à Diophanto, quo in data hypothesi, & aliis omnibus similibus infinitæ reperiri possunt solutiones, hac arte. Consideratis tribus numeris 8 N + 4. 6 N. + 4. 4. Quorum minimus 4 est vnitatum numerus quadratus. At interuallum maiorum 2 N. est triens interualli minorum 6 N. Quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit triens interualli quo minor illorum superabit 4. quales sunt 64. & 49. Tunc verò siue æques 64. & 8 N. + 4. siue 49. & 6 N. + 4. fiet vtrobique idem valor numeri 7 $\frac{1}{2}$. Hoc autem ita necessario inuenire, ac proinde modum istum resoluendi duplicatam æqualitatem esse legitimum, sic demonstrabitur. Sint tres numeri A. B. C. & interuallum maiorum A B. esto D. interuallum minorum B C. esto E. Rursus sint tres F G H. & maiorum F G. interuallum esto K. minorum L. Ponaturque H æqualis ipsi C. & sit eadem ratio D ad E. quæ K ad L. dico si G fiat æqualis ipsi B. & ipsum F fore æqualem ipsi A. in quo consistit vis omnis duplicatæ æqualitatis. Etenim quia B G ponuntur æquales, si ab his demantur æquales C H. erunt & residui E L. æquales. Cùm ergo sit D ad E. vt K ad L. erunt & ipsi D K æquales. Quamobrem additis æqualibus D. K ad æquales B G.

D –   E –
A – B – C –
F 64. G 49. H 4.
K 15. L 45.

fient & toti A F æquales. Quod demonstrandum erat. Itaque vt reperiat quadratos quales sunt F. G. quorum scilicet interuallum sit triens interualli quo minor G. superat 4. secundam instituit operationem Diophantus.

In secunda operatione. Aduerte primò minoris quæsitorum quadratorum latus ritè poni 1 N. + latere quadrati 4. puta 1 N. + 2. vt in eius quadrato 1 Q. + 4 N. + 4. vnitatum numerus æquetur ipsi 4. ac proinde excessus quadrati illius supra 4. nimirum 1 Q. + 4 N. constet ex solis quadratis & numeris, quorum triens cùm sit $\frac{1}{3}$ Q. + 1 $\frac{1}{3}$ N. constans etiam ex solis quadratis & Numeris, eo addito ad minorem quadratum, fit maior quadratus 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 5 $\frac{1}{3}$ N. + 4. vbi vnitatum numerus reperitur idem quadratus 4, quod accidit quia is reperiebatur in minore quadrato, & vt dictum est, maior quadratus fit addendo minori solos quadratos & numeros, vnde vnitates manent immutatæ. Necesse autem fuit vnitatum numerum quæ sunt in maiori quadrato, quadratum fuisse, ad hoc vt latus eius fingi potuerit.

Aduerte secundò numerũ quadrato æquandum, puta 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 5 $\frac{1}{3}$ N. + 4. duci in 9. ad tollẽdas fractiooes, tũ productũ diuidi per 4. vt æquatio reducatur ad minimos numeros. vnde fit 3 Q. + 12 N. + 9. æquãdus quadrato. Nã vt alias sæpè monuimus tã quadrato in quadratum ducto, quàm per quadratũ diuiso, producitur quadratus.

Aduerte tertiò numerum 3 Q. + 12 N. + 9. æquandũ esse quadrato cum quadam Numeri determinatione. Etenim vt suprà ostensũ est, 6 N. + 4. ita æquãdus est quadrato, vt fiat 1 N. minor quàm 2. At si 1 N. sit minor quàm 2. erũt 6 N. minores quàm 12. Quare adiecto 4. erit 6 N. + 4. minor quàm 16. ac proinde latus quadrati cui æquandus est 6 N. + 4. debet esse minus quàm 4. Positũ autẽ est latus illud 1 N. + 2. Igitur 1 N. + 2. minus est quàm 4. & auferendo vtrimque 2. manet 1 N. minor quàm 2. Rectè igitur concludit Diophantus numeri 3 Q. + 12 N. + 9. latus ita fingendũ esse, vt fiat 1 N. minor quàm 2. Porro necesse est hoc latus fingi 3 − certo numero Numerorũ, vnde patet fieri valorẽ Numeri, si per quadratũ numeri Numerorum in latere positorum ternario multatum, diuidatur sextuplum eiusdem numeri Numerorum, auctum numero 12. Itaque benè infertur quærendum esse numerum cuius sextuplum auctum numero 12. & diuisum per quadratum quæsiti numeri, ternario multatum, det quotientem minorem quàm 2. Ad hunc ergo numerum inueniendum tertiam molitur operationem Diophantus.

In tertia operatione. Cùm 6 N. + 12. debeat diuidi per 1 Q. − 3. ita vt fiat quotiens minor binario, Diophantus ita ratiocinatur. Quouis numero per alium diuiso, quotiens est denominator proportionis diuisi ad diuisorem, qui denominator eò maior est, quo maior est porportio, & cootrà. Cùm igitur binario per 1. diuiso fiat quotiẽs 2. & diuiso 6 N. + 12. per 1 Q. − 3. debeat fieri minus quàm 2. sequitur 6 N. + 12. ad 1 Q. − 3. minorẽ habere rationẽ, quã 2. ad 1. Datis igitur quatuor numeris 6 N. + 12. 1 Q. − 3. 2. 1. Cùm minor sit ratio primi ad secundũ, quã tertij ad quartũ, sequitur ex primo in quartum produci minorẽ numerũ, quàm ex secundo in tertiũ, vt demonstrauit Clauius ad decimã nonam septimi. Rectè igitur infert Diophantus 6 N. + 12. minus esse quàm 2 Q. − 6. & adiectis æqualibus 6 N. + 18. minus esse quã 2 Q. Hoc autẽ vt sit, oportet vtique 2 Q. æquari numero alicui maiori quàm 6 N. + 18. Quod vt præstet, considerat primùm Diophãtus qualis fiat valor Numeri si 2 Q. ponãtur æquales 6 N. + 18. quæ est secunda regula compositarum, quamque modò sibi familiari resoluit, ducendo scilicet numerũ quadratorum 2. in vnitates 18. vnde fit 36. cui addit quadratum semissis numeri Numerorũ, puta 9. & fit 45. cuius lateri si addatur 3. semissis numeri Numerorũ, & summa diuidatur per numerum Quadratorum 2. fit valor Numeri. Sed hæc æquatio solutionẽ dat irrationalem, quia 45. non habet latus quadratũ. Sumitur ergo loco 45. proximè maior quadratus 49. cuius lateri 7. addẽdo 3. fit 10. quo diuiso per 2. prodit 5. valor numeri. In hac autem æquatione 6 N. + 18. ponitur minor quàm 2 Q. Quia 2 Q. fiũot æquales 6 N. + 20. Eadẽ de causa statui potest valor Numeri quilibet numerus maior quàm 5. puta 6. 7. 8. &c. Tunc enim semper 2 Q. fient æquales alicui numero maiori quàm 6 N. + 18.

Hæc quidem ad perfectam Diophantæi Problematis explicationem satis superque sufficiunt. Quoniam verò hîc vtitur author elegantissimè duplicata æqualitate, vnde re subtilius considerata modos aliquot adinuenimus eadem vtendi, etiam in

dissimili casu, quibus sanè difficillima pulcherrimáque problemata feliciter explicari possunt, minimè pigebit non vulgare inuentum curioso lectori tradere vt illo perfruatur. Quemadmodũ ergo in hac quæstione Diophantus docet modum quo duo numeri simul æquentur quadrato, cùm vterque cõponitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorũ sunt inæquales, nec habent rationem quadrati ad quadratum, numeri autem vnitatem sunt inæquales & quadrati: sic aio modum dari posse resoluendi duplicatam æqualitatem, cùm vterque propositorũ numerorum quadrato æquandorum, componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent rationem quadrati ad quadratum; sed & numeri vnitatum inæquales sunt, siue quadrati sint, siue non. Id autem præstabimus in duplici casu.

Primus casus est, cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum tale est, vt eo per aliquem vnitatum numerum multiplicato, vel diuiso, & producto vel quotiente à minore propositorum numerorum detracto, supersit vnitatum numerus solus quadratus. verbi gratia. Propositi sint quadrato æquandi 3 N. + 13. & 1 N. + 7. quia horum interuallum est 2 N. + 6. quo diuiso per 2. fit quotiens 1 N. + 3. quo ablato de 1 N. + 7. superest quadratus 4. explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 3 N. + 13. 1 N. + 7. & 4. cùm maiorum interuallum, puta 2 N. + 6. duplus sit interualli minorum, puta 1 N. + 3. Quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit duplum interualli, quo minor illorum superat 4. Quod facilè fiet, infinitisque modis insistendo vestigiis Diophanti. Esto enim latus minoris 1 N. + latere quadrati 4. puta 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N. + 4. cuius excessus supra 4. est 1 Q. + 4 N. cuius duplum 2 Q. + 8 N. quo addito ad minorem quadratum, fiet maior 3 Q. + 12 N. + 4. hic ergo æquandus est quadrato, sed prius determininandum est de valore Numeri. Quia enim minor numerorum quadrato æquandorum est 1 N. + 7. patet talem ei quadratum æquari debere, qui sit maior quàm 7. Quare cùm latus proximum ipsius 7. sit 2 ¾. debet & latus quadrati maius esse quàm 2 ¾. At latus huius quadrati supra positum est 1 N. + 2. hoc ergo maius sit oportet, quàm 2 ¾. & auferendo vtrimque 2. manet 1 N. maior quàm ¾. Quoniam igitur vt æquemus quadrato 3 Q. + 12 N. + 4. latus eius ponendum est 2. – certo numerorum numero, vnde fiet valor Numeri diuidendo quadruplum numeri Numerorum auctum numero 12. per quadratum eiusdem numeri Numerorum multatum ternario. Euidens est quærendum esse numerum, cuius quadruplum auctum numero 12. & diuisum per quadratum quæsiti numeri multatum ternario, det quotientem maiorem quàm ¾. Ponatur quæsitus numerus 1 N. ergo $\frac{4 N. + 12}{1 Q. - 3}$ maior est quàm ¾. & omnia ducendo in 1 Q. – 3. fit 4 N. + 12. maior quàm ¾ Q. – 2 ¼., additóque defectu, & omnia per 4. multiplicando, fit 16 N. + 57. maior quàm 3 Q. Quamobrem æquando 3 Q. numero alicui minori quàm 16 N. + 57. puta 16 N. + 53 ⅔ cùm fiat 1 N. 7 ⅔ pronuncio quæsitum numerum sumendum esse minorem quàm 7 ⅔. talem tamen vt eius quadratus excedat 3. sumatur 3. Igitur numeri 3 Q. + 12 N. + 4. fingo latus 2 – 3 N. & fit 1 N. 4. & sunt quæsiti quadrati 100. & 36. Nam siue æques 100. & 3 N. + 13. siue 36. & 1 N. + 7. fit vtrobique idem valor Numeri 29. Quod erat propositum.

Itaque in hoc casu, vt æquatio sit explicabilis. Oportet vt interualli propositorum numerorum diuidendo Numeros per Numeros minoris numeri, vel contrà; & per quotientem diuidendo, vel multiplicando vnitates interualli, fiat quotiens vel productus quo detracto ab vnitatibus minoris numeri, supersit quadratus. Vt in exemplo allato vbi interuallum est 2 N. + 6. minor numerus 1 N. + 7. quia diuidendo 2 N. per 1 N. & per quotientẽ 2. diuidendo vnitates 6. fit 3. quo detracto de 7. remanet quadratus 4. ideo æquatio potuit explicari. Quod si proponantur quadrato æquandi 8 N. + 25. & 6 N. + 21. quorum interuallum 2 N. + 4. Quia diuidendo 6 N. per 2 N. & per quotientem 3. multiplicando vnitates interualli 4. fit 12. quo ablato de 21. remanet quadratus 9. ideo poterit explicari æquatio, quærendo duos quadratos quorum interuallum sit triens interualli, quo minor superat 9. Ponatur latus minoris 1 N. + 3. erit ipse 1 Q. + 6 N. + 9. & excessus eius super 9. erit ⅓ Q. + 2 N. quo ipsi minori quadrato addito, fiet maior 1 ⅓ Q. + 8 N. + 9. & omnia ducẽdo in 9. fiet 12 Q. + 72 N. + 81. æquandus quadrato, & si Numeri determi-

nationem inuestiges, inuenies quadrati latus fingendum esse 9 – tot numeris qui non excedant 14. sed quorum quadratus excedat 12. Ponatur 9 – 4 N. fiet 1 N. 36. & erunt quæsiti quadrati 2025. & 1521. quos si æques propositis numeris, maiorem maiori, & minorem minori, fiet vtrobique 1 N. 250.

Secundus casus est. Cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum tale est, vt eo per aliquem vnitatum numerum multiplicato, vel diuiso, & producto vel quotiente à minore propositorum numerorum detracto, deficiat vnitatum numerus solus, qui ad multiplicatorem vel diuisorem rationem habeat quadrati ad quadratum. Vt si proponantur æquandi quadrato 6 N. + 25. & 2 N. + 3. quorum interuallum 4 N. + 22. quia hoc diuiso per 2. fit 2 N. + 11. quo detracto à minore numero superest – 8. & numerus 8. ad diuisorem 2. habet rationem quadrati ad quadratum, ideo explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 6 N. + 25. 2 N. + 3. & – 8. quoniam maiorum interuallum, puta 4 N. + 22. duplum est interualli minorum, quod est 2 N. + 11. Quæram duos quadratos, quorum interuallum sit duplum interualli quo minor superat – 8. Ponatur minor 1 Q. huius interuallum suprà – 8 est 1 Q. + 8. cuius duplum 2 Q. + 16. quo addito ad minorem quadratum, fit maior 3 Q. + 16. Hoc ergo vt æques aptè quadrato, si quæras Numeri determinationem, inuenies latus ponendum esse 4 – tot numeris qui non excedant 4 $\frac{1}{2}$. & quorum quadratus superet 3. Ponatur ergo latus illud 4 – 3 N. fiet 1 N. 4. & erunt quæsiti quadrati 64. & 16. Nam siue æques 64. & 6 N. + 25. siue 16. & 2 N. + 3. fit vtrobique 1 N. 6 $\frac{1}{2}$. Itaque in hoc casu, vt æquatio sit explicabilis, oportet vt interualli propositorum numerorum diuidendo Numeros per Numeros minoris, vel contra, & per quotientem hunc primum diuidendo, vel multiplicando vnitates interualli, fiat quotiens vel productus, à quo detrahendo vnitates minoris numeri, supersit numerus qui ad primum quotientem habeat rationem quadrati ad quadratum. Vt in allato exemplo, vbi interuallum est 4 N. + 22. minor numerus 2 N. + 3. quia diuidendo 4 N. per 2 N. & per quotientem 2. diuidendo 22. vnitates interualli fit 11. à quo auferendo 3. vnitates minoris numeri, superest 8. qui ad quotientem 2. habet rationem quadrato numero expressam, ideo æquatio potuit explicari. Quod si proponantur quadrato æquandi 15 N. + 39. & 12 N. + 31. quorum interuallum 3 N. + 8. quia diuidendo 12 N. per 3 N. fit quotiens 4. Quo ducto in 8. fit 32. à quo auferendo 31. superest 1. qui ad quotientem 4. habet rationem quadrati ad quadratum, ideo explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 15 N. + 39. 12 N. + 31. & – 1. quia maiorum interuallum 3 N. + 8 est quadrãs interualli minorũ quod est 12 N. + 32. Quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallũ sit quadrãs interualli quo minor superat – 1. esto minor 1 Q. erit maior $\frac{5}{4}$ Q. + $\frac{1}{4}$ æquandus quadrato, omnia in 4. fit 5 Q. + 4. æqualis quadrato, & si quæras Numeri determinationem. Inuenies latus eius ponendum 2 – certo numero vnitatum qui non sit maior quàm 2 $\frac{3}{5}$. nec minor quàm 2 $\frac{1}{4}$. Ponatur ergo 2 – 2 $\frac{1}{4}$ N. fiet 1 N. 144. & erunt quæsiti quadrati 25920 $\frac{1}{4}$ & 20736. quos si æques propositis numeris, maiorem maiori, & minorem minori, fiet vtrobique 1 N. 1725 $\frac{5}{12}$.

Hac arte in æquatione quam resoluit Diophantus propositione 17. lib. 3. æquans quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. Cùm ille vnicam solutionem reperire possit, nos infinitas dabimus. Etenim quia interuallũ est 5 N. + 5. & diuidẽdo 5 N. per 5 N. fit 1. per quem diuidendo vnitates 5. fit quotiens 5. à quo auferendo 4. superest 1. qui ad priorem quotientem 1. habet rationem quadrati ad quadratum, puta æqualitatis, ideo explicabitur æquatio si quærantur duo quadrati, quorum interuallum sit æquale interuallo quo minor superat – 1. sit minor 1 Q. erit maior 2 Q. + 1. quadrato æquandus, sed si quæras Numeri determinationem inuenies latus fingendum esse 1 – tot numeris qui sunt minus quàm 2. & quorum quadratus excedat 2. fingatur 1 – 1 $\frac{1}{2}$ N. fiet 1 N. 28. vt apud Diophantum. Rursus fingatur 1 – $\frac{5}{3}$ N. fiet 1 N. $\frac{30}{7}$ eruntque quæsiti quadrati $\frac{1849}{49}$ $\frac{900}{49}$. & primum si æques 10 N. + 9. secundum 5 N. + 4. fiet 1 N. vtrobique $\frac{704}{245}$.

Porrò vtraque regula suam vim obtinet qualicunque signo afficiantur numeri quadrato æquandi, vt constat ex sequentibus exemplis.

Sint quadrato æquandi 24 − 8 N. & 9 − 2 N. quia horum interuallum est 15 − 6 N. quo diuiso per 3. fit 5 − 2 N. quo detracto à minore superest 4. quadratus numerus, resoluetur æquatio per primam regulam; sit minoris quadrati latus 1 N. + 2. erit ipse 1 Q. + 4 N. + 4. Ergo maior 4 Q. + 16 N. + 4. cuius latus si ponas 2 − 8 N. fiet 1 N. $\frac{4}{5}$. & quæsiti quadrati $\frac{484}{25}$ & $\frac{196}{25}$. quos si æques propositis numeris, fiet vtrobique idem valor Numeri $\frac{29}{50}$.

Rursus sint quadrato æquandi 30 N. − 17. & 10 N. − 11. quia horum interuallum est 20 N. − 6. quo diuiso per 2. fit 10 N. − 3. quo detracto de minore superest − 8. qui ad diuisorem 2. habet rationem quadrati ad quadratum, resoluetur æquatio per secundam regulam. Sit minor quadratus 1 Q. erit maior 3 Q. + 16. cuius latus esto 4 + 1 N. fiet 1 N. 4. Erunt ergo quadrati 64. & 16. qui si æquentur propositis numeris, fiet vtrobique valor Numeri $\frac{27}{10}$.

Rursus sint æquandi quadrato 24 N. − 2 & 8 + 10. cùm horum interuallum sit 16 N. − 12. quo diuiso per 2. fit 8 N − 6. quo detracto à minore superest 16: quadratus. Explicabitur æquatio per primam regulam. Sit minoris quadrati latus 4 + 1 N. erit ipse 16 + 8 N. + 1 Q. ergo maior erit 16 + 24 N. + 3 Q. cuius latus esto 4 + 2 N. fiet 1 N. 8. ergo quæsiti quadrati sunt 400. & 144. qui si æquentur propositis numeris, fit vtrobique valor Numeri $\frac{67}{4}$.

QVÆSTIO XLVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου, λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔτι δὲ σὺν δύο λαμβανόμενοι, ποιῶσι τετράγωνον. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου, τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ μέσος τοῦ ἐλαχίστου, ἔστω τριπλασίων. ἐπεὶ ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος ποιοῦσι τετράγωνον, ποιείτωσαν δυνάμεις ιϛ. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται μείζων δυνάμεων η. ἔστω δυνάμεων η. μονάδων β. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος, μείζων ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ἔστι συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος δυνάμεις ιϛ. συναμφότερος ἄρα ὁ μέγιστος, καὶ ὁ ἐλάχιστος, ἐλάσσων μέν ἐστι δυνάμεων ιϛ. μείζων δὲ δυνάμεων η. ἔστω οὖν συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ ἐλάχιστος δυνάμεις θ. ἔστι καὶ ὁ μέγιστος, καὶ ὁ

INVENIRE tres numeros, vt excessus quo quadratus maximi superat quadratum medij, ad interuallum medij & minimi, datam habeat rationem, sed & bini sumpti faciant quadratum. Porrò excessus quo quadratus maximi superat quadratum medij, ad excessum medij supra minimum sit triplus. Quandoquidem maximus & medius faciunt quadratum, faciant 16 Q. ergo maximus est maior quàm 8 Q. esto 8 Q. + 2. & quando maximus & medius coniuncti superant summam maximi & minimi, at maximus & medius simul sunt 16 Q. erit vtique summa maximi & minimi minor quidem quàm 16 Q. sed maior quàm 8 Q. Igitur summa maximi & minimi esto 9 Q. Atqui summa maximi & medij

est 16 Q. quorum maximus est 8 Q. + 2. erit ergo medius 8 Q. − 2. Tertius verò 1 Q. − 2. & quia volo excessum quo quadratus maximi superat quadratum medij, ad excessum medij supra minimum esse triplum, sed excessus quo quadratus maximi superat quadratum medij est 64 Q. At interuallum medij & minimi est 7 Q. cuius triplum est 21 Q. Porro 64 Q. fiunt ex 32. in 2. ducto: incumbit ergo mihi vt numerum aliquem inueniam, qui per 32. multiplicatus faciat 21. est autem $\frac{21}{32}$. Pono igitur primum 8 Q. + $\frac{21}{32}$. Medium 8 Q. − $\frac{21}{32}$. tertium 1 Q. − $\frac{21}{32}$. & restat implendum vnum postulatorum, nimirum vt summa medij & minimi sit quadratus numerus. est autem hæc summa 9 Q. − $\frac{42}{32}$. hoc ergo æquatur quadrato à latere 3 N. − 6. & fit 1 N. $\frac{597}{576}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{3069000}{331776}$. secundus $\frac{2633544}{331776}$ tertius $\frac{138681}{331776}$.

μέσος δ^υ ιϛ. ὧν ὁ μέγιστός ἐστι δ^υ η. μ° β. ἔσται ἄρα καὶ ὁ μέσος δ^υ η. λείψει μ° β. ὁ δὲ τρίτος δ^υ α. λείψει μ° β. καὶ ἐπεὶ θέλω τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι τριπλασίονα. ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου ἐστὶ δ^υ ξδ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ, τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐστὶ δ^υ ζ. καὶ θέλομεν τὰς δυνάμεις ξδ. τῶν δ^υ ζ. εἶναι τριπλασίονας. ἀλλ' αἱ δ^υ ζ. τριπλασίονα γενόμεναι ποιοῦσι δ^υ κα. ἀλλ' αἱ δυνάμεις ξδ. ἐκ τοῦ τριακοντάκις καὶ δὶς ἐστὶ τῶν μ° β. γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὃς τριακοντάκις, καὶ δὶς γενόμενος ποιῇ μ° κα. ἐστὶ δὲ τὰ κα λβ. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον δ^υ η. μ° κα λβ. τὸν δὲ μέσον δ^υ η. λείψει μ° κα λβ. τὸν δὲ τρίτον δ^υ α. λείψει μ° κα λβ. καὶ λοιπόν ἐστιν ἓν ἐπίταγμα, συναμφότερον τὸν μέσον, καὶ τὸν ἐλάσσονα εἶναι τετράγωνον, ἐστὶ δὲ ὁ μέσος, καὶ ὁ ἐλάχιστος δ^υ θ. λείψει μ° μβ λβ. ἴσαι τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς ϛϛ γ. λείψει μ° ϛ. καὶ γίνεται ὁ ϛ° φϟζ φοϛ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τϛ. ͵θ λγ. ͵αψοϛ. ὁ δὲ δεύτερος σξγ. ͵γφμδ λγ. ͵αψοϛ. ὁ δὲ τρίτος ιγ. ͵ηχπα λγ. ͵αψοϛ.

IN QVAESTIONEM XLVI.

Hic quatuor præstanda sunt. Primo summa maximi & medij debet esse quadratus, ideo statuitur 16 Q. & poni poterat quilibet alius quadratorum numerus quadratus. Quia verò ex duobus inæqualibus numeris, patet maiorem illorum excedere semissem summæ ipsorum eodem numero, quo minor deficit ab eodem semisse, ideo posito maximo 8 Q. + 2. sequitur medium esse 8 Q. − 2.

Secundò summa maximi & minimi debet quoque esse quadratus, sed quia summa maximi & minimi, minor est summa maximi & medij eodem numero quo medius superat minimum, ideò cùm posita sit summa maximi & medij 16 Q. oportet vtique summam maximi & minimi minorem esse quàm 16 Q. Quia verò, vt dictum est,

ipse maximus maior est quàm 8 Q. multò magis summa maximi & minimi, maior erit quàm 8. Q. Quare rectè concludit Diphantus, pro summa maximi & minimi sumendum esse quadratum minotem quàm 16 Q. maiotem quàm 8 Q. puta 9 Q. vnde si auferatur maximus qui positus est 8 Q. + 2. restat minimus 1 Q. − 2.

Tertiò excessus quadrati maximi super quadratum medij ad excessum medij supra minimum, datam rationem habere debet, putà triplam. Quia verò maximus est binomiū constans ex quadratis & vnitatibus, puta 8 Q. + 2. At minimus est residuum eiusdem binomij, puta 8 Q. − 2. Quadratus autem binomij excedit quadratum sui residui, quadruplo plani sub partibus comprehensi, vt constat ex genesi quadrati per quartam secundi Euclidis, cùm quadrati partium sint iidem tam in binomio quàm in residuo, ideo sequitur interuallum quadratorum maximi & medij esse quadruplum producti ex 8 Q. in 2. nimirum 64 Q. At interuallum medij & minimi est 7 Q. cuius triplum 21 Q. æquari deberet 64 Q. Hoc ergo vt per ipsas positiones consequamur, quærendus est numerus loco ipsius 2. qui quarer ductus in 8. seu in 32. semel, efficiat 21. hoc habetur diuidendo 21. per 32. estque $\frac{21}{32}$. Hunc igitur sumentes loco ipsius 2. erit maximus 8 Q. + $\frac{21}{32}$. medius 8 Q. − $\frac{21}{32}$. Minimus 1 Q. − $\frac{21}{32}$. & sic per ipsas positiones tribus postulati partibus est satisfactum.

Quartò restat vt summa medij & minimi sit quadratus. Quare 9 Q. − $\frac{21}{16}$ æquandus est quadrato, cuius latus ponitur à Diophanto 3 N. − 6. non absque cautione aliqua. Etenim talis inueniri debet valor Numeri, vt 1 Q. sit maiot quàm $\frac{21}{32}$. quia scilicet minimus numerus positus est 1 Q. − $\frac{21}{32}$. At 1 Q. maior erit quàm $\frac{21}{32}$. si sit maior vnitate, & si 1 Q. maior sit vnitate, erit & 1 N. maior vnitate. Itaque cùm fiat valor Numeri ex quodam quadrato adsciscente $\frac{21}{16}$. & sic diuiso per sextuplum sui lateris, vt autem fiat quotiens maior vnitate, oportet diuisum numerum esse maiorem diuisore, quærendus est numerus cuius quadrarus adsciscens $\frac{21}{16}$ sit maior sextuplo ipsius numeri. Porro talis est 6. & omnis numerus suprà 6. Quia enim quadratus ipsius 6. æquatur sextuplo sui lateris, & quadratus cuiuslibet numeri supra 6 est maior sextuplo sui lateris, patet addendo $\frac{21}{16}$. ad huiusmodi quadratum fieri semper numerum maiorem sextuplo lateris. Ideo numeri 9 Q. − $\frac{21}{16}$. latus ritè ponetur 3 N. − 6. vel 3 N. − 7. vel 3 N. − 8. & sic in infinitum.

Cæterùm eodem prorsus artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire tres numeros, vt excessus quadrati medij supra quadratum minimi ad interuallum, quo maximus superat medium datam, habeat rationem. Sed & bini sumpti faciat quadtatum. Sit data ratio tripla.

Ponatur summa minimi & medij 4. Q. & esto medius 2. Q. + 1. minimus 2 Q. − 1. Tum ponatut summa minimi & maximi quilibet quadratus maior quàm 4 Q. puta 9 Q. erit ergo maximus 7 Q. + 1. Est porro interuallum quadratorum minorum 8 Q. At interuallum maiorum 5 Q. cuius triplum 15 Q. æquari deberet 8 Q. fit autem 8 Q. ex 2 Q. quater in vnitatem. Itaque quærendus est numerus loco vnitatis, qui ductus in 2. quater, seu qui ductus in 8. semel, efficiat 15. is est $\frac{15}{8}$. hunc ergo sumentes loco vnitatis ponemus minimum 2 Q. − $\frac{15}{8}$. medium 2 Q. + $\frac{15}{8}$. maximum 7 Q. $\frac{15}{8}$. Superest vt summa medij & maximi æquetur quadrato, fit ergo 9 Q. + $\frac{15}{4}$ æqualis quadrato, cuius latus sita fingendum est vt fiat valor Numeri maior vnitate, quia minimus positus est 2 Q. − $\frac{15}{8}$. Quare oportet vt 1 Q. sit maior quàm $\frac{15}{16}$. quod accidit si sit maiot vnitate. Porrò fiet valor Numeri ex quodam quadrato multato numero $\frac{15}{4}$. & diuiso per sextuplum sui lateris. Quare vt hac diuisione prodeat quotiens maior vnitate, oportet 1 Q. − $\frac{15}{4}$ maiorem esse quàm 6 N. vnde tandem fit 1 Q. maior quàm 6 N. + $\frac{15}{4}$. qua æquatione resoluta fit 1 N. maiot quàm 7. Igitur numeri 9 Q. + $\frac{15}{4}$ latus fingemus 3 N. − quotlibet vnitatibus quæ superent 7. Ponatur 3 N. − 10. fiet 1 N. $\frac{77}{48}$. eruntque quæsiti numeri $\frac{3769}{1152}$. $\frac{8089}{1152}$. $\frac{45823}{2304}$. qui satisfaciunt postulatis, nam bini faciunt quadratos $\frac{5929}{576}$. $\frac{53361}{2304}$. $\frac{62001}{2304}$. quorum latera $\frac{77}{24}$. $\frac{231}{48}$. $\frac{249}{48}$. interuallum verò quadratorum primi & secundi est $\frac{51226560}{1327104}$. seu $\frac{88935}{2304}$. triplus vtique interualli secundi & tertij quod est $\frac{29645}{2304}$.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ
ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ Ε.

DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBER QVINTVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE tres numeros in geometrica proportionalitate, vt quiuis eorum detracto dato numero faciat quadratum. Esto datus 12. Est autem geometrica proportionalitas, cùm numerus sub extremis contentus habet medium pro latere quadrato. Quæro primùm quis quadratus, detractis 12. faciat quadratum, hoc autem facile fit & est 42 $\frac{1}{4}$. Pono ergo alterum extremorum 42 $\frac{1}{4}$ alterum 1 Q. Igitur medius erit 6 $\frac{1}{2}$ N. Restat vt horum vterque demptis 12. faciat quadratum. Proinde 1 Q. − 12. æquatur quadrato, & 6 $\frac{1}{2}$ N. − 12. æquatur quadrato horum interuallum est 1 Q. − 6 $\frac{1}{2}$ N. mensuratio. Metitur 1 N. per 1 N. − 6. $\frac{1}{2}$. horum interualli semissis in se, facit $\frac{169}{16}$. hoc æquatur minori, seu 6 $\frac{1}{2}$ N. − 12. & fit 1 N. $\frac{361}{104}$. Ad positiones. Erit primus 42 $\frac{1}{4}$. secundus $\frac{2346}{104}$. $\frac{1}{2}$ tertius $\frac{130321}{10816}$.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν λείψας τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ ιβ. γεωμετρικὴ δέ ἐστιν ἀναλογία, ὅταν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἀριθμὸς πλευρὰν ἔχῃ τὸν μέσον. ζητῶ πρότερον τίς [τετράγωνος] λείψας μ ιβ [ποιεῖ τετράγωνον.] ἔστι δὲ τοῦτο ῥᾴδιον, καί ἐστιν ὁ μβ. α δ. [τάσσω οὖν ἕνα τῶν ἄκρων μ μβ α δ.] τὸν δ' ἕτερον Δ^Y α. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ςς ϛ α∠. λοιπόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν ⋔ μ ιβ ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔστι Δ^Y α λείψει μ ιβ ἴση τετραγώνῳ. καὶ ςς ϛ. α∠ λείψει μ ιβ. ἴσοι τετραγώνῳ. ἡ τούτων ὑπεροχή ἐστιν Δ^Y α ⋔ ςς ϛ. α∠. ἡ μέτρησις, μετρεῖ ς α κατὰ ς α ⋔ μ ϛ. α∠. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἐστι μ ρξθ ιϛ. ταῦτα ἴσα τῷ ἐλάσσονι, τουτέστι ςς ϛ. α∠. λείψει μ ιβ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ τξα ρδ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρότερος μ μβ. α δ. ὁ δὲ δεύτερος βτμϛ ρδ. α β. ὁ δὲ τρίτος ιγ. τκα αωιϛ.

IN V. LIBRVM DIOPHANTI COMMENTARII.

IN QVAESTIONEM PRIMAM.

RESTITVTO textu, nihil hîc superest difficultatis. Quadratum qui detracto 12. relinquat quadratum, inuenit Diophantus per vndecimam secundi, vt bene monet Xilander, cùm hoc nihil aliud sit quàm quærere duos quadratos interuallo 12. differentes. Cæterùm cùm ex duobus numeris quadrato æquandis 1 Q. − 12. & $6\frac{1}{2}$ N. − 12. non constet quisnam sit maior altero, potest eorum interuallum statim 1 Q. − $6\frac{1}{2}$ N. vt fecit Diophantus, vel etiam $6\frac{1}{2}$ N. − 1 Q. supponendo scilicet $6\frac{1}{2}$ N. − 12. esse maiorem, & eadem nihilominus inuenietur solutio. Nam metientes erunt $6\frac{1}{2}$ − 1 N. & 1 N. quorum summæ semissis quadratus $\frac{169}{16}$ æquatur maiori, putà $6\frac{1}{2}$ N. − 12. vt prius. Hinc etiam facilè Canonem fabricabimur.

Sume pro primo quæsitorum, quemlibet quadratum, qui detracto dato numero quadratum relinquat. Huius quadranti adde datum numerum, fiet secundus. Hunc diuide per latus primi, orietur latus tertij.

Sic ponendo primum $42\frac{1}{4}$ cum Diophanto, cùm eius quadrans sit $10\frac{9}{16}$. & addendo 12. fiat $22\frac{9}{16}$. seu $\frac{361}{16}$. tantus erit secundus. Quo diuiso per $6\frac{1}{2}$. quod est latus primi, fit latus tertij $\frac{361}{104}$. & ipse tertius $\frac{130321}{10816}$. Diophantus loco $\frac{361}{16}$ posuit secundum more suo $\frac{2346}{104}\frac{1}{2}$ exprimens eum per partes à numero 104. denominatas.

QVÆSTIO II.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν προσλαβὼν Ⓜ δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὴ Ⓜ κ̄. πάλιν ζητῶ τίς τετράγωνος προσλαβὼν μο κ̄. ποιεῖ τετράγωνον, ἔστι δὲ ὁ ιϛ̄. τάσσω τοίνυν ἕνα τῶν ἄκρων μο ιϛ̄. Ⓜ δὲ ἕτερον Ⓜ τῶν ἄκρων δυ ᾱ. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ϛϛ δ̄. καὶ κατὰ τὴν προστάξιν λοιπὸν γίνεται ζητεῖν ϛϛ δ̄ μο κ̄. ἴσους τετραγώνῳ. καὶ δυ ᾱ. μο κ̄. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ ἔστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ δυ ᾱ. λεῖψει ϛϛ δ̄. ἡ μέτρησις, μετρεῖ ϛ ᾱ. κατὰ ϛ ᾱ. λεῖψει μο δ̄. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ποιεῖ μο δ̄. ἴσας τῷ ἐλάσσονι ϛϛ δ̄ μο κ̄. ὅπερ ἄτοπον. δεῖ γὰρ τέσσαρας μονάδας μὴ ἐλάσ-

INVENIRE tres numeros in geometrica proportionalitate, vt quilibet ipsorum adsumens datum numerum, faciat quadratum. Esto datus 20. Rursus quæro quis quadratus adscito 20. faciat quadratum; est autem 16. Pono ergo alterum extremorum 16. alterum verò 1 Q. Igitur medius erit 4 N. Proinde ob ea quæ in præcedente dicta sunt, restat 4 N. + 20. æquari quadrato, & 1 Q. + 20. æquari quadrato, & est horum interuallum 1 Q. − 4 N. Mensuratio metitur 1 N. per 1 N. − 4. horum interualli semissis in se facit 4. æqualem minori seu 4. N. + 20. Quod est absurdum. Oporteret enim 4. maio-

rem esse quàm 20. sed vnitates 4. sunt quadrans de 16. Porrò 16. non est casu oblatus. Sed est quadratus qui adsciscens 20. facit quadratum. Eò igitur deuentum est vt quæratur quadratus, cuius quadrans sit maior quàm 20. & adsumens 20. faciat quadratum. Vtique quadratus hic maior erit quàm 80. At 81. est quadratus maior quàm 80. Ergo si latus quadrati quem quærimus statuamus 1 N. + 9. erit ipse quadratus 1 Q. + 18 N. + 81. hunc oportet additis 20. facere quadratum. Proinde 1 Q. + 18 N. + 101. æquantur quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. - 11. Erit ergo quadratus 1 Q. + 121. - 22 N. Hæc æquantur 1 Q. + 18 N. + 101. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Erat autem quæsiti quadrati latus 1 N. + 9. Erit ergo quadratus 90 $\frac{1}{4}$. Recurro nunc ad id quod initio proponebatur, & statuo primum 90 $\frac{1}{4}$. tertium 1 Q. medius ergo erit 9 $\frac{1}{2}$ N. & eò ventum est vt quæram quo pacto & 1 Q. + 20. & 9 $\frac{1}{2}$ N. + 20. æquentur quadrato. Interualli semissis in se facit $\frac{361}{16}$ quod æquatur minori, hoc est 9 $\frac{1}{2}$ N. + 20. & fit 1 N. $\frac{41}{152}$. Ad positiones. Erit primus 90 $\frac{1}{4}$. secundus $\frac{389}{152}$ $\frac{1}{2}$. tertius $\frac{1681}{23104}$.

σονας εἶ μ° κ̄. ἀλλ' αἱ μ° δ̄. τέταρτόν εἰσι τῶν ιϛ̄. αἱ δὲ μ° ιϛ̄. οὐκ εἰσιν αἱ τυχοῦσαι. ἀλλ' ὁ τετράγωνός ἐστιν ὁ προσλαβὼν μ° κ̄. καὶ ποιῶν τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν μοι ζητῆσαι τίς τετράγωνος ἔχει μέρος τέταρτον, ὃ μεῖζόν ἐστιν μ° κ̄. προσλαβὼν δὲ μ° κ̄. ποιεῖ τετράγωνον. ὥστε ὁ τετράγωνος γίνεται μείζων μ° π̄. ἔστι δὲ ὁ πᾱ τετράγωνος μείζων π̄. ἐὰν ἄρα τὴν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου πλευρὰν κατασκευάσωμεν ἀπὸ ϛ^ος ᾱ. μ° θ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δ^υ ᾱ. ϛϛ ιη̄. μ° πᾱ. ταῦτα μετὰ μ° κ̄. ὀφείλει γίνεσθαι τετράγωνος. ἔστιν ἄρα δ^υ ᾱ. ϛϛ^οι ιη̄. μ° ρᾱ. ἴσαι τετραγώνῳ ἔστω ἀπὸ πλευρᾶς ϛ^ος ᾱ. λεί μ° ιᾱ. ὁ ἄρα τετράγωνος ἔσται δ^υ ᾱ. μ° ρκᾱ. λεί ϛϛ κβ̄. ταῦτα ἴσα δ^υ ᾱ. ϛϛ^οις ιη̄. μ° ρᾱ. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ος μονάδος ἡμίσεως. ἦν δὲ ἡ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου πλευρὰ ϛ^ος ᾱ. μ° θ̄. ἔσται ἄρα ὁ τετράγωνος μ° ϟ. ᾱ^δ. νῦν ἀνατρέχω ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω πρῶτον τῶν ἄκρων μ° ϟ. ᾱ^δ. τὸν δὲ τρίτον δ^υ ᾱ. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ϛϛ θ̄. ᾱ^β. καὶ ἔρχομαι εἰς τὸ ζητεῖν δ^υ ᾱ. μ° κ̄. ἴσας τετραγώνῳ. καὶ ϛϛ^οι θ̄. ᾱ^β. μ° κ̄. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ δ^υ ᾱ. λεί ϛϛ θ̄. ᾱ^β. μετρεῖ ϛ^ος ᾱ. κατὰ ϛ^ου ᾱ. λεί μ° θ̄. ᾱ^β. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἐστὶ τξᾱ^ιϛ. ἴσα τῷ ἐλάσσονι, τουτέστι ϛϛ^οις θ̄. ᾱ^β. μ° κ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ος μᾱ^ρνβ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϟ. ᾱ^δ. ὁ δεύτερος τπθ^ρνβ. ᾱ^β. ὁ τρίτος ͵αχπᾱ^{β.τδ}.

IN QVAESTIONEM II.

IN prima operatione occurrunt quadrato æquandi 4 N. + 20. & 1 Q. + 20. sed explicari non potest huiusmodi æquatio, quia horum interuallum est 1 Q. − 4 N. quod fit ex 1 N. in 1 N. − 4. quorum interuallum 4. cuius semissis quadratus 4. æquari debet minori, putà 4 N + 20. quod est impossibile, quia 4. non est maior quàm 20. Considerat ergo Diophantus vnde 4. prouenerit, est autem quadratus semissis numeri Numerorum 4. pro secundo positi. At secundus statuitur numerus Numerorum qui latus est quadrati pro primo positi, quia enim primus positus est 16. fit secundus 4. N. Quoniam ergo quadratus semissis cuiuslibet numeri, est quadrans
11. octaui. quadrati totius numeri, eò quod quadrati sunt in ratione duplicata laterum, rectè concludit Diophantus quadratum 4. esse quadrantem quadrati 16. Quare eò deuentum est, vt loco 16. statuamus pro primo aliquem alium quadratum, qui adscito 20. faciat quadratum, & cuius quadrans sit maior quàm 20. Reliqua plana sunt, nec maiore explicatione indigent. Sed ex ipsa operatione talis Canon elici potest.

Sume pro primo quemlibet quadratum, qui adscito dato numero quadratum faciat, & cuius quadrans excedat datum numerum. Ab huius quadrante aufer datum numerum, relinquetur secundus: quem diuide per latus primi, orietur latus tertij.

QVÆSTIO III.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσθεῖναι τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστός τε αὐτῶν, καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν περιλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὴ ὁ ε. καὶ ἐπεὶ ἔχομεν ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἑκάτερός τε καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ αὐτοῦ δοθέντος ποιῇ τετράγωνον, γεγόνασιν ἀπὸ δύο τετραγώνων τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς. ἐκτίθεμαι οὖν δύο τετραγώνους τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς, ὃν μὲν ἀπὸ ςο ᾱ. μο γ̄. ὃν δὲ ἀπὸ ςο ᾱ. μο δ̄. καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυ ᾱ. ςς ς̄. μο θ̄. ὃς δὲ δυ ᾱ. ςς η̄. μο ιϛ̄. αἴρω ἀπὸ ἑκάστου μο ε̄. καὶ τάσσω ὃν μὲν δυ ᾱ. ςς ς̄. μο δ̄. ὃν δὲ δυ ᾱ. ςς η̄. μο ια̅. τὸν δὲ τρίτον τὸν συναμφοτέρου δὶς παρὰ μονάδα, τουτέστι δυ δ̄. ςς κη̅. μο κθ̅. λοιπὸν ἄρα καὶ τοῦτον μετὰ μο ε̄. ποιεῖν τετράγωνον.

DATO numero apponere tres numeros, vt quilibet ipsorum, & qui à binis producitur quibusuis datum adsumēs numerum, faciat quadratum. Datus esto 5. Quoniam habemus in porismatibus; si duo sint numeri, quorum tam vterque, quam productus eorum multiplicatione eodem dato numero adscito faciat quadratum, oriuntur à duobus quadratis continēter proximis. Expono duos huiusmodi quadratos, alterum à latere 1 N. + 3. alterum à latere 1 N. + 4. & fiunt quadrati, alter quidē 1 Q. + 6 N. + 9. alter verò 1 Q. + 8 N. + 16. Aufero ab vtroque 5. & statuo alterum 1 Q. + 6 N. + 4. alterum 1 Q. + 8 N. + 11. tertium autem duplum summæ horum dempta vnitate, hoc est 4 Q. + 28 N. + 29. Restat ergo vt & hic adsumpto 5. faciat quadratum.

Proinde

Proinde 4 Q. + 28 N. + 34. æquantur quadrato, à latere scilicet 2 N. + 6. & fit quadratus 4 Q. + 36 − 24 N. æqualis 4 Q. + 28 N. + 34. & fit 1 N. $\frac{1}{26}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{2861}{676}$. secundus $\frac{7645}{676}$. tertius $\frac{20336}{676}$.

δυνάμεις ἄρα δ̄. ςς κη̄. μο λδ̄. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς β̄. λείψει μ ς̄. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος. δυ δ̄ μ λς̄. λείψει ςς κδ̄. ἴσων δυνάμεσι δ̄. ςς κη̄. μ λδ̄. καὶ γίνεται ὁ ς μ α̅ κς. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ͵βωξα κςων. ὁ δεύτερος ͵ζχμε κςων. ὁ δὲ τρίτος β, τλς κςων.

IN QVAESTIONEM III.

PORISMA quod assumit Diophantus, vniuersalius propositum, demonstrauimus propositione decimatertia libri secundi porismatum. Nam propositio illa hic facilè applicatur, si quod ibi vniuersaliter demonstratur de quibuscunque quadratis, adaptetur quadratis continenter proximis. Etenim cùm laterum interuallum sit vnitas, quæ numeros quos diuidit non immutat, patet quadratos multatos dato numero, vnà cum duplo summæ illorum, vnitate multato, præstare quod ait Diophantus, & reliqua plana sunt.

Porrò vsus erit huius porismatis, quale demonstratum est loco citato, si proponatur huiusmodi quæstio.

Inuenire tres numeros, vt quem bini producũt adscito dato numero quadratum faciat, sed & quilibet in eundem aliquem numerum ductus, & assumens eundem datum numerum, fiat quadratus.

Datus esto 5. & quilibet ductus in 2. & adsumens eundem 5. fiat quadratus. Exponantur duo quadrati, quorum interuallum sit 2. sintque eorum latera 1 N + 3. & 1 N. + 5. erunt ipsi quadrati 1 Q. + 6 N. + 9. & 1 Q. + 10 N. + 25. aufer ab vtroque 5. & residua diuide per interuallum laterum 2. fient $\frac{1}{2}$ Q. + 3 N + 2. & $\frac{1}{2}$ Q. + 5 N. + 10. primus & secundus quæsitorum, tertius autem erit duplum summæ illorum multatum eodem interuallo laterum 2. putà 2 Q. + 16 N. + 22. Restat vt & huius duplum adscito 5. quadratum faciat. Igitur 4 Q. + 32 N. + 49. æquatur quadrato, esto latus eius 2 N. − 17. fiet 1 N. $\frac{12}{5}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{302}{25}$. $\frac{622}{25}$. $\frac{1798}{25}$. qui satisfaciunt proposito.

QVÆSTIO IIII.

DATO numero, inuenire alios tres, vt quiuis ipsorum, & qui ex binis quibusque fit, multatus dato numero faciat quadratum. Esto datus 6. Rursum similiter expono duos quadratos continenter proximos, alterum 1 Q. alterum 1 Q. + 2 N. + 1. & his adiicio datum numerum, & statuo primum 1 Q. + 6. secundum 1 Q. + 2 N. + 7. tertium similiter duplum amborum dempta

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἑκάτερός τε αὐτῶν, καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ ς̄. πάλιν δὴ ὁμοίως ἐκτίθεμαι δύο τετραγώνους τοὺς κατὰ τὸ ἑξῆς ὄντας, ὃν μὲν [δυ α̅. ὃν δὲ] δυ α̅. ςς β̄. μ α̅. καὶ τούτοις προστίθημι τὸν δοθέντα, καὶ τάσσω μὲν τὸν πρῶτον δυ α̅ μ ς̄. τὸν δεύτερον δυ α̅ ςς β̄ μ ζ̄. τὸν δὲ τρίτον ὁμοίως τοῦ διπλασίονος συναμφοτέρου

παρὰ μονάδα α. τουτέστι [δ^Υ δ. ς^οι δ. μ° κε. λοιπὸν ἄρα καὶ τοῦτον λείψαντα μ° ς. ποιεῖν τετράγωνον. δ^Υ ἄρα δ. ς^οι δ. μ° ιθ. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς^ῶν β. ⋔ μ° ς. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δ^Υ δ. μ° λς. λείψει ς^ῶν κδ. ἴσων] δ^Υ δ. ς^οις δ. μ° ιθ. καὶ γίνεται ὁ ς ιζ κη^ων. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ,δωλγ ψπδ^ων. ὁ δὲ δεύτερος ,ςψκθ ψπδ^ων. ὁ δὲ τρίτος β. ,βχξ ψπδ^ων.

vnitate, hoc eſt 4 Q. + 4 N. + 25. Reſtat vt & is detracto 6. faciat quadratum. Proinde 4 Q. + 4 N. + 19. æquantur quadrato, eſto latus eius 2 N − 6. & fit quadratus 4 Q. + 36 − 24 N. æqualis 4 Q. + 4 N. + 19. & fit 1 N. $\frac{17}{28}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{4833}{784}$. ſecundus $\frac{6729}{784}$. tertius $\frac{[illegible]}{784}$.

IN QVAESTIONEM IIII.

PORISMA quoque quod hîc aſſumitur, demonſtratum eſt à nobis propoſitione decimaquarta libri ſecundi poriſmatum, ſed vniuerſalius, cuius etiam vſus ampliari poteſt, eodem prorſus modo, quo ad præcedentem docuimus id fieri poſſe in ſimili poriſmate.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἔχομεν πάλιν ἐν τοῖς πορίσμασιν. ὅτι πᾶσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς προσευρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς ὃς ὢν διπλασίων συναμφοτέρου καὶ δυάδι μείζων, τρεῖς ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν ποιεῖ τετράγωνον. τάσσωμεν οὖν τῶν ἐκκειμένων τριῶν τετράγωνον. ὃν μὲν δ^Υ α. ς^ῶν β. μ° α. ὃν δὲ δ^Υ α. ς^ῶν δ. μ° δ. τὸν δὲ τρίτον δ^Υ δ. ς^ῶν ιβ. μ° ιβ. λοιπὸν δεῖ κατασκευάσαι τὸν τρίτον, τουτέστι δ^Υ δ. ἀριθμοὺς ιβ. μ° ιβ. ἴσον τετραγώνῳ, καὶ ἐκείνου τὸ τέταρτον γίνεται δύναμις α. ἀριθμοὶ γ. μ° γ. ἴσαι τετραγώνῳ.

INVENIRE tres quadratos, vt quem bini faciunt planum, ſiue adſciſcat amborum ſummam, ſiue reliquum, faciat quadratum. Habemus rurſum in poriſmatibus. Quod duobus quibúſque quadratis continenter proximis adinueniri poteſt alius numerus, qui cum ſit ſummæ illorum duplus, & binario amplior, tres facit numeros, quorum bini quem producunt, ſiue adſciſcat amborum ſummam, ſiue reliquum, faciat quadratum. Statuo igitur trium quæſitorum quadratorum, alterum 1 Q. + 2 N. + 1. alterum 1 Q. + 4 N. + 4. tertium 4 Q. + 12 N. + 12. Reſtat vt tertium, nempè 4 Q. + 12 N. + 12. æquemus quadrato, ſed & huius quadrans fit 1 Q. + 3 N. + 3. æqualis quadrato.

Formo quadratum ab 1 N. − 3. est ergo quadratus ipse 1 Q. + 9 − 6 N. æqualis 1 Q. + 3 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{2}{3}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{25}{9}$. secundus $\frac{64}{9}$. tertius $\frac{136}{9}$.

πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ς α. ⋔ μ γ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος. δ^υ α. μ θ. ⋔ ςς ς. ἴσαι δ^υ α. ςς^οι γ. μ γ. καὶ γίνεται ὁ ς μ β^x. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κε^x. ὁ δεύτερος ξδ^x. ὁ δὲ τρίτος ρλς^x.

IN QVAESTIONEM V.

Hîc codex manu exaratus porismatis explicationem sic exhibet. ὅτι πᾶσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς, προσευρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς, ὃς ὢν διπλασίων συναμφοτέρου καὶ δυάδι μείζων, ὅς τις τὸν ἐκκαίδεκα μείζονα, τρεῖς ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν, ποιεῖ τετράγωνον. Vnde nos, tanquam subreptitia, expunximus verba illa, ὅς τις τὸν ἐκκαίδεκα μείζονα. Ipsum verò porisma demonstrauimus vniuersalissimè propositione decimasexta libri secundi porismatum. Itaque nihil hîc superest difficultatis.

QVÆSTIO VI.

INVENIRE tres numeros, vt quiuis eorum binario multatus faciat quadratum, & qui fit ex binorum mutuo ductu, siue amborum summam abiiciat, siue reliquum, fiat quadratus. Si cuiuis superiore quæstione inuentorum numerorum adiicio 2. sic confecti satisfaciunt postulatis. Quod itaque dicitur tale est. Ponimus vnum eorum qui quæruntur 1 Q. + 2. Alterum 1 Q. + 2 N. + 3. tertium 4 Q. + 4 N. + 6. & fit quod iubetur. Restat vt 4 Q. + 4 N. + 4 æquetur quadrato. Proinde & quadrans eius æquatur quadrato, nempè 1 Q. + 1 N. + 1. Quod si latus quadrati ponamus à differentia, erit 1 N − 2. fit quadratus 1 Q. + 4 − 4 N. æqualis 1 Q. + 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{59}{25}$. secundus $\frac{114}{25}$. tertius $\frac{246}{25}$. & euidens est demonstratio.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἕκαστος μὲν αὐτῶν λείψας δυάδα ποιῇ τετράγωνον, ὁ δὲ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἐάν τε λείψῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. ἐὰν ἑκάστῳ τῶν ἐν τῷ πρὸ τούτου εὑρεθέντων ἀριθμῶν, προσθῶ δυάδα, οἱ γινόμενοι ποιοῦσι τὸ προκείμενον. τὸ δὲ γινόμενον τοιοῦτόν ἐστι. τάσσομεν γὰρ ἕνα τῶν ζητουμένων δ^υ α. μ β. τὸν δὲ ἕτερον δ^υ α. ςς^οι β. μ γ. τὸν δὲ τρίτον δ^υ δ. ςς^οι δ. μ ς. καὶ μένει τὰ ἐπιταχθέντα. λοιπόν ἐστι δ^υ δ. ςς^οι δ. μ δ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ, καὶ τὸ τέταρτον, ὥστε καὶ δύναμιν α. ς α. μ α. ἴσους εἶναι τετραγώνῳ, καὶ ἐὰν τάξωμεν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ διαφορᾶς. ἔστω ἀπὸ ς α ⋔ μ β γίνεται ὁ τετράγωνος. δ^υ α. μ δ. ⋔ ςς δ. ἴσος δ^υ α. ς α. μ α καὶ γίνεται ὁ ς γ^ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος νθ^κε, ὁ δεύτερος ριδ^κε. ὁ δὲ τρίτος σμς^κε. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM VI.

IN huius quæstionis propositione, habet codex manuscriptus. ὁ δὲ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε τὸν ὅλον, ποιῇ τετράγωνον, pro quo reposuimus, ἐάν τε λείψῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπόν, &c.

Porrò duplicem modum tangit Diophantus, soluendi quæstionem istam. Primus est addendo binarium tribus numeris præcedentem soluentibus, vbi nulla opus est operatione Algebræ. Secundus est per operationem Algebræ supponendo porisma quod ostendimus propositione decima septima libri secundi. Nimirum. Si sumantur duo quadrati, itemq; duplum summæ illorum & quadrati interualli laterum, fient tres numeri, quibus si addatur sigillatim duplũ quadrati interualli laterum, fient tres alij, quorum bini quem producent mutuo ductu, is, siue multetur amborum summa, siue reliquo, fiet quadratus. Vnde sanè operatio Diophanti manifestè pendet, sed & primus modus hinc suam mutuatur demonstrationem, vt luce clarius est.

Huc pertinet quæstio quam tradidit Vieta Zetetico duodecimo libri quinti. Quamuis eam imperfectè tractauerit, omittens alteram illius partem, eò quod Porismatum quæ demonstrauimus propositione decimasexta, & decimaseptima libri secundi perfectam cognitionem non habuit. Nos vniuersalissimè proponemus hoc pacto.

Inueniantur tres quadrati, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, additus ei qui fit ex quadrato dato, siue in amborum summam, siue in reliquum, conficiat quadratum.

Datus quadratus esto 9.

Ponatur primi latus 1 N secundi 1 N. + 3. erunt quadrati 1 Q. & 1 Q. + 6 N. + 9. & sit tertius duplum primi & secundi, & quadrati interualli laterum, seu ipsius 9 puta 4 Q. + 12 N. + 36. Constat ergo per decimamsextam secundi porismatum productũ ex binorum mutuo ductu adiecto producto ex quadrato 9. siue in amborum summam, siue in reliquum, facere quadratum. Restat vt tertius sit quadratus. Ergo 4 Q. + 12 N. + 36. æquandus est quadrato, cuius latus esto 2 N. + 4. fiet 1 N. 5. Erunt ergo quæsiti quadrati 25. 64. 196. & satisfaciunt proposito.

Rursus.

Inueniantur tres numeri, vt quiuis eorum multatus duplo dati quadrati, faciat quadratum, & productus ex binorum mutuo ductu, detracto eo qui fit ex dato quadrato, siue in summam amborum, siue in reliquum, relinquat quadratum.

Datus quadratus esto 9.

Si tribus per præcedentem inuentis quadratis addas duplum dati quadrati, puta 18. fient quæsiti numeri 43. 82. 214. qui satisfaciunt postulatis, vt constat ex decimaseptima secundi porismatum. Itaque non satis feliciter quæstiones istas explicauit Franciscus Vieta loco citato, cùm numerorum quos inuenit proprietates, penitus perspectas non habuerit.

QVÆSTIO VII.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τοὺς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν [τετραγώνους] ποιῇ συν-

Lemma ad id quod sequitur.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione addito vtriusque quadrato, summam fa-

ciat quadratum. Esto primus 1 N. secundus vnitatum quotlibet, puta 1. & est productus eorum multiplicatione 1 N. summa verò quadratorum est 1 Q. + 1. adde 1 N. fit 1 Q. + 1 N. + 1. æqualis quadrato. Esto latus eius 1 N. − 2. fit quadratus 1 Q. + 4. − 4 N. æqualis 1 Q. + 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. Ad positiones. erit primus $\frac{3}{5}$. secundus $\frac{5}{5}$. & abiecto denominatore, erit primus 3. secundus 5. & postularis respondent, nam productus eorum multiplicatione cum summa quadratorum, facit quadratum. Quotiescunque autem voles ternarium & quinarium sumere, facient numeri qui nascuntur, id quod iuberis.

θέσιν ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ πρῶτος ϛ α. ὁ δεύτερος μ ὅσων θέλεις. ἔστω μ α. καὶ γίνεται ὁ μὲν ὑπὸ αὐτῶν ϛ α. ὁ δὲ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυ α. μ α. μετὰ τοῦ ϛ α. γίνεται δυ α. ϛ α. μ α. ἴσον τετραγώνῳ. ἔστω δὴ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛ α. λείψει μ β. γίνεται ὁ τετράγωνος δυ α. μ δ. λείψει ϛϛ δ. ἴσον δυ α. ϛ α. μ α. καὶ γίνεται ὁ ϛ γ^ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ^ε. ὁ δὲ δεύτερος ε^ε. καὶ ἀρθέντος τοῦ μορίου. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ γ. ὁ δεύτερος ε. καὶ ποιοῦσι τὸ προκείμενον. ὁ γὰρ ὑπὸ αὐτῶν μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον. ὁσάκις δὲ ἐὰν θέλῃς τὸν γ. καὶ τὸν ε. ποιῆσαι, ποιήσουσιν οἱ γινόμενοι ἀριθμοὶ τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM VII.

Hic triplex varietas contingere potest. Primo enim posito altero 1 N. alter statui potest quotlibet vnitatum. Deinde primus etiam poni potest quilibet Numerorum numerus. Denique latus numeri quadrato æquandi diuersimodè fingi potest.

Restat probandum quod ait Diophantus, nimirum. Si dentur duo numeri quæstioni satisfacientes, duo alij quicunque in eadem ratione sumpti, soluent quæstionem.

A 3. B 5. F. 49.
C 9. E 15. D 25.

G 6. H 10. N 196.
K 36. L 60. M 100.

Sint A B propositum implentes, sint videlicet eorum quadrati C D. & productus multiplicationis E. & summa C E D. sit F. quadratus numerus. Tum sumantur G H in ratione ipsorum A B. & sint eorum quadrati K M, & productus L, & ipsorũ K L M. summa sit N. Dico N. esse quadratum. Quia enim vt constat ex constructione vndecimæ octaui est C ad E. & E ad D. sicut A ad B, & similiter est K ad L. & L ad M. sicut G ad H. cùm sit A ad B. vt G ad H ex hypothesi, erit & C ad E. & E ad D, sicut K ad L & L. ad M. & permutando erit C ad K. vt E ad L & vt D ad M.[1] Quare & antecedentium summa, puta F ad summam consequentium, puta ad N. est vt vnus antecedens C ad vnum consequentem K. Sed vterque C & K quadratus est. Ergo F ad N. rationem habet quadrati ad quadratum. Ac proinde cùm F sit quadratus[2] & N. quadratus erit. Quod demonstrandum erat.

[1] 12. septimi.
[2] 24. octaui.

Ex ipsa autem operatione formatur huiusmodi Canon,

Diuide quadratum quemlibet vnitate multatum, per duplum sui lateris vnitate auctum, duo numeri quicunque in ratione quotientis ad vnitatem, satisfacient proposito.

Cæterùm eadem arte soluetur hæc quæstio.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum, detracto producto relinquat quadratum.

Esto primus 1 N. secundus 1. fit productus 1 N. summa quadratorum 1 Q. + 1. vnde auferendo 1 N. manet 1 Q. + 1 − 1 N. æquandus quadrato. Esto latus 1 N. − 3. fit 1 N. $\frac{8}{5}$. est ergo primus $\frac{8}{5}$ secundus $\frac{5}{5}$. & abiecto denominatore, fit primus 8. secundus 5. & satisfaciunt postulatis. Hinc etiam elicietur iste Canon.

Diuide quadratum quemlibet vnitatem multatum, per duplum sui lateris vnitate multatum, quotiens ad vnitatem habebit rationem quæsitorum numerorum.

Vbi hoc animaduersione dignum occurrit, si sumantur duo numeri huic quæstioni satisfacientes, maior quoque illorum & eorum interuallum quæstionem soluunt. At minor illorum & interuallum, soluunt quæstionem Diophanti. Contrà, si duo numeri soluant quæstionem Diophanti, summa ipsorum, & alteruter eorundem, nostram hanc quæstionem soluunt. Sic sumptis 8. & 5. nostram quæstionem soluentibus (nam summa quadratorum detracto producto, facit quadratum 49.) maior 8. & interuallum 3. eandem soluunt quæstionem; nam rursus summa quadratorum detracto producto facit 49. At minor 5. & interuallum 3. soluunt quæstionem Diophanti, cùm summa quadratorum adsumpto producto, rursus faciat 49. Huius rei demonstratio, ab huiusmodi theoremate pendet.

Si numerus secetur in duas partes, quadrati partium, vnà cum producto multiplicationis earundem, æquantur quadratis à toto & à qualibet parte, multatis producto multiplicationis ex toto in eandem parté.

A.....B...C

Sit numerus A C. sectus in A B B C. dico quadratos ex A B. B C. vnà cum producto ex A B in B C. æquari quadratis ex A C. A B multatis producto ex A C in A B. Itéque quadratis ex A C. B C. multatis pro-
4. secundi ducto ex A C in B C. Quia enim quadratus ex A C. [a] æquatur quadratis ipsorum A B. B C. & duplo producti ex A B. in B C. addito quadrato ex A B. erit summa quadratorum ex A C. AB. æqualis quadrato ex A B. bis, ex B C semel, & duplo
3. secundi. producti ex A B in B C. At quadratus ex A B cum producto ex A B in B C. [a] æquatur producto ex A C in A B. Quare auferendo à summa quadratorum ex A C. AB. productum ex A C in A B, seu quod idem est, quadratum ex A B &. productum ex A B in B C, remanent quadrati ex A B. B C, vnà cum producto ex A B in B C. Eadem prorsus ratione ostendemus auferendo à quadratis ex A C. B C. productum ex A C in B C. remanere quadratos ex A B. B C. vnà cum producto ex A C. in B C. Igitur ex omni parte constat propositum.

QVÆSTIO VIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσα ἔχοντα τὰ ἐμβαδά. πρότερον δεῖ ζητῆσαι δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιῇ [τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται, καί εἰσι γ. καὶ ε. ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν, μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον] πλευρὰν ἔχοντα μονάδων ζ. συντάσσω τρία τρίγωνα ὀρθο-

INVENIRE tria triangula rectangula, quorum areæ sint æquales. Primùm oportet quærere duos numeros, vt productus corũ multiplicatione cum summa quadratorũ faciat quadratum. Hoc autem suprà ostensum est, & sunt 3. & 5. quorum mutuo ductu productus cum summa quadratorum facit quadrarum, cuius latus est 7. Compono ergo tria trian-

γώνια ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, ἀπό τε τοῦ ζ. καὶ τοῦ γ. καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ ζ. καὶ τοῦ ε. καὶ ἔτι ἀπὸ τοῦ ζ. καὶ τῆς συνθέσεως τῶν εὑρημένων ἀριθμῶν τοῦτε γ. καὶ τοῦ ε. τουτέστι η. ἀπὸ ἄρα τοῦ ζ. καὶ τοῦ η. ἔσται οὖν τὰ τρίγωνα. μ. μβ. νη. καὶ κδ. ο. οδ. καὶ ιε. ριβ. ριγ. καὶ ἔστι τὰ τρίγωνα ἴσα ἔχοντα ἐμβαδὰ ἀπὸ μ ωμ.

gula rectangula à duobus numeris, alterum à 7. & 3. alterum à 7. & 5. & præterea alterum à 7. & à summa inuentorum numerorum 3. & 5. hoc est à 8. Erunt igitur triangula 40. 42. 58. & 24. 70. 74. & 15. 112. 113. & sunt triangula, quorum eadem est area 840.

IN QVAESTIONEM VIII.

MAGNA hîc verborum iactura facta erat in textu Diophanti, vt bene animaduertit Xilander, nos eam resarcire conati sumus, verba reponentes quæ virgulis inclusa vides. Itaque nil superest difficultatis, nisi vt demonstretur trium triangulorum rectangulorum, modo quem tradit Diophantus inuentorum, æquales esse areas, quod præstabimus more nostro, si prius hoc veluti lemma præmiserimus.

Si duobus quadratis addatur sigillatim productus ex mutuo laterum ductu, erit compositorum eadem ratio, quæ & laterum ipsorum.

Sint quadrati A B. quorum latera C D. ex quorum mutuo ductu fiat G. Dico summam duorum A G. ad summam duorum G B se habere, vt C ad D. etenim vt constat ex vndecima octaui, A G B sunt continuè proportionales in ratione C ad D. Quare cùm sit A ad G. vt G ad B. erit & componendo summa duorum A G ad G. sicut summa duorum G B ad B. & permutando, erit summa duorum A G ad summam duorum G B. sicut G ad B. hoc est sicut C ad D. Quod erat demonstrandum.

A 9. G 12. B 16.
C 3. D 4.

Hoc posito sint numeri A B præcedẽti quæstioni satisfacientes; sint videlicet eorũ quadrati E F. & productus mutuo illorum ductu G. & sũma ipsorũ E F G. sit quadratus H. cuius latus C. summa verò ipsorum A B. sit D. cuius quadratus K. Tum vt vult Diophantus [1] formetur triangulum à numeris C A. sit videlicet hypotenusa L. summa quadratorum H E. & sit basis M. interuallum eorundem. & sit cathetus N duplum producti ex C in A. Similiter formetur triangulum à numeris C B. sitque hypotenusa P. summa quadratorum H F. At sit basis Q. interuallum eorundem. ac demum cathetus R sit duplum producti ex C in B. Rursus formetur triangulum à numeris C D. sitque hypotenusa S. summa quadratorum H K. sit basis T. interuallum eorundem. & sit cathetus V duplum producti ex C in D. Dico tria triangula L M N. P Q R. S T V. præstare quod requiritur, hoc est areas eorum æquales esse, seu productos ex M in N. ex Q. in R. & ex T in V æquales esse, sic enim sequitur areas æquales esse [2], cùm sint semisses huiusmodi productorum. Itaque quoniam idem C ductus bis in ipsos A B D. producit ipsos N R V. [3] erit N ad R. vt A ad B. & rursus R ad V. vt B ad D. Quoniam verò M est interuallum quadratorum H E. & H est summa ipsorum E F G. patet M æquari ipsis F G simul. Rursus quia Q. est interuallum quadratorum H F. patet Q. æquari ipsis E G. Est autem summa duorum E G ad summam duorum G F. sicut A ad B per Lemma assumptum. Igitur est Q ad M. sicut A ad B. Cùm ergo ostensum sit esse N ad R. vt A ad B. patet esse N ad R. vt Q. ad M. Quare [4] planus sub extremis N M. æquatur plano sub mediis R Q. ac proinde triangulorum L M N. P Q R. æquales sunt areæ. Præterea cùm ostensum sit Q æquari duobus E G. quadrato scilicet ipsius A. & producto ex A in B. [5] æquabitur idem Q, producto ex summa duorum A B, hoe est ex D in A.

	G 15.		
H 49.	E 9.	F 25.	K 64.
C 7.	A 3.	B 5.	D 8.
L 58.	M 40.	N 42.	
P 74.	Q. 24.	R 70.	
S 113.	T 15.	V 112.	

[1] 5. 3. porif.
[2] defin. 5. 3. porif.
[3] 17. septimi
[4] 19. septimi.
[5] 3. secundi.

4. secundi. Quoniam verò K est quadratus summæ ipsorum AB². patet K æquari ipsis EF & duplo G. Quare ex K auferendo H qui continet ipsos EF G semel, patet reliquum T æqualem esse ipsi G. ac proinde fieri ex A in B. Itaque cùm idem A ductus in B & in D. producat T & Q. erit T ad Q, vt B ad D. Sed vt B ad D sic
19. septimi. ostensum est esse R ad V. Igitur vt R ad V. sic T vt ad Q. Quare² rursus qui continetur sub extremis R Q. æquatur contento sub mediis V T. vnde sequitur triangulorum PQR. STV æquales esse areas, ac per consequens tria exposita triangula eandem prorsus aream habere. Quod erat demonstrandum.

QVÆSTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετραγώνου, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον. παντὸς δὲ τριγώνου ὀρθογωνίου ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ τετράκις τὸ ἐμβαδὸν ἐάν τε λείψῃ ποιεῖ τετράγωνον. οἱ ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ ἔσονται ὀρθογωνίου τριγώνου ὑποτείνουσαι, ὁ δὲ ἐκ τῶν τριῶν συγκείμενος ἔσται τέσσαρα ἐμβαδὰ τριγώνων, ὧν εἰσὶν αἱ ὑποτείνουσαι. ἀπῆκται οὖν μοι ζητῆσαι [τρία] τρίγωνα ἴσα [ἔχοντα] ἐμβαδά. τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶ τὰ τρίγωνα μ. μβ. νη. καὶ κδ. ο. οδ. καὶ ιε. ριβ. ριγ. νῦν τάσσω ἐλθὼν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς τοὺς τρεῖς ἐν ἀριθμοῖς, τῶν ὑποτεινουσῶν τῶν τριγώνων, καὶ ἔσται ὁ πρῶτος ςς νη. ὁ δὲ δεύτερος ςς οδ. ὁ τρίτος ςς ριγ. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἐν δυνάμεσι τοῦ τετραπλασίονος τοῦ ἐμβαδοῦ. δυνάμεις ἄρα ͵γτξ. ἴσαι ςς σμε. καὶ γίνεται ὁ ς ζ ϟϛ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος υϛ ϟϛ. ὁ δὲ δεύτερος φιη ϟϛ. ὁ δὲ τρίτος ψϙα ϟϛ.

INVENIRE tres numeros, vt vniuscuiusque quadratus, summa trium siue addita, siue detracta, faciat quadratum. Quoniam volumus vt quadratus primi, summa trium siue addita, siue dempta, faciat quadratum. In omni autem triangulo rectangulo, quadratus hypotenusæ, siue adiecto quadruplo areæ, siue detracto, facit quadratum. Erunt vtique tres numeri, hypotenusæ triangulorum rectangulorum, at summa trium erit quadruplum areæ triangulorum, quorum hypotenusæ sunt ipsi numeri. Eò itaque res redit, vt tria triangula inueniantur, quorum eadem sit area. Id autem iam demonstratum est, & sunt triangula 40. 42. 58. & 24. 70. 74. & 15. 112. 113. Nunc ad propositum ab initio rediens, statuo tres in numeris hypotenusarum triangulorum, & erit primus 58 N. secundus 74 N. tertius 113 N. summam verò trium, pono in quadratis quadrupli areæ. Proinde 3360 Q. æquantur 245 N. & fit 1 N. $\frac{7}{96}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{406}{96}$ secundus $\frac{518}{96}$. tertius $\frac{791}{96}$.

IN QVAESTIONEM VIIII.

EX dictis ad præcedentem facilis redditur hæc quæstio. Quod assumitur de quadrato hypotenusæ trianguli rectanguli, qui assumpto vel dempto quadruplo areæ, quadratum facit; iam à nobis demonstratum est ad vigesimam secundam tertij, vbi etiam vsurpatur à Diophanto.

QVÆSTIO X.

DATIS tribus numeris quadratis, possunt inueniri tres numeri, quorum bini quadratos istos producant alter in alterum ductus. Nam si sint dati quadrati 4. 9. & 16. & ponamus vnum quæsitorum 1 N. erit reliquorum duorum alter $\frac{4}{N}$. alter $\frac{9}{N}$. Restat vt productus ex secundo in tertium faciat 16. atqui productus ex secundo in tertium est $\frac{36}{Q}$. Hoc ergo æquatur 16. & fit 1 N. $1\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit primus $1\frac{1}{2}$. secūdus $2\frac{2}{3}$. tertius 6. sed vt hoc etiam methodo exponatur. Inueni $\frac{36}{Q}$. æqualia 16. & omnia per 1 Q multiplicando fiunt 16 Q. æquales 36. & fit 1 Q. $\frac{36}{16}$. cuius latus $\frac{6}{4}$. atqui 6. fit ex mutuo ductu laterum ipsorum 4. & 9. hoc est primi & secundi. Denominator verò 4. est latus alterius quadrati 16. Quamobrem cùm iussus fueris tres numeros inuenire, quorum bini mutuo ductu datos quadratos producant, vt 4. 9. 16. sume productum ex lateribus ipsorum 4. & 9. fit 6. hunc diuide per latus alterius quadrati 16. fit 1 N. $\frac{6}{4}$. Rursus diuide quadratum 4. per $\frac{6}{4}$. fiunt $\frac{16}{6}$. & rur-

ΤΡΙΩΝ τετραγώνων ἀποδοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τοὺς δοθέντας τετραγώνους ἀριθμούς. ἐὰν γὰρ ὦσιν οἱ δοθέντες τετράγωνοι. ὅ τε δ. καὶ ὁ θ. καὶ ὁ ις. καὶ τάξωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων ς α. ἔσονται οἱ λοιποὶ δύο, ὁ μὲν δ ςχ α. ὁ δὲ θ ςχ α. καὶ λοιπόν ἐστι τὸ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου ποιεῖν Μ ις. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου ἐστὶ λς δυχ α. ἴσος Μ ις. καὶ γίνεται ὁ ς Μ α. α β. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος α. α β. ὁ δὲ δεύτερος β. α γ. α ς. ὁ τρίτος ς. ἵνα δὲ καὶ ἐν μεθόδῳ κείμενον ᾖ. εὗρον λς δυχ α. ἴσα μονάσι ις. καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν μίαν γίνονται δυνάμεις ις. ἴσαι Μ λς. καὶ γίνεται [ἡ δύναμις] λς ις. οὗ πλευρὰ ὁ ς δ. ἀλλὰ τὰ ς. τὰ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ δ. καὶ τοῦ θ. τουτέστι τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου τὸ δὲ μόριον τουτέστι τὰ δ. πλευρά ἐστι τοῦ ις τετραγώνου. ὅταν οὖν σοι προβληθῇ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιεῖ τοὺς δοθέντας τετραγώνους. οἷον τὸν δ. καὶ τὸν θ. καὶ τὸν ις. ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ δ. καὶ τοῦ θ. γίνεται ς. μέρισον ταῦτα παρὰ τὴν πλευρὰν τοῦ ις τετραγώνου, γίνεται ὁ ς ς δ. νῦν πάλιν τὸν δ. τετράγωνον παρὰ τὸν ς δ. γίνονται Μ ις ς. καὶ πά-

λιν ⓜ θ. τετράγωνον παρὰ ⓜ ς^ς. γίνονται μ^ο ς. ἔσται ἄρα ὁ πρῶτος ς^ς. ὁ δεύτερος ις^ς. ὁ τρίτος μ^ο ς.

sum diuide quadratum 9. per $\frac{9}{6}$ fiunt 6. erit igitur primus $\frac{9}{6}$. secundus $\frac{16}{6}$. tertius 6.

IN QVAESTIONEM X.

OPERATIO Diophanti facilis est, & Canon quem tradit ab ea depromitur. Posset tamen breuius & facilius explicari Canon iste, hoc pacto.

Numeros quos producunt dati numeri, dum inter se bini & bini multiplicantur, diuide per reliquum; quotientum latera quæsitos exhibent numeros.

Vt in exemplo Diophanti productum ex 4. in 9. putà 36. Diuide per reliquum 16. fiet $\frac{9}{4}$. cuius latus $1\frac{1}{2}$ est vnus quæsitorum. Rursus productum ex 4. in 9. putà 64. diuide per reliquum 9 fit $\frac{64}{9}$. cuius latus $2\frac{2}{3}$. est secundus quæsitorum. Denique productum ex 9. in 16. putà 144. diuide per reliquum 4. fit 36. cuius latus, est tertius quæsitorum.

Porrò vniuersalius etiam proponi potest ipsa quæstio in hunc modum.

Datis tribus numeris, inuenire tres numeros, quorum bini inuicem ducti, datos producant numeros. Oportet autem solidum sub datis numeris contentum esse quadratum.

Sint dati 6. 8. 12. Ponatur primus 1 N. secundus $\frac{6}{1N}$. tertius $\frac{8}{1N}$. Restat vt ex secundo in tertium fiat 12. fit autem $\frac{48}{1Q}$ hoc ergo æquatur 12. & fit 1 N. 2. sunt igitur quæsiti numeri 2. 3. 4.

QVÆSTIO XI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάντε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάντε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ζητοῦμεν πρότερον τρία τρίγωνα ἴσα ἔχοντα τὰ ἐμβαδά. καὶ εὑρόντες λαμβάνομεν τοὺς ἀπὸ τῶν ὑποτεινουσῶν τετραγώνους. ἔστι δὲ ὁ μὲν ,γτξδ. ὁ δὲ ,ευος. ὁ δὲ α. ,βψξθ. καὶ ἔχοντες τούτους, εὑρίσκομεν ὡς προγέγραπται τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τοὺς δοθέντας τετραγώνους. ἔστω δὲ τοὺς κειμένους. τούτους δὲ ἐξεθέμεθα, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν τετραγώνων ἐάντε προσλάβῃ μονάδας ,γτξ. ἐάντε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ᾽ αἱ ,γτξ. μονάδες ὁ τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἑκάστου τοῦ τριγώνου. καὶ διὰ τοῦτο

INVENIRE tres numeros, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, omnium summa siue detracta quadratum faciat. Rursum primò quærantur tria triangula æquales areas habentia. Quibus inuentis sumemus quadratos hypotenusarum. Est autem primus 3364. secundus 5476. tertius 12769. Hos nacti, inueniemus, vt iam traditum est, tres numeros, vt producti ex binorum mutuo ductu faciant datos quadratos, qui sint ij quos exposuimus. Exposuimus autem istos, quia quiuis ipsorum siue addas ei, siue adimas 3360. facit quadratum. At 3360. est quadruplum areæ singulorum triangulorum. Ea propter nunc

in numeris pono primum [illegible]. N. secundum [illegible]. N. tertium [illegible] N^o. quotū bini inuicem ducti faciunt supradictos quadratos. Restat vt hi tres æquentur 3360 Q. & omnia vt vnius fiant denominationis, reducantur ad 121249. erit primus [illegible]. N. secundus [illegible]. N. tertius [illegible]. N. & fit trium summa [illegible] N. æqualis 3360 Q. & omnia in 121249. fiunt 32824806. N. æquales 407396640 Q. & fit 1 N. [illegible]. Ad positiones, erit primus.

τύπου τάσσω ἐν ςς^{οις}. ὃν μὲν ἀριθμῶν ͵δσϛβ ... ὃν ͵ζ * καὶ δ^ν. ͵γψλη. ὃν δὲ ζ. ͵αρπζ. καὶ ὁ ὑπὸ δύο αὐτῶν ποιεῖ τοὺς ἐπάνω τετραγώνους. λοιπὸν δεῖ τοὺς γ. ἰσῶσαι δυνάμεσι ͵γτξ. καὶ πάντα ἵνα ἐν μόριον γένηται βάλλομεν ε. ͵εψϛϛ. ὁ δὲ ὁ ς ςς ϛς. ηφη μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τρίτος ςς ϛβ. ͵ευλα. μορίου τοῦ αὐτοῦ. καὶ γίνονται οἱ τρεῖς ς^{οι} ͵αϡϛα. ͵ετια. μορίου ε. ͵εψϛϛ. ἴσοι δυνάμεσι ͵γτξ. καὶ πάντα εἰς ε. ͵εψϛϛ. καὶ γίνεται ὁ ς ͵αϡϛα. ͵ετια. ἴσος δ^ν α. ͵ηψμζ. ͵δφμξ. καὶ γίνεται ὁ ς μ^ο ͵αϡϛα. ͵ετιδ. μορίου β^ν μοριάδος α. καὶ α. ͵ηψμζ. καὶ μ^ο ͵δψξ. μορίου κοινοῦ ληφθέντος τινὸς, ὅπερ ἐστὶ ἀδύνατον. πρῶτοι γὰρ ἥμισυ ἄλλη εἰσὶν ςς^{οι}. ἔσται ὁ ς μ^ο ͵αϡϛα. ͵ετιδ. μορίου α. ͵ηψμζ. μ^ο φξε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος *.

IN QVAESTIONEM XI.

HÆC quæstio, vt bene monet Xilander, à duobus præcedentibus pendet omnino, & operatio Diophanti plana est, sed tota minutiarum tractatio in textu Græco scatet mendis. Quamobrem malui in mea versione rem subiicere per veros numeros modo nobis consueto, quàm in verbis & in numeris Diophanteis omni ex parte restituendis diutius animum torquere.

Porro quod deest in Diophanto (ipsa nimirum quæstionis solutio) sic à nobis supplebitur fit 1 N. [illegible]. seu in minimis [illegible]. Ad positiones erit primus [illegible]. secundus [illegible] tertius denique [illegible]. Vt autem proposito satisfaciant huiusmodi numeri, tu si vacat experire, nos ad ea quæ maioris sunt momenti interim progrediemur.

QVÆSTIO XII.

VNITATEM diuidere in duas partes, & vtrique segmento datum numerum adijcere, & facere quadratum. Oportet autem datum neque imparem esse, * neque duplum eius N. vnitas maiorem habere quadrantem quàm est numerus, quo ipsum metitur primus numerus. * Imperatum sit vt vtrique portioni adiungamus 6.

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο μέρη, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον μήτε περισσὸν εἶναι, * μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἢ μ^ο α. μείζονα ἔχῃ μέρος δ^ν. ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ α^{ου}. ς^{ου}. * ἐπιτετάχθω δὴ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι μ^ο ϛ.

καὶ ποιεῖν τετράγωνον ἀριθμόν. ἐπεὶ οὖν θέλομεν τὴν μονάδα τεμεῖν, καὶ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι μονάδας ϛ καὶ ποιεῖν τετράγωνον· τὸ ἄρα σύνθεμα τῶν τετραγώνων ἐστὶ Μο ιγ. δεήσει ἄρα ἀριθμὸν ιγ. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μείζων ᾖ Μο ϛ. ἐὰν οὖν ἀριθμὸν ιγ. διέλω εἰς δύο τετραγώνους, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος α. λύω τὸ ζητούμενον. λαμβάνω τῶν ιγ. τὸ ἥμισυ, γίνεται ϛ. α β. καὶ ζητῶ τι μόριον προσθεῖναι μονάσιν ϛ. α β. καὶ ποιεῖν τετράγωνον, καὶ πάντα τετράκις. ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς κϛ. μονάσιν καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον α δυ. καὶ γίνονται Μο κϛ. α δυ. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν. γίνονται δυνάμεις κϛ. Μο α. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς ε. Μο α. καὶ γίνεται ὁ ς Μο ι. δύναμις γὰρ Μο ρ. τὸ δυναμοστὸν Μο α ρ. ἔσται ἄρα τὸ ταῖς κϛ. προστιθέμενον α ρ. τὸ ἄρα ταῖς μονάσιν ϛ. α β. γίνεται α υ. καὶ ποιεῖ τετράγωνον ἀριθμὸν ἀπὸ πλευρᾶς να κ. δεῖ οὖν ἀριθμὸν ιγ. διαιρούμενον εἰς δύο τετραγώνους κατασκευάζειν τὴν ἑκάστου πλευρὰν ὡς ἔγγιστα να κ. καὶ ζητῶ τί ἡ τριὰς λείψασα, προσλαβοῦσα δυὰς ποιεῖ ἀριθμὸν αὐτῶν, τουτέστι να κ. τάσσω οὖν δύο τετραγώνους ἕνα μὲν ἀπὸ ςς ια. Μο β. ἀριθμὸν δὲ ἕτερον ἀπὸ Μο γ. λείψει ςς θ. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυνάμεις σβ. Μο ιγ. λείψει ςς ι. ἴσους Μο ιγ. καὶ γίνεται ὁ ς ε ρα. ἔσται ἄρα ἑνὸς τῶν τετραγώνων ἡ πλευρὰ σνζ ρα.

itáque efficiamus quadratum. Quia ergo volumus vnitatem secare, & vtrique segmento addere 6. & facere quadratum: summa duorum qui sic fient quadratorum erit 13. Oportet igitur diuidere 13. in duos quadratos, vt vterque ipsorum maior sit senario. Ergo si 13. diuidam in duos quadratos, quorum interuallum vnitate sit minus, soluo quæstionem. Sumo semissem de 13. qui est $6\frac{1}{2}$. & quæro quam partem possim ad $6\frac{1}{2}$. adiungere, ita vt quadratũ conficiam. Multiplico per 4. & quæro postmodum partem quadratã, quæ si ad 26. adijciatur faciat quadratum. sit pars apponenda $\frac{1}{Q}$. fiunt 26. $+\frac{1}{Q}$. æqualia quadrato, & si omnia per 1 Q. multiplicentur, fiunt 26 Q. + 1. æqualia quadrato, esto latus eius 5 N. + 1. & fit 1 N. 10. Quadratus ergo 100. Pars quadratica $\frac{1}{100}$. Proinde pars addenda ad 26. est $\frac{1}{100}$. Quare pars addenda ad $6\frac{1}{2}$. est $\frac{1}{400}$. & facit quadratum à latere $\frac{51}{20}$. Oportet igitur ita diuidere 13. in duos quadratos, vt vtriusque latus proximè accedat ad $\frac{51}{20}$. Et quæro quo numero ternarius multatus, & quo binarius auctus faciat supradictum numerum $\frac{51}{20}$. Statuo itáque duos quadratos, alterum à latere 11 N. + 2. alterum à latere 3 - 9 N. & fit summa quadratorum ab his ortorũ. 202 Q. + 13 - 10 N. æqualis 13. & fit 1 N. $\frac{5}{101}$. Erit igitur alterius quadrati latus $\frac{257}{101}$.

alterius

alterius verò [illegible] & si ab vtroque quadratorum inde factorum auferamus 6; erit alterum segmentum vnitatis [illegible]. alterum [illegible]. & liquet horum vtrumque adscito 6. facere quadratum.

ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου συν [illegible]. καὶ ἐὰν ἀπὸ ἑκατέρου τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ἀφέλωμεν μ° ϛ. ἔσται τὸ μὲν ἓν τμῆμα τῆς μονάδος ἐστὶν [illegible]. τὸ δὲ ἕτερον δωμγ [illegible]. καὶ δῆλον ὡς ἑκάτερος μετὰ μονάδων ϛ. ποιεῖ τετράγωνον.

IN QVAESTIONEM XII.

PVLCHERRIMVM problema, sed miserrimè affectũ, ita vt medicantis manum vix admittat, & cùm in eo enodando multùm desudauerit Xilander, id tamen quod potissimum est prætermisit, accurratam scilicet appositæ conditionis explicationem. Quàm enim sit necessaria conditionis huius cognitio, manifestum est ex eo quod in hypothesi Diophanti tota vis æquationis consistit in diuidendo numero 13. in duos quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 6. minor quàm 7. Nullibi autem traditus est modus diuidendi numerum aliquem in duos quadratos, nisi numerus ille sit quadratus, vel suapte natura ex duobus quadratis compositus. Itaque cùm euidens sit, ponendo latera quadratorum 11 N. + 2. & 3 − 9 N. æquationem succedere non posse nisi quadrati ipsorum 2. & 3. simul efficiant 13. Necesse est vtique 13. componi ex duobus quadratis. Atqui 13. est duplum dati numeri 6. vnitate auctum. Certum ergo est conditionem à Diophanto allatam requirere debere, vt duplum dati numeri vnitate auctum, sit quadratus numerus, vel compositus ex duobus quadratis. Quod etiam validè confirmatur verbis illis. *Oportet autem datum neque imparem esse.* Nam si datus numerus sit impar, nullo modo duplum eius vnitate auctum potest esse quadratus, vel compositus ex duobus quadratis, vt facile est demonstrare.

A . . . B . . . C. D

Sit enim numerus impar A B. cuius duplum esto A C. cui addita vnitate C D. fiat A D. dico primo A D. non esse quadratum. Si enim ponatur quadratus; cùm numero pari A C. addita vnitate CD, fiat A D. est A D impar. Ergo à quadrato impari A D, detracta vnitate C D [1] 21.1. *porif.*
reliquus A C est pariter par. [2] Quamobrem illius dimidium A B est numerus par, 8.1. *porif.*
contrà hypothesim. Rursus dico numerum A D non componi ex duobus quadratis. Etenim cùm A D ostensus sit, impar, necesse est è duobus quadratis ex quibus componi dicitur, alterum parem esse, alterum imparem. [3] At omnis quadratus par, 20. & 21.
est pariter par. Et ab omni quadrato impari auferendo vnitatem relinquitur pariter 1. *porif.*
par. Igitur à toto A D ablata vnitate, reliquus A C componetur ex duobus pariter paribus, [4] ac proinde A C. pariter par est. [5] Quamobrem illius dimidium A 16.1. *porif.*
B, par, est contrà hypothesim. 8.1. *porif.*

Reliqua verò verba *Neque duplum eius* &c. adeo vitiata sunt, vt nullam commodè recipere possint explicationem. Non dubito quidem Diophantum respexisse ad aliquam numerorum non vulgarem proprietatem, qua definitur quis numerus par deligendus sit, vt duplum eius vnitate auctum sit quadratus numerus, vel compositus ex duobus quadratis. Sed quid sibi velit in tanta verborum caligine diuinare non possunt. Id oneris relinquam illi qui in codicem aliquem emendatiorem inciderit. Sufficiat nobis appositissimam attulisse conditionem, cum qua necesse est conditionem Diophanti coincidere si rectè præscribatur. Sanè quod ait Xilander verba illa corrupta, videri velle, debere eum qui datur esse duplum numeri primi, id vtique futile est, & nulli fundamento nixum, quodque ipsa statim experientia refelli potest, nam si datus sit 10. is est duplus numeri primi 5. & tamen quæstioni soluendæ minimè reperitur idoneus, nam oporteret diuidere in duos quadratos numerum 21. Quod quidem impossibile est, vt reor, cùm is neque quadratus sit, neque suapte natura compositus ex duobus quadratis. Aliquando mihi venit in mentem Diophantum voluisse duplum dati numeri paris vnitate auctum esse numerum primum, quan-

doquidem omnes fere huiusmodi numeri componuntur ex duobus quadratis, quales sunt 5. 13. 17. 29. 41. aliique primi numeri qui sublata vnitate relinquunt numerum pariter parem. Veruntamen neque hæc explicatio sustineri potest. Nam primum hac ratione per huiusmodi cōditionem excluderentur omnes numeri, quorum duplum vnitate auctum est quadratus numerus, quos tamen aptissimos esse soluendæ quæstioni paret, quia quilibet quadratus diuidi potest in duos quadratos per octauam secundi; sed & infrà exemplo id comprobabimus. Deinde excluderentur etiam multi numeri, quorum duplum vnitate auctum componitur ex duobus quadratis, quales sunt 22. 58. 62. & alij innumerabiles. Nam dupli horum vnitate aucti sunt 45. 117. 125. quorū nullus est primus numerus, cùm quilibet multos habeat metientes; vnusquisque tamen è duobus quadratis conflatur, primus scilicet ex quadratis 36. & 9. secundus ex quadratis 81. & 36. tertius ex quadratis 100. & 25. Itaque satius erit conditionem à nobis allatā amplecti, donec aliquis ex emendatiore codice restituat Diophantum. Solùm hoc moneo in codice Vaticano, hæc verba sic haberi. *μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἀριθμὸν μονάδι α. μείζονα ἔχῃ μέρος τέταρτον, ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ.*

Porro quoniam operatio Diophanti subtilis est, & non vulgaris artificij, placet eam explicare, quoad potero breuiter & dilucidè. Primum itaque cùm 13. diuidendus sit in duos quadratos, quorum vterque maior sit senario, rectè quæritur pars quadrati quæ ad $6\frac{1}{2}$ addita faciat quadratum, sic enim diuidendo postmodum 13. in duos quadratos, quorum quilibet proximè accedat ad inuentum quadratum, satisfactum erit proposito, nam quilibet illorum non multùm distabit à $6\frac{1}{2}$. Reducit autem omnia ad integros more suo Diophantus, multiplicando $6\frac{1}{2}$ per 4. vnde fit 26. Nam inuenta parte quadratica quæ ad 26. addita quadratum faciat, illius vtique quarta pars addita ad $6\frac{1}{2}$ faciet quadratum. Ponitur ergo pars huiusmodi $\frac{1}{1Q}$. quia scilicet pars quadratica fit diuidendo vnitatem per aliquem quadratum; vnde sequitur 26 + $\frac{1}{1Q}$ æquari quadrato; vt autem rursus ad integros fiat reductio, ducuntur omnia in 1 Q. & fit 26 Q. + 1. æquandus quadrato; cuius latus ita fingendum est vt valor Numeri sit maior vnitate, si enim sit vnitate minor, patet $\frac{1}{1Q}$ fore plerumque maiorem vnitate, ac proinde non fore propriè partem quadraticam, vnde sequetur inuentum quadratum, tota vnitate, vel etiam maiore interuallo superaturum numerum $6\frac{1}{2}$. Verbi gratia si fingatur latus supradicti quadrati 1 N. + 1. erit quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. æqualis 26 Q. + 1. & fiet 1 N. $\frac{2}{25}$. Quare $\frac{1}{1Q}$ erit $\frac{625}{4}$. cuius quadrans $\frac{625}{16}$. additus ad $6\frac{1}{2}$. quadratum facit $\frac{729}{16}$. qui excedit ipsum $6\frac{1}{2}$ plus quàm 39. vnitatibus, ac proinde quæstioni soluendæ prorsus est inutilis. Igitur vt arte certa, non fortuitò fingatur huiusmodi latus, ita vt valor Numeri superet vnitatem, cùm fingi possit huiusmodi latus vel 1 + tot numeris, quorum quadratus sit minor quàm 26. vel 1 − tot numeris. quorum quadratus sit maior quàm 26. Primo modo fiet valor Numeri, auferendo quendam quadratum à 26. & per residuum diuidendo duplum lateris eiusdem quadrati. Vt ergo quotiens sit maior vnitate reperiendus est quadratus quo detracto à 26. relinquatur numerus minor duplo lateris eiusdem quadrati, ponatur is 1 Q. ergo 2 N. maior est quàm 26 − 1 Q. & tandem 1 Q. + 2 N. maior est quàm 26. Qua æquatione resoluta, fit 1 N. non minor quàm $4\frac{1}{5}$. Fingetur ergo latus quadrati 1 + tot numeris qui excedant $4\frac{1}{5}$ dum eorum quadratus sit minor quàm 26. sic Diophantus posuit hoc latus 1 + 5 N. & poni posset 1 + $4\frac{2}{5}$ N. vel 1 + $4\frac{3}{5}$ N. & sic aliis infinitis modis. Secundo verò modo fingendo latus quadrati, fiet valor Numeri, à quodam quadrato auferendo 26. & per residuum diuidendo duplum lateris. Quare vt fiat valor Numeri maior vnitate, posito illo quadrato 1 Q. erit 2 N. maior quàm 1 Q. − 26. & tandem 1 Q. maior erit quàm 2 N. + 26. Qua æquatione resoluta fit 1 N. minor quàm $6\frac{1}{5}$. fingetur ergo latus 1 − aliquot Numeris infrà $6\frac{1}{5}$ dum eorum quadratus excedat 26. Verbi gratia fingatur 1 − 6 N. fiet 1 N. $\frac{6}{5}$ & pars quadratica ad $6\frac{1}{2}$ adiicienda erit $\frac{25}{144}$. fietque quadratus $\frac{961}{144}$. à latere $\frac{31}{12}$. Vnde collige partem quadraticam hîc non sumi strictè pro fractione quadrata cuius numerator sit 1, Sed tantum pro fractione quadrata quæ minor sit vnitate, idest cuius numerator sit minor denominatore.

Inuenta porro parte quadratica $\frac{1}{400}$ quæ ad $6\frac{1}{2}$ addita facit quadratum $\frac{2601}{400}$ cuius latus $\frac{51}{20}$ rectè infert Diophantus numerum 13. ita diuidendum esse in duos quadratos, vt latus vtriusque proximè accedat ad $\frac{51}{20}$. sic enim vterque quadratus proximè accedet ad $6\frac{1}{2}$. Vt autem 13. diuidatur in duos quadratos per operationem decimæ secundi, debent sumi 2. & 3. latera quadratorum, ex quibus 13. suaptè natura componitur, & alteri addi oportet certum numerum Numerorum, ab altero detrahi. Vt ergo vtriusque quadrati latus adæquetur numero $\frac{51}{20}$. necesse est ad 2. addi $\frac{11}{20}$. & à 3. auferri $\frac{9}{20}$. Quare si 1 N. supponatur esse $\frac{1}{20}$. erit vtique 11 N. + 2. æqualis $\frac{51}{20}$. Itemque 3 − 9 N. Sic autem quadrati horum laterum æquari deberent $13\frac{1}{200}$. Quare si æquentur ipsi 13. fiet vtique 1 N. paulò minor quàm $\frac{1}{20}$. ac proinde 11 N. & 9 N. paulò minus erunt quàm $\frac{11}{20}$ & $\frac{9}{20}$. vnde sequetur vtrumque latus non multùm distare posse à $\frac{51}{20}$. ac per consequens vtrumque quadratum fore proximum numero $6\frac{1}{2}$ atque adeo proposito ritè satisfacturum. Hinc satis colligitur, quod suprà diximus, in conditionis explicatione nimirum, fuisse necessarium numerum 13. componi ex duobus quadratis. Qua de causa res etiam optimè succedet, si datus numerus talis sit, vt eius duplum vnitate auctum sit quadratus numerus, quandoquidem omnis quadratus in duos quadratos potest diuidi per octauam secundi.

Hoc autem vt manifestius fiat, & simul artificium Diophanti magis illustretur; talis quæstio proponatur. *Vnitatem secare in duas partes, vt vtrique addendo 4. fiat quadratus.* Patet numerum 9. diuidendum esse in duos quadratos, quorum interuallum sit vnitate minus, hoc est tales vt vterque superet 4. Quare sumendo semissem ipsius 9. puta $4\frac{1}{2}$. quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum, & ducendo in 4. fit 18. Positáque parte quadrati $\frac{1}{1Q}$. fit 18 + $\frac{1}{1Q}$. æquandus quadrato, & omnia ducendo in 1 Q. fit 18 Q. + 1. æquandus quadrato, esto latus 4 N. + 1. fiet 1 N. 4. Igitur $\frac{1}{1Q}$ est $\frac{1}{16}$. cuius quadrans, puta $\frac{1}{64}$ additus ad $4\frac{1}{2}$ facit quadratum $\frac{289}{64}$. cuius latus $\frac{17}{8}$. Quare 9. ita diuidendus est in duos quadratos, vt vtriusque latus adæquetur ipsi $\frac{17}{8}$. Diuiditur autem 9. in duos quadratos per octauam secundi, putà in $\frac{81}{25}$ & $\frac{144}{25}$. quorum latera $\frac{9}{5}$ & $\frac{12}{5}$. Video ergo quid addendum sit ad $\frac{9}{5}$. & quid detrahendum à $\frac{12}{5}$. vt fiant $\frac{17}{8}$. & inuenio hinc $\frac{13}{40}$. inde $\frac{11}{40}$. Quare fingo quadratorum latera $\frac{9}{5}$ + 13 N. & $\frac{12}{5}$ − 11 N. fitque summa quadratorum 290 Q. + 9 − 6 N. æqualis 9. vnde fit 1 N. $\frac{3}{145}$. suntque latera quadratorum $\frac{60}{29}$. $\frac{63}{29}$. ipsi quadrati $\frac{3600}{841}$ & $\frac{3969}{841}$. vnde si auferas sigillatim 4. supersunt quæsitæ partes vnitatis $\frac{236}{841}$ & $\frac{605}{841}$.

Possèm etiam in huiusmodi quæstione artificium imitari decimæ tertiæ sequentis, hoc pacto. Ponatur alter quadratorum 1 Q. erit alter 9 − 1 Q. qui æquari debet quadrato, ita tamen vt 1 Q. inueniatur maior quàm 4. minor quàm 5. Sumantur ergo duo quadrati inter 4. & 5. quales sunt $\frac{441}{100}$ & $\frac{484}{100}$ quorum latera $\frac{21}{10}$ & $\frac{22}{10}$. Quare curandum vt valor numeri cadat inter $\frac{21}{10}$ & $\frac{22}{10}$. fit autem valor Numeri, diuidendo sextuplum alicuius numeri per quadratum ipsius vnitate auctum. Oportet igitur $\frac{6\ N.}{1Q. + 1}$. maiorem esse quàm $\frac{21}{10}$ minorem quàm $\frac{22}{10}$. & tandem 60 N. maiores sunt quàm 21 Q. + 21. minores quàm 22 Q. + 22. Et vtraque æquatione per approximationem resoluta, fit 1 N. maior quàm $\frac{55}{24}$. minor quàm $\frac{22}{9}$ ponatur ergo $2\frac{1}{3}$. & quadrati 9 − 1 Q. latus statuatur 3 − $2\frac{1}{3}$ N. fiet 1 N. $\frac{63}{29}$. & erunt quadratorum latera $\frac{63}{29}$ & $\frac{60}{29}$. ipsi quadrati $\frac{3969}{841}$ & $\frac{3600}{841}$ à quibus auferendo sigillatim 4. remanent quæsitæ partes vnitatis $\frac{605}{841}$ & $\frac{236}{841}$. vt suprà.

Animaduersione quoque dignum est, eodem prorsus artificio Nnmerum quemlibet ita diuidi posse in duas partes, vt vtrique adiiciendo eundem datum numerum, fiat quadratus, dummodo duplum addititij numeri adsumens numerum diuidendum, faciat quadratum, vel numerum è duobus quadratis compositum. Verbi gratia. Sit diuidendus 2. in duas partes, vt vtrique adiiciendo 4. fiat quadratus. Patet numerum 10. diuidendum esse in duos quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 4. sumo ergo semissem de 10. puta 5. & quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum, ponatur $\frac{1}{1Q}$ ergo 5 + $\frac{1}{1Q}$ æquatur quadrato, & omnia per 1 Q. multiplicando, fit 5 Q. + 1. æquandus quadrato. Esto latus illius 1 + 2 N. fit 1 N. 4. est ergo pars quadrati $\frac{1}{16}$ qua addita ad 5. fit quadratus

$\frac{81}{16}$. cuius latus $\frac{9}{4}$. Diuidendus ergo est 10. in duos quadratos, quorum latera proximè accedunt ad $\frac{9}{4}$. Diuiditur autem 10. suaptè natura in quadratos, quorum latera sunt 1. & 3. Quare imitando artificium Diophanti fingemus latera quæsitorum quadratorum $1 + 5$ N. & $3 - 3$ N. fiet summa quadratorum $10 + 34$ Q. $- 8$ N. æqualis 10. & fiet 1 N. $\frac{4}{17}$. Sunt igitur quadratorum latera $\frac{37}{17}$. & $\frac{39}{17}$. ipsi quadrati $\frac{1369}{289}$. & $\frac{1521}{289}$. à quibus si auferas 4. sigillatim, restant quæsitæ binarii partes $\frac{213}{289}$. & $\frac{365}{289}$.

Denique, non dissimulandum eadem arte solui quæstionem quam tradidit Vieta Zetetico 5. lib. quarti nimirum.

Datum numerum ex duobus quadratis compositum, rursus diuidere in duos quadratos, quorum alter consistat intra limites præstitutos.

Sit diuidendus 5. in duos quadratos, quorum alter sit maior quàm 1. minor quàm 2. sumo medium in arithmetica medietate inter 1. & 2. puta $1\frac{1}{2}$. & quæro quæ pars quadrati illi addita, quadratum faciat, inuenietur modo suprà tradito $\frac{1}{16}$. fitque quadratus $\frac{25}{16}$. cuius latus $\frac{5}{4}$. Ita ergo fingendum erit latus præfiniti quadrati vt accedat ad $\frac{5}{4}$. Quoniam verò volumus ita diuidere 5. in duos quadratos, vt alter proximè accedat ad $1\frac{1}{2}$. & detracto $1\frac{1}{2}$. ab ipso 5. superest $3\frac{1}{2}$. euidens est alterum quadratum accedere debere ad $3\frac{1}{2}$. Rursus ergo quæro quæ pars quadrati ad $3\frac{1}{2}$. addita, faciat quadratum, ea inuenietur modo tradito $\frac{1}{64}$. fitque quadratus $\frac{225}{64}$. à latere $\frac{15}{8}$. Itaque diuidendus est 5. in duos quadratos, ita vt huius latus adæquetur $\frac{5}{4}$. seu $\frac{10}{8}$. alterius verò $\frac{15}{8}$. Sunt autem latera quadratorum ex quibus 5. suapte natura componitur 1. & 2. Quare cùm vnitati desint $\frac{7}{8}$. quominus æquet $\frac{15}{8}$. & binarius superest $\frac{10}{8}$. interuallo $\frac{6}{8}$. fingo quadratorum latera $1 + 7$N. & $2 - 6$N. estque quadratorum summa $5 + 85$ Q. $- 10$ N. æqualis 5. & fit 1 N. $\frac{2}{17}$. suntque latera quadratorum $\frac{31}{17}$. & $\frac{22}{17}$. ipsi quadrati $\frac{961}{289}$. & $\frac{484}{289}$. quorum summa 5. & alter puta $\frac{484}{289}$. maior est vnitate, minor binario vt postulabatur.

Rursus diuidendus esto 20. in duos quadratos quorum alter maior sit quàm 6. minor quàm 10. sumo medium arithmeticè inter 6. & 10. puta 8. & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{36}$. fitque quadratus $\frac{289}{36}$. à latere $\frac{17}{6}$. Quia verò detrahendo 8. ab ipso 20. superest 12. Quæro rursus partem quadrati quæ ad 12. addita, faciat quadratum, ea est $\frac{1}{4}$. fitque quadratus $\frac{49}{4}$. cuius latus $\frac{7}{2}$. Itaque diuidendus est 20. in duos quadratus, ita vt vnius latus accedat ad $\frac{17}{6}$. alterius verò latus adæquetur $\frac{7}{2}$. seu $\frac{21}{6}$. Componitur autem 20. ex duobus quadratus suaptè natura, quorum latera 2. & 4. Quare cùm ipsi 2. desint $\frac{9}{6}$. quominus æquet $\frac{21}{6}$. & ipse 4. superet $\frac{17}{6}$. interuallo $\frac{7}{6}$. fingo quadratorum latera $2 + 9$N. & $4 - 7$ N. estque summa quadratorum $20 + 130$ Q. $- 20$ N. æqualis 20. & fit 1 N. $\frac{2}{13}$. sunt igitur quadratorum latera $\frac{44}{13}$. & $\frac{38}{13}$. ipsi quadrati $\frac{1936}{169}$. & $\frac{1444}{169}$. quorum summa 20. & alter, puta $\frac{1444}{169}$. maior est quàm $\frac{1014}{169}$. seu quàm 6. & minor quàm $\frac{1690}{169}$. seu quàm 10. vt postulabatur. Soluit hoc problema Franciscus Vieta loco citato, alia methodo, sibique peculiari: sed cùm ea, non sit ista melior, immò sit longè difficilior, non est cur eam explicandi laborem assumamus.

QVÆSTIO XIII.

δ α γ β ε

ΜΟΝΑΔΑ τεμεῖν καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων, ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα ἀ-

D A G B E

VNITATEM secare, & adiicere vtrique segmento alium atque alium datum nume-

rum, itáque quadratum conficere. Imperatum sit vt vnitas secetur, & adiiciatur alteri segmento 2. alteri 6. vt fiat vtrimque quadratus. Exponatur vnitas A B. & secetur in G. & ipsi A G. adijciatur binarius A D. At ipsi G B. addatur senarius B E. vterque igitur ipsorum G D. G E. est quadratus. Et quia A B. est vnitas. At summa duorum A D. B E. est 8. Totus vrique D E erit 9. Et hunc oportet diuidere in duos quadratos, nempè in ipsos G D. G E. Sed quoniam quadratorum alter maior est binario A D. & minor ternario D B. eò res rediit vt datum quadratum 9. diuidam in duos quadratos, nempè ipsos G D. G E. vt alter ipsorum G D. cadat medius inter binarium, & ternarium. Nam inuento ipso G D. cùm A D. binarius sit, dabitur etiam reliquus A G. Est autem A B. vnitas. Quamobrem & reliquus B G. datus erit, sed & dabitur G. in quo secanda est vnitas. Iam descriptionis ductum sic exequamur. Esto alter quadratorum, is qui inter 2. & 3. cadere debet 1 Q. alter ergo erit 9. − 1 Q. æquandus quadrato. Et quidem hunc æquare quadrato facile est, sed oportet talem inueniri 1 Q. vt cadat inter 2. & 3. Sumamus duos quadratos, alterum maiorem quàm 2. alterum minorem quàm 3. sunt autem $\frac{289}{144}$. & $\frac{361}{144}$.

ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ μονάδα τεμεῖν καὶ προσθεῖναι ᾧ μὲν μ° β. ᾧ δὲ μ° ς. καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον. ἐκκείσθω μονὰς ἡ αβ. καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ. καὶ τῷ μὲν αγ. προσκείσθω δυὰς ἡ αδ. τῷ δὲ γβ. ἑξὰς ἡ βε. ἑκάτερος ἄρα τῶν γδ. γε. ἐστὶ τετράγωνος. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν αβ. ἐστι μονὰς α. συναμφότερος δὲ ὁ αδ. βε. ὀκτάς. ὅλος ἄρα ὁ δε. γίνεται μ° θ. καὶ ταύτας χρὴ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους τοὺς γδ. γε. ἀλλ' ἐπεὶ εἷς τῶν τετραγώνων τοῦ μὲν αδ. ἐστι μείζων, τουτέστι δυάδος. τοῦ δὲ βδ. ἐστιν ἐλάσσων, τουτέστι τριάδος. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ ἐπιταχθέντα τετράγωνον, οἱονεὶ τὸν θ. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους τοὺς γδ. γε. ὥστε ἕνα τὸν γδ. εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῆς τε δυάδος καὶ τῆς τριάδος. εὑρεθέντος γὰρ τοῦ γδ. δοθεὶς ὢν ὁ αδ. ἐστὶ δυάς. λοιπὸς ἄρα ὁ αγ. δοθείς. ἔστι δὲ ὁ αβ. μονὰς α. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ βγ. ἐστὶ δοθείς. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ γ. καθ' ὃ τέμνεται ἡ μονάς, ἡ δὲ ἀγωγὴ ὑπογραφῆς. ἔστω γὰρ ὁ εἷς τῶν τετραγώνων μεταξύ τε δυάδος, καὶ τῆς τριάδος δυνάμεως α. ὁ ἄρα λοιπὸς ἔσται μονάδες θ. λείψει δυνάμεως α. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ποιεῖν ῥᾴδιόν ἐστι, δεῖ δὲ εὑρεῖν τὴν δύναμιν μεταξὺ τοῦ τε β. καὶ τοῦ γ. λαμβάνομεν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν μείζονα τοῦ β. τὸν δὲ ἕτερον ἐλάσσονα τοῦ γ. εἰσὶ δὲ τὰ σπθ ρμδ. καὶ τξα ρμδ.

ἐὰν οὖν τὴν δύναμιν κατασκευάσωμεν ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν προειρημένων δύο τετραγώνων, λύσομεν τὸ ζητούμενον. δεῖ οὖν καὶ τὴν πλευρὰν δ^υ ᾱ, τουτέστιν ς^ο ᾱ, μείζονα μὲν εἶναι ιζ^{ιβ}, ἐλάσσονα δὲ ιθ^{ιβ}. ὥστε δεῖ ζητεῖν τὰς μ^ο θ ⋔ δ^υ ᾱ ἴσον τετραγώνῳ, εὑρεῖν τὸν ς^ο μείζονα μὲν μ^ο ιζ^{ιβ}, ἐλάσσονα δὲ ιθ^{ιβ}. ἐὰν δὲ μ^ο θ ⋔ δ^υ ᾱ ποιῶμεν ἴσας τετραγώνῳ, πλάσσομεν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ μ^ο γ λείψει ςς^{ῶν} τινῶν, καὶ εὑρίσκομεν τὸν ς^ο γινόμενον ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑξάκις γενομένου, καὶ μεριζομένου εἰς τὸν μονάδι μιᾷ μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν ὃς ἑξάκις γενόμενος, καὶ παραβληθεὶς εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, τὴν παραβολὴν ποιῇ μείζονα μὲν ιζ^{ιβ}, ἐλάσσονα δὲ ιθ^{ιβ}. [ἔστω ὁ ζητούμενος ς^ο ᾱ. θέλω ἄρα ςς^{οὺς} ς̄ παραβληθέντας εἰς δ^υ ᾱ μ^ο ᾱ ποιεῖν τὴν παραβολὴν μείζονα μὲν ιζ^{ιβ}, ἐλάσσονα δὲ ιθ^{ιβ}.] ἀλλὰ καὶ ὁ ιζ παραβληθεὶς παρὰ τὸν ιβ τὴν παραβολὴν ποιεῖ ιζ^{ιβ}. ὥστε δὴ ςς^{οὺς} ς̄ πρὸς δ^υ ᾱ μ^ο ᾱ μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ιζ πρὸς ιβ. τὸ ἄρα ὑπὸ ςς ς καὶ μ^ο ιβ, τουτέστι ςς^{οὶ} οβ, ὀφείλει μεῖζον εἶναι [τοῦ ὑπὸ δυνάμεως ᾱ μ^ο ᾱ καὶ ιζ, τουτέστι δυνάμεων ιζ μ^ο ιζ.] τῶν ςς τοῦ ἡμίσεως ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται ͵ασϟς. ἄφελε τὰς δυνάμεις ἐπὶ τὰς μονάδας, τουτέστι σπθ. λοιπὸν ἄρα ͵αζ. τούτων πλευρὰ οὐ μείζων λα. πρόσθες τὸ ἥμισυ τῶν ςς γίνεται οὐ

Iam si 1 Q. ita adornemus vt inter hos duos quadratos incidat, soluemus quæstionem. Oportebit ergo latus etiam 1 Q. hoc est 1 N. maius esse quàm $\frac{17}{12}$. minus verò quàm $\frac{19}{12}$. Oportet igitur 9 − 1 Q. æquantes quadrato, inuenire 1 N. maiorem quàm $\frac{17}{12}$. minorem quàm $\frac{19}{12}$. Quod si 9 − 1 Q. æqualem quadrato statuamus, fingemus quadrati latus à 3. cum defectu aliquot numerorum, & inueniemus 1 N. fieri ex aliquo numero sexies sumpto, & diuiso per quadratum ipsius vnitate auctum. Eò itaque sum redactus vt inueniam aliquem numerum, qui sexies sumptus, & diuisus per quadratum ipsius vnitate auctum quotientem faciat maiorem quàm $\frac{17}{12}$. minorem quàm $\frac{19}{12}$. Esto qui quæritur 1 N. Volo ergo vt 6 N. diuisi per 1 Q. + 1. quotientem faciant maiorem quàm $\frac{17}{12}$. minorem quàm $\frac{19}{12}$. Sed & 17. diuisus per 12. quotientem facit $\frac{17}{12}$. Oportet itaque 6 N. ad 1 Q. + 1. maiorem habere rationem quàm quæ est 17. ad 12. productus ergo ex 6 N. in 12. hoc est 72 N. maior esse debet producto ex 1 Q. + 1. in 17. hoc est 17 Q. + 17. Numerorum semissis in se ducatur, fit 1296. aufer productum ex quadratis in vnitates, hoc est 289. relinquitur 1007. huius latus non maius 31. adde dimidium numerorum, fit

non maius 67. diuide per multitudinem quadratorum fit 1 N. $\frac{67}{12}$. Similiter quandoquidem oportet 6 N. ad 1 Q. + 1. minorem rationem habere quàm quæ est 19. ad 12. Inueniemus 1 N. non minorem $\frac{66}{19}$. sed & non maior inuentus est $\frac{67}{12}$. esto igitur $3\frac{1}{2}$. formo ergo quadratum à latere 3 − $3\frac{1}{2}$. N. & fit $12\frac{1}{4}$. Q. + 9 − 21 N. Hęc æquantur 9 − 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{84}{53}$. Quadratus verò $\frac{7056}{2809}$. & si hinc auferamus binarium, erit alterum segmentum vnitatis $\frac{1438}{2809}$. alterum $\frac{1371}{2809}$. Et postulatis satisfit.

μείζων ξζ. παράβαλε παρὰ τὸ πλῆθος τῶν δυνάμεων, γίνεται ὁ ς ὁ ξζ^ιβ. καὶ ὁμοίως ἐπεὶ δεήσει ςς ς. πρὸς Δ^Υ α Μ α. ἐλάσσονα λόγον ἔχειν [ἤπερ ιθ πρὸς ιβ.] εὑρήσομεν τὸν ςς οὐκ ἐλάσσονα ξς^ιθ. ἀλλὰ καὶ οὐ μείζονα ξζ^ιβ. ἔστω Μ γ. α^β. πλάσσω οὖν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἀπὸ Μ γ λείψει ςς γ. α^β. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος Δ^Υ ιβ. α^δ. Μ θ ⋔ ςς κα. ταῦτα ἴσα Μ θ ⋔ Δ^Υ α. ὅθεν ὁ ς πδ^νγ. ἡ δὲ [δύναμις] ͵ζνς^͵βωθ. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν τὴν δυάδα. ἔσται ἓν τμῆμα τῆς μονάδος ͵αυλη^͵βωθ. ὥστε τὸ ἕτερον ἔσται ͵ατοα^͵βωθ. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM XIII.

SATIS accuratè quæstionem hanc explicauit Xilander, multa tamen prætermisit notatu digna, quæ vt sigillatim persequamur. Aduerte primò necessariam à Diophanto hîc omissam esse conditionem. Certum est enim numerum 9 − 1 Q. æquari non potuisse quadrato, nisi 9. quadratus fuisset. Quare cùm 9. factus sit addita vnitate ad 8. summam adiciendorum numerorum 2. & 6. euidens est huiusmodi conditionem præscribi debere. *Oportet autem summam adiiciendorum numerorum conficere quadratum vnitate auctam.* Moneo tamen sic esse concipiendam conditionem, si non aliter quàm per operationem Diophanti soluenda sit quæstio. Cùm enim, vt infrà commonstrabimus, quæstio æquè bene solui possit, dum summa numerorum additiorum vnitate aucta conficiat numerum ex duobus quadratis compositum, poterit vniuersalius proponi conditio, nimirum sic. *Oportet autem summam adiiciendorum numerorum vnitate auctam conficere quadratum, vel numerum ex duobus quadratis compositum.*

Aduerte secundò in codice manu exarato deesse diagramma descriptionis Diophantææ quod nos restituimus, cùm absque illo non possint intelligi Græca authoris verba. Cæterùm absque huiusmodi descriptione res facilius & breuius explicari potest, hoc modo. Cùm ad 2. addendo partem vnitatis debeat fieri quadratus, & ad 6. addendo residuum vnitatis conficiendus sit aliter quadratus, patet summam quadratorum fore 9. Quare 9. diuidendus est in duos quadratos, quorum alter cadat inter 2. & 3. alter inter 6. & 7. consistat. Vnde duplici via perueniri potest ad æquationem. Sicut enim Diophantus, eum qui inter 2. & 3. cadere debet, posuit 1 Q. alterum 9 − Q. sic ille qui inter 6. & 7. consistere debet, poni potest 1 Q. alter 9 − 1 Q. & similis prorsus erit operatio. Certum est autem hisce quadratis inuentis solui quæstionem, nam si ab altero auferatur 2. ab altero 6. remanebunt quæsitæ partes vnitatis.

Aduerte tertiò vt inueniat Diophantus quadratum maiorem quàm 2. minorem quàm 3. rectè sumere duos quadratos qui cadant inter 2. & 3. quales sunt $\frac{289}{144}$ & $\frac{361}{144}$. si enim euremus vt 1 Q. cadat inter hosce duos quadratos, euidens est eum fore maiorem quàm 2. minorem quàm 3. est autem facile duos quadratos reperire qui

cadant inter 2. & 3. id enim fiet, si sumatur quilibet quadratus, inter cuius duplum & triplum cadant duo quadrati. Vt si sumas 36. cuius duplum 72. triplum 108. cùm inter 72. & 108. cadant duo quadrati 81. & 100. his subscribendo denominatorem 36. fient quadrati quæsiti $\frac{81}{36}$. & $\frac{100}{36}$. Quare si per hos soluere velis quæstionem curandum erit, vt valor Numeri cadat inter $\frac{9}{6}$ & $\frac{10}{6}$.

Denique aduerte vt fiat valor Numeri maior quàm $\frac{17}{12}$ minor quàm $\frac{19}{12}$. Diophantum vti artificio, quo iam sæpè in simili vsus est. Quia enim 9 − 1 Q. quadrato æquandus est, fiet valor Numeri, fingendo latus 3 − aliquot numeris, quorum sextuplum diuidetur per eorum quadratum vnitate auctum. Quærendus ergo Numerus cuius sextuplo per quadratum ipsius numeri diuiso fiat quotiens maior quàm $\frac{17}{12}$ minor quàm $\frac{19}{12}$. Posito ergo huiusmodi numero 1 N. fiet $\frac{6 N}{1 Q + 1}$ maior quàm $\frac{17}{12}$. minor quàm $\frac{19}{12}$. & omnia per denominatores 1 Q. + 1. & 12. multiplicando, fient 72 N. maiores quàm 17 Q. + 17. minores quam 19 Q. + 19. Proinde vtraque æquatione per approximationem resoluta, fiet 1 N. maior quàm $\frac{66}{19}$ minor quàm $\frac{66}{17}$. Quare sumetur numerus aliquis intermedius, puta 3 $\frac{1}{2}$ & fingetur numeri 9 − 1 Q. latus 3 − 3 $\frac{1}{2}$ N. & cætera sunt manifesta.

Porro Diophanti operatio eatenus locum habet, quatenus adiiciendorum numerorum summa vnitate aucta quadratum facit. Sed si huiusmodi summa vnitate aucta, conficiat numerum ex duobus quadratis compositum, aliter operandum erit, imitando scilicet artificium eius quam ad præcedentem attulimus ex Vieta. Verbi gratia. Diuidenda sit vnitas in duas partes, vt alteri addendo 2. alteri 7. fiat vtrimque quadratus. Euidens est numerum 10. diuidendum esse in duos quadratos, quorum alter cadat inter 2. & 3. Alter verò inter 7. & 8. Cùm ergo addendo semissem vnitatis vtrique datorum numerorum fiant 2 $\frac{1}{2}$. & 7 $\frac{1}{2}$. Quærendi sunt quadrati qui ad hos numeros accedant. Quæro ergo quæ pars quadrati addita ad 2 $\frac{1}{2}$. faciat quadratum, ea reperietur $\frac{1}{144}$ fitque quadratus $\frac{361}{144}$ cuius latus $\frac{19}{12}$. Rursus quæro quæ pars quadrati ad 7 $\frac{1}{2}$ adiecta, faciat quadratum, ea reperitur $\frac{1}{16}$. & fit quadratus $\frac{121}{16}$ à latere $\frac{11}{4}$. Quamobrem 10. diuidendus est in duos quadratos, ita vt latus vnius accedat ad $\frac{19}{12}$. Alterius vero ad $\frac{11}{4}$ seu ad $\frac{33}{12}$. Statuentur ergo per ad æqualitatem quadratorū latera 1 + 7 N. & 3 − 3 N. fietque summa quadratorum 10 + 58 Q. − 4 N. æqualis 10. vnde fiet 1 N. $\frac{2}{29}$. & erunt quadratorum latera $\frac{43}{29}$ & $\frac{81}{29}$. ipsi quadrati $\frac{1849}{841}$. & $\frac{6561}{841}$. quorum summa 10. & si à primo auferas 2. à secundo 7. restant quæsitæ partes vnitatis $\frac{167}{841}$ & $\frac{674}{841}$.

Hæc autem quæstio extendetur quoque ad quemlibet numerum, & sic vniuersalius proponetur.

Datum numerum diuidere in duas partes, vt vtrique addendo alterum atque alterum numerum, fiat vtrimque quadratus. Oportet autem compositum ex diuidendo numero, & vtroque adiiciendorum, quadratum esse, vel compositum ex duobus quadratis.

Diuidendus esto 6. adiiciendi verò 3. & 7. Cùm ergo horum trium summa sit 16. oportet diuidere 16. in duos quadratos, quorum alter sit maior quàm 3. minor quàm 9. Alter verò sit maior quàm 7. minor quàm 13. Ponatur primus 1 Q. erit alter 16. − 1 Q. cuius latus ita fingendum est, vt 1 Q. cadat inter 3. & 9. sumantur duo quadrati cadentes inter 3. & 9. puta 4. & $\frac{64}{9}$. quorum latera 2. & $\frac{8}{3}$. Oportet igitur fictitium latus ita ponere, vt 1 N. sit maior quàm 2. minor quàm $\frac{8}{3}$. Porro fiet valor Numeri ponendo fictitium latus 4 − aliquot numeris, quorum octuplum diuidetur per eorum quadratum vnitate auctum. Quamobrem $\frac{8 N}{1 Q + 1}$ maior est quàm 2. minor quàm $\frac{8}{3}$. & tandem 8 N. maior est quàm 2 Q. + 2. & 24. N. minor est quàm 8 Q. + 8. & vtraque æquatione per approximationem resoluta fit 1 N. maior quàm $\frac{21}{8}$ minor quàm $\frac{11}{3}$. Ponatur 3. & numeri 16 − 1 Q. latus statuatur 4 − 3 N. fiet 1 N. $\frac{12}{5}$. erunt igitur latera quadratorum $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$. ipsi quadrati $\frac{144}{25}$ & $\frac{256}{25}$ & à primo auferendo 3. à secundo 7. remanent quæsitæ senarij partes $\frac{69}{25}$ & $\frac{81}{25}$.

Rursus numerus 8. diuidendus sit in duas partes, vt alteri addendo 5. alteri 7. fiat vtrumque quadratus. Cùm ergo ipsorum 8. 5. 7. summa sit 20. oportet diuidere 20. in duos quadratos quorum alter cadat inter 5. & 13. alter consistat inter

7. & 15. sumo medium arithmeticè inter vtrumque terminum, puta 9. & 11. & quæro quæ pars quadrati ad vtrumque addita faciat quadratum; inuenio hinc $\frac{49}{16}$. inde $\frac{1}{4}$. fiuntque quadrati $\frac{441}{64}$ & $\frac{100}{9}$ quorum latera in eadem denominatione sunt $\frac{75}{4}$. & $\frac{80}{24}$. Diuidendus ergo mihi est 20. in duos quadratos, ita vt vnius latus accedat ad $\frac{75}{24}$. Alterius latus sit proximum $\frac{80}{24}$. erunt ergo per adæqualitatem huiusmodi latera 2 + 27 N. & 4 − 16 N. estque summa quadratorum 20 + 985 Q. − 20 N. vnde fit 1 N. $\frac{4}{197}$. & sunt quadratorum latera $\frac{502}{197}$ & $\frac{724}{197}$ ipsi quadrati $\frac{252004}{38809}$ & $\frac{524176}{38809}$. Quod si à priore auferas 5. à posteriore 7. remanent quæsitæ partes octonarij, $\frac{57959}{38809}$ & $\frac{252513}{38809}$.

QVÆSTIO XIV.

VNITATEM diuidere in tres numeros, & cuilibet addere datum eundem numerum, & ita quemlibet quadratum facere. Oportet autem datum neque binarium esse, neque aliquem eorum qui fit addito binatio ad octonarij multiplicem. Imperatum sit vt vnitas diuidatur in tres numeros, & cuilibet addatur 3. & sic fiat quadratus. Rursus oportet diuidere 10. in tres quadratos, vt quilibet ipsorũ sit maior quàm 3. Si ergo iterum diuidamus 10. in tres quadratos adæqualitatis ductu, erit quilibet ipsorum maior ternario, & poterimus ternario à quouis detracto, eos habere in quos vnitas diuidenda est. Sumamus itaque trientem de 10. hoc est $3\frac{1}{3}$. Et quæramus quæ pars quadrata possit adiici ad $3\frac{1}{3}$. vt fiat quadratus. Omnia nouies. Iam ad 30. oportet partem à quadrato denominatum addi, & fieri quadratum. Esto pars adiicienda $\frac{1}{1 Q.}$ & omnia multiplicentur per 1 Q. fiunt 30 Q. + 1. æqualia quadrato à latere 5 N. + 1. fitque quadratus 25 Q. + 10 N + 1. æqualis 30 Q. + 1. vnde fit 1 N.

ΜΟΝΑΔΑ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν τὸν αὐτὸν δοθέντα, καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμόν, μήτε δυάδα εἶναι, μήτε τινὰ τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάκις ἀραυξανομένων. Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μονάδα διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ μο γ. καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. πάλιν δεῖ τὸν ι. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μο γ. ἐὰν οὖν πάλιν τὸν ι. διέλωμεν εἰς τρεῖς τετραγώνους. τῇ τῆς παρισότητος ἀγωγῇ. ἔσται ἕκαστος αὐτῶν μείζων τριάδος. καὶ δυνησόμεθα ἀφ' ἑκάστου αὐτῶν ἀφελόντες μο γ. ἔχειν εἰς οὓς ἡ μονὰς διαιρεῖται. λαμβάνομεν ἄρτι τοῦ ι. τὸ τρίτον, γίνεται γ. γ^x. καὶ ζητοῦμεν τί προστεθέντες μόριον τετραγωνικὸν ταῖς μονάσι γ. γ^x. ποιήσομεν [τετράγωνον] πάντα ἐννάκις, καὶ δεῖ τῷ λ. προσθεῖναι τι μόριον τετραγωνικόν, καὶ ποιεῖν τὸν ὅλον τετράγωνον. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον δυναμοστὸν α. καὶ πάντα ἐπὶ δυνάμιν γίνονται δυ λ. μο α. ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς ε. μο α. γίνεται ὁ τετράγωνος δυ κε. ςς ι. μο α. ἴσος δυ λ. μο

ᾱ. ὅθεν ὁ ς° μ° β̄. ἡ δύναμις μ° δ̄. τὸ δυναμοστὸν μ° ᾱ δˣ. ἐὰν οὖν ταῖς μ° λ̄. προστίθεται μ° ᾱ δˣ. ταῖς μονάσιν γ. ᾱ γˣ. προστεθήσεται ᾱ ιςˣ. καὶ γίνεται [ὁ τετράγωνος] ρκᾱ ιςˣ. δεῖ οὖν τὸν ῑ. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἑκάστου τετραγώνου ἡ πλευρὰ πάρισος ᾖ μ° ια δˣ. ἀλλὰ καὶ ὁ ῑ. σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων τοῦτε θ̄. καὶ τῆς μονάδος. διαιροῦμεν οὖν τὴν μονάδα εἰς δύο τετραγώνους τά τε θ̄ κεˣ. καὶ τὰ ις̄ κεˣ. ὥστε τὸν ῑ. συγκεῖσθαι ἐκ τριῶν τετραγώνων. ἔκ τε τοῦ θ̄. καὶ τοῦ ις̄ κεˣ. καὶ τοῦ θ̄ κεˣ. δεῖ οὖν ἑκάστην τῶν πλευρῶν τούτων παρασκευάσαι πάρισον ια δˣ. ἀλλὰ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἰσι μ° γ̄. καὶ μ° δ̄ εˣ. καὶ μ° γ̄ εˣ. καὶ πάντα τριακοντάκις. καὶ γίνονται μ° ϙ. καὶ μ° κδ̄. καὶ μ° ιη. τὰ δὲ ια δˣ. γίνονται μ° νε̄. δεῖ οὖν ἑκάστην πλευρὰν κατασκευάσαι νε̄. πλάσσομεν ἑνὸς πλευρὰν μ° γ̄. ⋔ ςς λε̄. ἑτέρου δὲ ςς λᾱ. μ° δ̄ εˣ. τοῦ δὲ ἑτέρου ςς λζ̄ μ° γ̄ εˣ. γίνονται οἱ ἀπὸ τῶν εἰρημένων τετράγωνοι. δυ ,γφνε̄ μ° ι λείψει ςς ρις̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ῑ. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς° ρις̄ ,γφνεˣ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ γίνονται αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων δοθεῖσαι, ὥστε καὶ αὐτοί, τὰ λοιπὰ δῆλα.

2. & 1 Q. 4. Patsque quadratica $\frac{1}{4}$. Si ergo ad 30. adiicimus $\frac{1}{4}$. ad 3 $\frac{1}{4}$. addemus $\frac{1}{16}$. & fit quadratus $\frac{121}{16}$. Oportet igitur diuidere 10. in tres quadratos, vt vniuscuiusque quadrati latus sit adæquale vnitaribus $\frac{11}{4}$. Atqui 10. componitur ex duobus quadratis 9. & 1. Diuidimus ergo 1. in duos quadratos $\frac{9}{25}$. & $\frac{16}{25}$. ita vt 10. constet ex tribus quadratis 9. $\frac{16}{25}$. & $\frac{9}{25}$. Oporret igitur horum cuiusuis lateri adæqualem facere $\frac{11}{4}$. Sed & latera eorum sunt 3. $\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. & omnia per 30. multiplicentur. Et fiunt 90. 24. & 18. Ipse verò $\frac{11}{4}$. fit 55. Oportet itaque vnumquodque latus adæquare ipsi 55. fingamus vnius latus 3 − 35 N. alterius autem 31 N. + $\frac{4}{5}$. Alrerius denique 37 N. + $\frac{3}{5}$. fiunr ab his quadrati in vnam summam redacti 3555 Q. + 10. − 116 N. hæc æquantur 10. vnde inuenitur 1 N. $\frac{116}{3555}$. Ad positiones. Et fiunt latera quadratorum data, ipsique etiam dantur, & reliqua sunt manifesta.

IN QVAESTIONEM XV.

VERBA illa δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν μήτε δυάδα εἶναι, μήτε τινὰ τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάκι προσαυξανομένων, perperam vertit Xilander & ex eius versione commodum aliquem sensum recipere nequeunt. Itaque cùm eorum vim non perciperet, nihil super huiusmodi limitatione adnotauit. Certum est autem, vt quæstio solui possit oportere vt triplum dati numeri vnitate auctum sit quadratus, vel ex duobus, aut ex tribus etiam quadratis suapte natura compositus. Quare vt Diophanti limitatio sit necessaria, ostendendum est numeros 2. 10. 18. 26. 34. 42. & alios omnes qui fiunt addendo 2. ad aliquem octonarj multiplicem tales esse, vt eorum triplum vnitate auctum non possit esse quadratus, neque numerus ex duobus aut tribus quadratis compositus. Et de binario quidem, manifestu est eius triplum vnitate au-

ctum puta 7. nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum.
De aliis autem sic demonstrabitur.

Esto A. quilibet octonarij multiplex, cui addito binario fiat B. & sumatur C H
triplum ipsius B. cui addita vnitate H K. fiat C K. dico C K nec quadratum esse,
nec è duobus vel tribus quadratis compositum: Quia enim B. continet A & binarium, & C H triplus est ad B, patet C H continere triplum ipsius A, & triplum
binarij, puta senarium. Sit ergo C F triplum ipsius A, erit reliquus F H senarius,
in quo sumendo binarium G H, relinquetur quaternarius F G.

A 16. B 18.

C ———————— F .... G .. H . K

Primum itaque C K non esse quadratum, sic probatur. Quoniam A est multiplex octonarij, [1] est A par, vnde addito 21. noni.
binario fit rursus B par. Quamobrem & C H multiplex ad B. par est, ac proinde
C K est impar ex definitione. Si ergo C K. ponatur quadratus, ablata vnitate, [2] reli- 21. 1. porism.
quus C H. erit pariter par. [3] Quare quaternarius eum metietur. Sed idem quater- 10. 1. porism.
narius metitur C F multiplicem octonarij, ergo idem quaternarius metietur reliquum F H. sed & quaternarius metietur seipsum, puta F G. ergo idem quaternarius metietur reliquum binarium G H. Quod est impossibile. Quare C K non est
quadratus.

Deinde C K. non componi ex duobus quadratis sic ostendo. Etenim si componatur ex duobus quadratis, non erit vterque par, nec vterque impar, alioquin ipse
C K. esset par, contra id quod ostensum est. Necesse est ergo alterum quadratorum
parem esse, alterum imparem. [4] At quadratus par est pariter par [5], & à quadrato 20. 1. porism.
impare auferendo vnitatem, relinquitur pariter par. Igitur à numero C K. auferendo 21. 1. porism.
vnitatem, reliquus C H. componitur ex duobus pariter paribus, [6] ac proinde C H. 16. 1. porism.
est pariter par. Quare vt prius sequitur quaternarium metiri binarium. Quod est absurdum. Igitur C K. non componitur ex duobus quadratis.

Denique si C K. ponatur componi ex tribus quadratis, non erit quilibet illorum
par; nec erunt duo impares & tertius par; sic enim fieret ex illis compositus C K.
par, contra id quod ostensum est. Relinquitur ergo tres illos quadratos vel impares esse omnes; vel duos esse pares & tertium imparem. Atqui neutrum possibile est.
Nam primò si ponantur duo pares & tertius impar, si à tertio auferatur vnitas, [7] re- 21. 1. porism.
linquetur pariter par, quo addito aliis duobus quadratis itidem pariter paribus [8] fiet 16. 1. porism.
totus C H. pariter par. Quare rursus inferetur quaternarium metiri binarium.
Quod est impossibile. Deinde si quilibet trium quadratorum ex quibus C K. componi dicitur, ponatur impar cùm à quolibet ipsorum detracta vnitate reliquatur
multiplex octonarij, vt ostensum est ad quadragesimamquartam quarti, & euidentius demonstrabitur ad octauam de numeris multangulis: patet si à composito ex
tribus, nempè à toto C K, auferatur ternarius G K, residuum C G, multiplicem
esse octonarij: sed & C F. multiplex est octonarij ex constructione. Igitur octonarius metiens totum C G. & ablatum C F, metietur & reliquum quaternarium F G.
Quod est impossibile. Non erit ergo C K. quadratus, nec compositus è duobus
vel tribus quadratis. Quod demonstrandum erat.

Ex his liquidò apparet eum esse sensum verborum Diophanti, quem expressimus versione nostra, nam ingeniosa est, & authore digna huiusmodi limitatio.
Cæterùm quamuis, vt ostensum est, hæc conditio sit necessaria, non est tamen sufficiens, nam non solùm numeri omnes hac limitatione comprehensi soluendæ quæstioni sunt inutiles, sed præterea numerus 9. & omnes alij qui fiunt addito 9. ad 32.
vel ad aliquem eius multiplicem, quales sunt 41. 73. 105. &c. nam horum triplum
addita vnitate, neque quadratus est, neque numerus è duobus vel tribus quadratis
compositus. Et quidem de ipso 9. patet experientia, nam eius triplum vnitate auctum, puta 28. nec quadratus est, nec è duobus vel tribus quadratis compositus.
De aliis autem sic demonstratur. Esto A multiplex ad 32. cui addendo 9. fiat B.
cuius triplum vnitate auctum esto C E. Dico C E. nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum. Quia enim B. continet A. & nouenarium,
ipse C E. continet triplum ipsius A, & triplum ipsius 9. & vnitatem. Sit C D.
triplum ipsius A, erit ergo D E. triplum nouenarij & vnitas, puta numerus 28.

α. ὅθεν ὁ ϛ μ β. ἡ δύναμις μ δ. τὸ δυναμοστὸν μ α^δ. εἰ οὖν ταῖς μ λ. προστίθεται μ α^δ. ταῖς μονάσιν γ. α^γ. προστεθήσεται α^λϛ. καὶ γίνεται [ὁ τετράγωνος] ρκα^λϛ. δεῖ οὖν τὰς ῑ. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἑκάστου τετραγώνου ἡ πλευρὰ πάρισος ᾖ μ ια^ϛ. ἀλλὰ καὶ ὁ ῑ. σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων τοῦ τε θ. καὶ τῆς μονάδος. διαιροῦμεν οὖν τὴν μονάδα εἰς δύο τετραγώνους τό τε θ^κε. καὶ τὰ ιϛ^κε. ὥστε τὰς ῑ. συγκεῖσθαι ἐκ τριῶν τετραγώνων. ἔκ τε τοῦ θ. καὶ τοῦ ιϛ^κε. καὶ τοῦ θ^κε. δεῖ οὖν ἑκάστην τῶν πλευρῶν τούτων παρασκευάσαι πάρισον ια^ϛ. ἀλλὰ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἰσι μ γ. καὶ μ δ^ε. καὶ μ γ^ε. καὶ πάντα τριακοντάκις. καὶ γίνονται μ ϟ. καὶ μ κδ. καὶ μ ιη. τὰ δὲ ια^ϛ. γίνονται μ νε. δεῖ οὖν ἑκάστην πλευρὰν κατασκευάσαι νε. πλάσσομεν ἑνὸς πλευρὰν μ γ. ⋔ ϛϛ λε. ἑτέρου δὲ ϛϛ λα. μ δ^ε. τοῦ δὲ ἑτέρου ϛϛ λζ μ γ^ε. γίνονται οἱ ἀπὸ τῶν εἰρημένων τετράγωνοι. Δ^Υ ,γφνε μ ῑ λεῖψει ϛϛ ρις. ταῦτα ἴσα μονάσι ῑ. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ϛ ρις^,γφνε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ γίνονται αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων δοθεῖσαι, ὥστε καὶ αὐτοί, τὰ λοιπὰ δῆλα.

2. & 1 Q. 4. Parsque quadratica $\frac{1}{4}$. Si ergo ad 30. adiicimus $\frac{1}{4}$. ad $3\frac{1}{3}$. addemus $\frac{1}{36}$. & fit quadratus $\frac{121}{36}$. Oportet igitur diuidere 10. in tres quadratos, vt vniuscuiusque quadrati latus sit adæquale vnitatibus $\frac{11}{6}$. Atqui 10. componitur ex duobus quadratis 9. & 1. Diuidimus ergo 1. in duos quadratos $\frac{9}{25}$. & $\frac{16}{25}$. ita vt 10. constet ex tribus quadratis 9. $\frac{16}{25}$. & $\frac{9}{25}$. Oportet igitur horum cuiusuis lateri adæqualem facere $\frac{11}{6}$. Sed & latera eorum sunt 3. $\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. & omnia per 30. multiplicentur. Et fiunt 90. 24. & 18. Ipse verò $\frac{11}{6}$. fit 55. Oportet itaque vnumquodque latus adæquare ipsi 55. fingamus vnius latus 3 − 35 N. alterius autem 31 N. + $\frac{4}{5}$. Alterius denique 37 N. + $\frac{3}{5}$. fiunt ab his quadrati in vnam summam redacti 3555 Q. + 10. − 116 N. hæc æquantur 10. vnde inuenitur 1 N. $\frac{116}{3555}$. Ad positiones. Et fiunt latera quadratorum data, ipsique etiam dantur, & reliqua sunt manifesta.

IN QVAESTIONEM XV.

VERBA illa δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν μήτε δυάδα εἶναι, μήτε τινὰ τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάκι παραυξανομένων, perperam vertit Xilander & ex eius versione commodum aliquem sensum recipere nequeunt. Itaque cùm eorum vim non perciperet, nihil super huiusmodi limitatione adnotauit. Certum est autem, vt quæstio solui possit oportere vt triplum dati numeri vnitate auctum sit quadratus, vel ex duobus, aut ex tribus etiam quadratis suapte natura compositus. Quare vt Diophanti limitatio sit necessaria, ostendendum est numeros 2. 10. 18. 26. 34. 42. & alios omnes qui fiunt addendo 2. ad aliquem octonarij multiplicem tales esse, vt eorum triplum vnitate auctum non possit esse quadratus, neque numerus ex duobus aut tribus quadratis compositus. Et de binario quidem, manifestu est eius triplum vnitate au-

ctum puta 7. nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum.
De aliis autem sic demonstrabitur.

Esto A. quilibet octonarij multiplex, cui addito binario fiat B. & sumatur C H
triplum ipsius B. cui addita vnitate H K. fiat C K. dico C K nec quadratum esse,
nec è duobus vel tribus quadratis compositum: Quia enim B. continet A & bina-
rium, & C H triplus est ad B, patet C H continere triplum ipsius A; & triplum
binarij, puta senarium. Si ergo C F triplum ipsius A, erit reliquus F H senarius,
in quo sumendo binarium G H; relinquetur quaternarius F G.

A 16. B 18.
C————————F .... G . . H . K

Primum itaque C K non esse quadra-
tum, sic probatur. Quoniam A est mul-
tiplex octonarij,[1] est A par, vnde addito 21. nom.
binario fit rursus B par. Quamobrem & C H multiplex ad B. par est, ac proinde
C K est impar ex definitione. Si ergo C K. ponatur quadratus, ablata vnitate, [2] reli- 21. 1. poris.
quus C H. erit pariter par. [3] Quare quaternarius eum metietur. Sed idem quater- 10. 1. poris.
narius metitur C F multiplicem octonarij, ergo idem quaternarius metietur reli-
quum F H. sed & quaternarius metietur seipsum, puta F G. ergo idem quaterna-
rius metietur reliquum binarium G H. Quod est impossibile. Quare C K non est
quadratus.

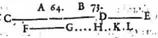
Deinde C K. non componi ex duobus quadratis sic ostendo. Etenim si compo-
natur ex duobus quadratis, non erit vterque par, nec vterque impar, alioquin ipse
C K. esset par, contrà id quod ostensum est. Necesse est ergo alterum quadratorum
parem esse, alterum imparem. [4] At quadratus par est pariter par [5], & à quadrato 20. 1. poris.
impare auferendo vnitatem, relinquitur pariter par. Igitur à numero C K. auferendo 21. 1. poris.
vnitatem, reliquus C H. componitur ex duobus pariter paribus, [6] ac proinde C H. 16. 1. poris.
est pariter par. Quare vt prius sequitur quaternarium metiri binarium. Quod est ab-
surdum. Igitur C K. non componitur ex duobus quadratis.

Denique si C K. ponatur componi ex tribus quadratis, non erit quilibet illorum
par; nec erunt duo impares & tertius par; sic enim fieret ex illis compositus C K.
par, contra id quod ostensum est. Relinquitur ergo tres illos quadratos vel impa-
res esse omnes; vel duos esse pares & tertium imparem. Atqui neutrum possibile est.
Nam primò si ponantur duo pares & tertius impar, si à tertio auferatur vnitas, [7] re- 21. 1. poris.
linquetur pariter par, quo addito aliis duobus quadratis itidem pariter paribus [8] fiet 16. 1. poris.
totus C H. pariter par. Quare rursus inferetur quaternarium metiri binarium.
Quod est impossibile. Deinde si quilibet trium quadratorum ex quibus C K. com-
poni dicitur, ponatur impar cùm à quolibet ipsorum detracta vnitate relinquatur
multiplex octonarij, vt ostensum est ad quadragesimamquartam quarti, & euiden-
tius demonstrabitur ad octauam de numeris multangulis: patet si à composito ex
tribus, nempè toto C K, auferatur ternarius G K, residuum C G, multiplicem
esse octonarij: sed & C F. multiplex est octonarij ex constructione. Igitur octona-
rius metiens totum C G. & ablatum C F, metietur & reliquum quaternarium F G.
Quod est impossibile. Non erit ergo C K. quadratus, nec compositus è duobus
vel tribus quadratis. Quod demonstrandum erat.

Ex his liquidò apparet eum esse sensum verborum Diophanti, quem expressi-
mus versione nostra, nam ingeniosa est, & authore digna huiusmodi limitatio.
Cæterùm quamuis, vt ostensum est, hæc conditio sit necessaria, non est tamen suf-
ficiens, nam non solùm numeri omnes hac limitatione comprehensi soluendæ quæ-
stioni sunt inutiles, sed præterea numerus 9. & omnes alij qui fiunt addito 9. ad 32.
vel ad aliquem eius multiplicem, quales sunt 41. 73. 105. &c. nam horum triplum
addita vnitate, neque quadratus est, neque numerus è duobus vel tribus quadratis
compositus. Et quidem de ipso 9. patet experientia, nam eius triplum vnitate au-
ctum, puta 28. nec quadratus est, nec è duobus vel tribus quadratis compositus.
De aliis autem sic demonstratur. Esto A multiplex ad 32. cui addendo 9. fiat B.
cuius triplum vnitate auctum esto C E. Dico C E. nec quadratum esse, nec è duo-
bus vel tribus quadratis compositum. Quia enim B. continet A. & nouenarium,
ipse C E. continet triplum ipsius A, & triplum ipsius 9. & vnitatem. Sit C D.
triplum ipsius A, erit ergo D E. triplum nouenarij & vnitas, puta numerus 28.

Quare cùm C D. multiplex pariter paris sit pariter par, & ipse etiam D E, seu 28. sit pariter par; erit totus C E, pariter par, [1] ac proinde metietur eum quaternarius, sit illius quadrans F L, constans ex F G. quadrante ipsius C D, & ex G L, seu ex septenario quadrante ipsius D E. seu 28. in quo sumatur G H, quaternarius. H K binarius. K L vnitas. Cùm ergo C D sit multiplex ad 32. & quadrans ipsius 32. sit 8. patet F G multiplicem esse ad 8. & toties continere 8. quoties C D continet 32. Quare F G. est pariter par, & multiplex octonarij.

11. 1. poris.



Primum itaque C E non esse quadratum sic probatur. Si enim C E quadratus sit, eo per quadratum 4. diuiso, fiet & F L quadratus. Quare cùm F L sit impar, constans scilicet ex pari F G. & ex impari G L, ablata inde vnitate, residuum F K, erit multiplex octonarij per ostensa ad quadragesimam quartam quarti. Cùm ergo 8. metiatur totum F K, & ablatum F G, vt ostensum est, metietur & 8. reliquum senarium G K. Quod est impossibile.

Deinde C E, non componi ex duobus quadratis sic ostenditur. Non potest componi ex duobus quadratis, quorum alter sit par, alter impar, alioquin C E esset impar contra id quod ostensum est. Non componetur etiam ex duobus imparibus [2], nam ab vtroque auferendo vnitatem, relinquerentur duo numeri pariter pares, quorum summa esset pariter par; ac proinde totus C E, constaret ex numero pariter pari, atque ex binario [3]. Quare C E, esset pariter impar tantùm, contra id quod demonstratum est. Restat ergo vt vterque quadratorum ex quibus C E componi dicitur, sit par [4], vterque ergo erit pariter par. Quare eorum quadrantes sumendo, fient duo quadrati æquales toti F L. Cùm ergo F L sit impar, necesse est alterum quadratorum ex quibus componitur, esse parem, alterum imparem, & ab impari auferendo vnitatem cùm remaneat pariter par, patet F K ex duobus pariter paribus compositum, esse pariter parem [5]. Igitur metietur quaternarius totum F K, sed & metietur pariter parem F G, & seipsum puta G H. Ergo idem quaternarius metietur reliquum binarium H K. Quod est absurdum.

21. 1. poris. 11. 1. poris. 10. 1. poris. 10. 1. poris.

Denique C E non potest componi ex tribus quadratis. Etenim non potest componi ex tribus imparibus neque ex duobus paribus & tertio impari, alioquin ipse C E esset impar contra demonstrata. Non componetur etiam ex duobus imparibus, & tertio pari, sic enim à quadratis imparibus concipiendo auferri vnitatem, concluderetur totum C E componi ex tribus numeris pariter paribus, & ex binario, [6] ac proinde C E esse pariter imparem tantùm, contra id quod ostensum est. Restat ergo C E componi ex tribus quadratis paribus, qui cùm sint pariter pares, & eorum quadrantes sint quadrati numeri, erit F L compositus ex tribus quadratis. Non erunt autem tres hi quadrati pares, neque duo impares erunt & tertius par, alioquin totus F L erit par contra demonstrata. Non erunt etiam duo pares, tertius impar, nam si à tertio impari auferatur vnitas, relinquetur totus F K compositus ex tribus pariter paribus, ac proinde pariter par. Quare vt prius inferetur quaternarium metiri binariū. Demum non erūt tres quadrati impares, nam tunc à quolibet auferendo vnitatem, relinquentur tres numeri quos sigillatim octonarius metietur per ostēsa, ad quadragesimā quartam quarti ac proinde à toto F L auferendo ternarium, relinquetur F H multiplex octonarij. Cùm ergo 8. metiatur totū F H, & ablatū F G vt ostensum est, metietur idē 8. reliquum quaternarium G H. Quod est impossibile. Non est ergo C E quadratus, nec componitur è duobus vel tribus quadratis. Quod erat demonstrandum. Cæterùm an hæ duæ limitationes simul sufficientes sint, ita vt per vtramque simul excludātur omnes omnino numeri, quorum triplum vnitate auctum non est quadratus, nec è duobus vel tribus quadratis compositus, non ausim temerè affirmare. Equidem vix adducor vt aliter sentiam, cùm in omnibus numeris ab vnitate vsque ad 325. id sim expertus.

10. 1. poris.

Reliqua operatio Diophanti ex dictis ad duodecimam perspicua redditur. Inuento $\frac{1}{5}$ latere quadrati cui adæquari oportet latera quadratorum in quos numerus 10. diuidendus est, sumit latera quadratorum ex quibus 10. suapte natura componitur, puta 3. $\frac{2}{5}$. & $\frac{1}{5}$. & omnia reducendo ad eandem denominationem, fiunt hæc tria

tria latera $\frac{90}{30}$ $\frac{24}{30}$ $\frac{18}{30}$ ipse verò $\frac{11}{6}$ fit $\frac{55}{30}$. Posito ergo valore Numeri $\frac{1}{30}$. patet latera quadratorum quæsitorum ponenda esse, vt facit Diophantus 3 – 35 N. 31 N. + $\frac{4}{5}$. 37 N. + $\frac{3}{5}$. & reliqua sunt manifesta. Placuit autem παρισότητα vertere cum Xilandro adæqualitatem. Quia enim in huiusmodi quæstionibus Diophantus, cuidam lateri adæquat proximè latera quadratorum quæsitorum, non autem æquat propriè, vocat ille hanc comparationem παρισότητος, non autem ἰσότητος. Nos etiam non æqualitatem sed adæqualitatem appellamus, sicut etiam πάρισον vertimus adæquale.

Porrò solutionem quæstionis omisit Diophantus molestiæ fractionum se subtrahens, sed talis est, fit 1 N. $\frac{116}{711}$ per quem si resoluas hypostases, fiunt quadratorum latera $\frac{1321}{711}$ $\frac{1285}{711}$ $\frac{1288}{711}$. Ipsi quadrati $\frac{1745041}{505521}$ $\frac{1651225}{505521}$ $\frac{1658944}{505521}$. à quibus si auferas sigillatim ternarium, restant quæsitæ partes vnitatis, videlicet $\frac{228478}{505521}$ $\frac{134662}{505521}$ $\frac{142381}{505521}$. Hæc autem quæstio extenderur etiam ad quemlibet numerum, sic eam proponendo.

Datum numerum secare in tres partes, & cuilibet addere eundem numerum, & facere quadratum. Oportet autem, vt numerus diuidendus adsumens triplum addititij numeri, faciat quadratum, vel numerum è duobus aut tribus quadratis compositum.

Diuidendus esto 5. addititius numerus 3. Igitur 14. diuidendus est in tres quadratos, quorum quilibet excedat 3. sumo $\frac{1}{3}$ de 14. puta $\frac{14}{3}$ & quæro partem quadrati quæ illi addita, faciat quadratum, ea inuenietur $\frac{1}{36}$ & fit quadratus $\frac{169}{36}$ à latere $\frac{13}{6}$. Diuidendus ergo est 14. in tres quadratos, ita vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{13}{6}$. At 14. suapte natura componitur ex tribus quadratis, quorum latera 3. 2. 1. fingentur ergo per adæqualitatem quæsitorum quadratorum latera 3 – 5 N. 2 + 1 N. & 1 + 7 N. eritque summa quadratorum 14 + 75 Q. – 12 N. æqualis 14. vnde fiet 1 N. $\frac{4}{25}$. sunt ergo quadratorum latera $\frac{55}{25}$ $\frac{54}{25}$ $\frac{53}{25}$. ipsi quadrati $\frac{3025}{625}$ $\frac{2916}{625}$ $\frac{2809}{625}$. à quibus sigillatim auferendo ternarium remanent quæsitæ quinarij partes $\frac{1150}{625}$ $\frac{1041}{625}$ $\frac{934}{625}$.

Rursus vniuersalius etiam proponetur quæstio, hoc pacto.

Datum numerum secare in quotlibet partes, vt cuilibet addendo eundem numerum, fiat quadratus.

Sit secandus 6. in quatuor partes vt cuilibet addẽdo 4. fiat quadratus, oportet ergo quadruplum ipsius 4. adsumpto 6. puta 22. diuidere in quatuor quadratos, quorum quilibet excedat 4. Porrò 22. diuiditur in tres quadratos 9. 9. 4. quorum primus 9. excedit 4. & duorum reliquorum summa 13. excedit triplum ipsius 4. Quare superest vt diuidamus 13. in tres quadratos quorum quilibet excedat 4. sumo trientem de 13. puta $\frac{13}{3}$. & quæro quæ pars quadrati huic addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{144}$. & fit quadratus $\frac{625}{144}$ cuius latus $\frac{25}{12}$. Porrò 13. diuiditur in tres quadratos quorum latera $\frac{9}{5}$. 2. $\frac{12}{5}$. Quare per adæqualitatem constituentur quæsitorum quadratorum latera $\frac{9}{5}$ + 17 N. 2 + 5 N. $\frac{12}{5}$ – 19 N. & fit quadratorum summa 13 + 675 Q. – 10 N. æqualis 13. vnde fit 1 N. $\frac{2}{135}$. sunt ergo latera quadratorum $\frac{277}{135}$ $\frac{280}{135}$ $\frac{286}{135}$. Ipsi quadrati $\frac{76729}{18225}$ $\frac{78400}{18225}$ $\frac{81796}{18225}$. quibus si addatur quartus quadratus 9. habentur quatuor quæsiti quadrati, à quibus auferendo sigillatim numerum 4. remanent quæsitæ partes senarij $\frac{3829}{18225}$ $\frac{5500}{18225}$ $\frac{8896}{18225}$. & 5. Hîc nulla conditio præscribitur, quia quilibet numerus in quatuor pluresve quadratos diuidi potest, vt abundè docuimus ad trigesimam primam quarti, vbi etiam quarundem quæstionum explicationem in hunc locum reiecimus, quasi iam enodare libet. Sit ergo propositum.

Inuenire duos quadratos, quorum summa cum summa laterum, datum faciat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum binario auctum diuidi posse in duos quadratos.

Datus esto 6.

Patet ex dictis ad trigesimã primã quarti, si ad 6. addamus duos quadrantes vnitatis, puta $\frac{1}{2}$ summã 6 $\frac{1}{2}$ æquari debere duobus quadratis, à quorum lateribus si auferatur sigillatim $\frac{1}{2}$ restant quæsitorum quadratorum latera. Porro ad vitandas minutias ducto 6 $\frac{1}{2}$ in 4. fit 26. diuidẽdus in duos quadratos. Quia verò 6 $\frac{1}{2}$ ita diuidendus est

in duos quadratos, vt quilibet excedat $\frac{1}{4}$. patet eius quadruplum 26. ita diuidendum in duos quadratos, vt quilibet excedat 1. id est vt quilibet sit maior quàm 1. minor quàm 25. Sumpto ergo medio inter 1. & 25. puta 13. quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum ea est $\frac{4}{9}$. fitque quadratus $\frac{121}{9}$ à latere $\frac{11}{3}$. Ergo latera quadratorum adæquari debent $\frac{11}{3}$. Quare sumptis lateribus quadratorum ex quibus 26. componitur 1. & 5. fingentur per adæqualitatem quæsitorum latera 1 + 8 N. & 5 − 4 N. fit summa quadratorum 26 + 80 Q. − 24 N. æqualis 26. vnde fit 1 N. $\frac{3}{10}$. sunt igitur latera quadratorum $\frac{19}{5}$. $\frac{17}{5}$. Quorum semisses puta $\frac{19}{10}$ $\frac{17}{10}$ sunt latera quadratorum ex quibus 6 $\frac{1}{2}$ componitur. Quamobrem à quolibet auferendo $\frac{1}{2}$ remanent quæsitorum quadratorum latera $\frac{7}{5}$ $\frac{6}{5}$. nam horum summa cum summa quadratorum conficit 6.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire tres quadratatos, quorum summa cum summa laterum, datum conficiat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum ternario, diuidi diuidi posse in tres quadratos.

Datus esto 4.

Ergo 4 $\frac{3}{4}$ diuidendus est in tres quadratos quorum quilibet excedat $\frac{1}{4}$. omnia per 4. fit 19. diuidendus in tres quadratos, quorum quilibet excedat 1. Diuiditur autem 19. in tres quadratos 9. 9. 1. quorum primo retento, superest vt residuum de 19. puta 10. diuidamus in duos quadratos, quorum quilibet excedat 1. Quæro partem quadrati quæ ad 5. addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{16}$. & fit quadratus $\frac{81}{16}$ à latere $\frac{9}{4}$. fingo ergo latera quadratorum per adæqualitatem 1 + 5 N. & 3 − 3 N. fitque summa quadratorum 10 + 34 Q. − 8 N. æqualis 10. vnde fit 1 N. $\frac{4}{17}$. sunt igitur latera $\frac{37}{17}$ & $\frac{39}{17}$. & sic totus 19. diuisus est in tres quadratos, quorum latera 3. $\frac{39}{17}$. $\frac{37}{17}$. quorum semisses $\frac{3}{2}$ $\frac{39}{34}$ $\frac{37}{34}$ sunt latera quadratorum ex quibus 4 $\frac{3}{4}$. componitur. Proinde à quolibet auferendo $\frac{1}{2}$. remanent quæsitorum quadratorum latera 1. $\frac{11}{17}$. $\frac{10}{17}$ quorum summa cum summa quadratorum conficit 4.

QVAESTIO TERTIA.

Inuenire quotlibet quadratos, quorum summa cum summa laterum datum conficiat numerum.

Hic nulla conditio præscribitur, quia quilibet Numerus in quatuor vel plures quotlibet quadratos diuidi potest. Sufficit ergo, si datus numerus tot quadrantibus vnitatis auctus, quot quadrati postulantur, diuidatur in totidem quadratos, quorum quilibet excedat $\frac{1}{4}$. seu quod idem est; si dati numeri quadruplum auctum tot vnitatibus quot quadrati postulantur, diuidatur in totidem quadratos, quorum quilibet excedat 1. Quod perficietur eadem arte.

QVAESTIO QVARTA.

Inuenire quotlibet quadratos, quorum summa adscito quolibet multiplice summæ laterum conficiat quadratum.

Sint inueniendi quatuor quadrati, quorum summa adscito triplo summæ laterum, faciat 3. Quoniam per lemma vniuersaliter demonstratum ad decimam tertiam quarti, omnis quadratus auctus triplo sui lateris, & numero 2 $\frac{1}{4}$ facit quadratum, cuius latus detracto 1 $\frac{1}{2}$ exhibet prioris quadrati latus. At quater 2 $\frac{1}{4}$ conficit 9. & volumus quatuor quadratos cum suis lateribus efficere 3. patet addito 3. ad 9. eò deuentum esse vt numerus 12. diuidatur in quatuor quadratos, quorum quilibet excedat 2 $\frac{1}{4}$. nam si à latere cuiuslibet auferamus 1 $\frac{1}{2}$. restabunt quæsitorum quadratorum latera. Diuiditur autem 12. in quatuor quadratos 4. 4. $\frac{64}{25}$ $\frac{36}{25}$.

quorum tres primi satis congruunt proposito, cùm quilibet excedat 2 $\frac{1}{4}$. Quartus verò minor est. Quare oportet rursus diuidere 12. in quatuor alios quadratos proposito satisfacientes. Sumo 3. quadrantem ipsius 12. & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{225}$. fitque quadratus $\frac{676}{225}$ à latere $\frac{26}{15}$. Ita igitur fingam quadratorum latera, vt quodlibet per adæqualitatem proximè accedat ad $\frac{26}{15}$. Et quia inuentorum latera ad eandem redacta denominationem sunt $\frac{27}{15}$. $\frac{30}{15}$. $\frac{44}{45}$. $\frac{28}{15}$. sumo differentias numeratorum à 26. & fingo latera quæsitorum quadratorum 2 − 4 N. 2 − 4 N. $\frac{8}{1}$ + 2 N. $\frac{6}{5}$ + 8 N. fitque quadratorum summa 12 + 100 Q. − $\frac{50}{5}$ N. æqualis 12. vnde fit 1 N. $\frac{8}{225}$. seu $\frac{16}{450}$. Quare latera quadratorum sunt $\frac{434}{450}$. $\frac{416}{450}$. $\frac{455}{450}$. $\frac{403}{450}$. Proinde à quolibet auferendo 1 $\frac{1}{2}$ supersunt quæsitorum quadratorum latera $\frac{61}{450}$. $\frac{61}{450}$. $\frac{57}{450}$. $\frac{53}{450}$. suntque ipsi quadrati $\frac{3721}{62500}$. $\frac{3721}{62500}$. $\frac{3249}{62500}$. $\frac{2809}{62500}$. quorū summa cum triplo summæ laterum quod est $\frac{174000}{62500}$. facit $\frac{187500}{62500}$. seu 3.

QVÆSTIO XV.

VNITATEM diuidere in tres numeros, & addere cuilibet ipsorū alium atq; alium datum numerum, & facere vnumquemque quadratum. Sunto dati 2. & 3. & 4. Rursum eò res rediit vt diuidam 10. in tres quadratos, vt primus ipsorum sit maior binario, secundus sit maior ternario, tertius sit maior quaternario. Si ergo vnitatem bifariam secantes, cuilibet datorum adiiciamus $\frac{1}{2}$. Oportebit quærere vnum quadratorum maiorem quàm 2. minorem verò quàm 2 $\frac{1}{2}$. Alterum maiorem quàm 3. minorem quàm 3 $\frac{1}{2}$. tertium denique maiorem quàm 4. minorem quàm 4 $\frac{1}{2}$. Eoque omnia deducuntur vt 10. ex duobus conflatum quadratis, rursus diuidam in alios duos, vt vnus eorum maior sit quàm 2. minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. Et ab hoc si auferamus 2. inueniemus vnam partium vnitatis. Rursus alterum quadratorum diuidemus in alios duos quadratos, ita vt vnus ipsorum sit maior quàm 3. minor

ΜΟΝΑΔΑ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα, καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὅ τε β. καὶ ὁ γ. καὶ ὁ δ. καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ τὸν ι. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπως αὐτῶν ὁ μὲν πρῶτος μείζων ᾖ δυάδος. ὁ δὲ ἕτερος μείζων ᾖ τριάδος. ὁ δὲ τρίτος μείζων ᾖ μο δ. ἐὰν οὖν τεμόντες μο α. δίχα προσθῶμεν τελοῖ δοθεῖσιν, ἀνὰ μονάδος ἡμίσεως, γίνεται ἕνα τῶν τετραγώνων. ζητεῖν μείζονα μὲν δυάδος ἐλάσσονα δὲ μο β. α/β. ἕτερον μείζονα μὲν μο γ. ἐλάσσονα δὲ μο γ. α/β. τὸν δὲ τρίτον μείζονα μὲν μο δ. ἐλάσσονα δὲ μο δ. α/β. καὶ ἀπάγεται ἅπαντα εἰς τὸ τὸν ι. συγκείμενον ἐκ δύο τετραγώνων μεταδιελεῖν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους, ὅπως εἷς αὐτῶν μείζων μὲν ᾖ μο β. ἐλάσσων δὲ μο β. α/β. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν δυάδα, εὑρήσομεν ἕνα τῶν ἀπὸ τῆς μονάδος. καὶ πάλιν τὸν ἕτερον τῶν τετραγώνων μεταδιαιροῦμεν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους, ὅπως εἷς μὲν αὐτῶν μείζων ᾖ μο γ. ἐλάσσων

ἢ μ° γ. α^ϛ. καὶ πάλιν ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν μονάδας τρεῖς, εὑρήσομεν ἕνα τῶν ζητουμένων. ὥστε καὶ τὸν τρίτον ὁμοίως εὑρήσομεν.

quàm 3 $\frac{1}{3}$. A quo item si detraxero 3. inueniam alterum quæsitorum. Eadem etiam ratione inueniemus tertium.

IN QVAESTIONEM XV.

Ex adnotatis ad duodecimam & decimam tertiam pendet quæstionis huius enodatio, & verba Diophanti satis sunt perspicua, sed totam operationem, quam ipse prætermisit, in tyronum gratiam subijcere non grauabor. Quoniam 10. diuidendus est in tres quadratos, quorum primus sit maior quàm 2. secundus quàm 3. tertius quàm 4. Diuido primum 10. in duos quadratos quorum alter cadat inter 2. & 3. id fiet per ea quæ attulimus ad duodecimam, eruntque huiusmodi quadrati $\frac{1849}{841}$ & $\frac{6561}{841}$ quorum latera $\frac{43}{29}$ & $\frac{81}{29}$. Habeoque iam vnum ex tribus quadratis quæsitis, puta $\frac{1849}{841}$. qui maior est quàm 2. minor quàm 3. vnde si auferatur 2. remanet vna ex quæsitis partibus vnitatis, puta $\frac{167}{841}$. Restat ergo vt reliquum quadratum $\frac{6561}{841}$ diuidamus in duos quadratos quorum alter cadat inter 3. & 4. Id fiet per ipsam operationem decimæ tertiæ. Quæro primum duos quadratos qui cadant inter 3. & 4. quales sunt $\frac{256}{81}$ & $\frac{289}{81}$ quorum latera $\frac{16}{9}$ & $\frac{17}{9}$. Tum posito altero quadratorum 1 Q. altero $\frac{6561}{841}$ − 1 Q. posterioris latus ita fingendum est, vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{16}{9}$ minor quàm $\frac{17}{9}$. fingi autem debet hoc latus à $\frac{81}{29}$ minus aliquot Numeris quorum duplum ductum in $\frac{81}{29}$ & diuisum per ipsorum numerorum quadratum vnitate auctum fiet valor Numeri. Quare posito numero Numerorum 1 N. fiet $\frac{162}{29}$ N. diuisus per 1 Q. + 1. maior quàm $\frac{16}{9}$ minor quàm $\frac{17}{9}$. Et vtraque æquatione per approximationem resoluta fiet 1 N. maior quàm $\frac{1266}{493}$ minor quàm $\frac{1291}{464}$. Ponatur ergo 2 $\frac{3}{4}$. & fingatur numeri $\frac{6561}{841}$ − 1 Q. latus, $\frac{81}{29}$ − 2 $\frac{3}{4}$ N. fiet 1 N. $\frac{7128}{3973}$. latus scilicet primi quadrati, eritque latus secundi $\frac{8505}{3973}$. suntque ipsi quadrati $\frac{50808384}{15784729}$ & $\frac{72335025}{15784729}$. à priore si auferas 3. à posteriore 4. remanent reliquæ partes vnitatis $\frac{3454197}{15784729}$ & $\frac{9196109}{15784729}$ quibus si addas primam iam inuentam $\frac{167}{841}$ seu vt idem sit denominator $\frac{3134423}{15784729}$. soluta erit quæstio.

Posset etiam aliter institui operatio, fingendo scilicet simul & semel tria latera quadratorum, eodem artificio quo iam vsi sumus ad decimam tertiam. Quoniam enim 10. diuidendus est in tres quadratos quorum primus superet 2. secundus 3. tertius 4. Diuido vnitatem in tres trientes, & cuilibet datorum numerorum addo $\frac{1}{3}$. fiuntque 2 $\frac{1}{3}$. 3 $\frac{1}{3}$. 4 $\frac{1}{3}$. Iam quæro partes quadrati quæ singulis additæ quadratum faciant, eæ sunt $\frac{1}{1296}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{144}$ & fiunt quadrati $\frac{3025}{1296}$ $\frac{121}{36}$ $\frac{625}{144}$. quorum latera $\frac{55}{36}$ $\frac{66}{36}$ $\frac{75}{36}$. vt omnium sit idem denominator. Oportet igitur ita fingere latera quadratorum, vt primum adæquetur $\frac{55}{36}$ secundum adæquetur $\frac{66}{36}$. tertium adæquetur $\frac{75}{36}$. Porrò numerus 10. diuiditur in tres quadratos, quorum latera 3. $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$. quæ vt reducantur ad eandem denominationem cum lateribus adæqualitatis, erunt hæc $\frac{540}{180}$ $\frac{108}{180}$ $\frac{144}{180}$. Illa verò $\frac{275}{180}$ $\frac{330}{180}$ $\frac{375}{180}$. Itaque fingentur per adæqualitatem latera primum $\frac{3}{5}$ + 167 N. secundum $\frac{4}{5}$ + 186 N. tertium 3 − 165 N. fitque summa quadratorum 10 + 89710 Q. − 492 N. æqualis 10. vnde fit 1 N. $\frac{246}{44855}$ sunt igitur quæsita latera, primum $\frac{13599}{8971}$. secundum $\frac{16328}{8971}$. tertium $\frac{18795}{8971}$. Ipsi verò quadrati $\frac{184932801}{80478841}$ $\frac{266603584}{80478841}$ $\frac{353252025}{80478841}$. Et si auferas 2. à primo, 3. à secundo, 4. à tertio, remanent quæsitæ partes vnitatis $\frac{23975119}{80478841}$ $\frac{25167061}{80478841}$ $\frac{31336661}{80478841}$.

Cæterùm non est dubium, & hîc requiri huiusmodi conditionem.

Oportet autem datorum numerorum summam vnitate auctam conficere numerum qui in tres quadratos diuidi possit.

Patet etiam eodem artificio quemlibet numerum diuidi posse in tres partes, ita vt cuilibet addendo alterum atque alterum numerum fiat quadratus. Et rursus tam vnitatem quàm numerum quemlibet diuidi posse in partes quotlibet, quibus addendo datos quoscunque numeros, fiant quadrati. Quæ omnia facilè mihi esset exemplis commonstrare, sed huic labori, ne sim prolixior, supersedebo.

QVÆSTIO XVI.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, vt bini coniuncti quadratum conficiant. Datus esto 10. Quoniam de tribus qui quæruntur numeris maior & medius simul faciunt quadratum, sed & medius cum tertio facit quadratum, & tertius cum primo. Ergo tres bis sumpti faciunt tres quadratos, quorum quilibet minor est quàm 10. Sed tres bis sumpti sunt 20. Oportet ergo diuidere 20. in tres quadratos, quorum quiuis minor sit quàm 10. Atqui 20. componitur è duobus quadratis 16. & 4. Et si de quæsitis vnum ponamus 4. oportebit diuidere 16. in duos quadratos, quorum quiuis minor sit quàm 10. Didicimus autem datum quadratum diuidere in duos quadratos, vt quiuis eorum maior sit quàm 6. minor quàm 10. sunto ambo simul 16. Itaque 20. diuisus erit in tres quadratos, quorum quilibet minor erit quàm 10. & si vnumquemque auferamus à denario, inueniemus reliquos, quorum bini coniuncti quadratum faciant.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως συνδύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ἐπιτετάχθω δὴ ὁ ι. καὶ ἐπεὶ ἐν τοῖς ζητουμένοις τρισὶν ἀριθμοῖς ὁ μείζων καὶ ὁ μέσος ποιοῦσι τετράγωνον. ὁμοίως καὶ ὁ μέσος μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖ τετράγωνον. καὶ ὁ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου. οἱ ἄρα τρεῖς δὶς γινόμενοι ποιοῦσι τρεῖς τετραγώνους, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ μο ι. ἀλλὰ δὶς οἱ τρεῖς εἰσι μο κ. δεῖ οὖν τὸν κ. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπως ἕκαστος αὐτῶν [ἐλάσσων] ᾖ μο ι. ὁ δὲ κ. σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων τοῦ τε ις. καὶ τοῦ δ. καὶ ἐὰν τάξωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων μο δ. δεήσει τὸν ις. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ μο ι. ἐμάθομεν δὲ τὸν δοθέντα τετράγωνον. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ὅπως εἷς τῶν αὐτῶν μείζων μὲν ᾖ μο ϛ. ἐλάσσων δὲ μο ι. ἔστωσαν ἀμφότεροι μο ις. ὥστε διῃρήσθω [κ. εἰς] τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἕκαστον αὐτῶν ἐλάσσων εἶναι μο ι. καὶ ἐὰν ἕκαστον ἀφέλωμεν ἀπὸ μο ι. εὑρήσομεν τοὺς λοιποὺς οἳ συνδύο λαμβανόμενοι ποιοῦσι τετράγωνον.

IN QVÆSTIONEM XVI.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ex dictis in præcedentibus pendet. Certum est autem cùm tres numeri sumuntur bini & bini, vnumquemque bis sumi, quare posita summa numerorum 10. necesse est summam quadratorum quos bini conficiunt esse 20. Igitur oportet diuidere 20. in tres quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. tum verò singulos quadratos ab ipso 10. detrahendo, remanebunt tres quæsiti numeri, vt constat ex Canone decimæsextæ primi. Quoniam verò 20. diuiditur suaptè natura in duos quadratos 4. & 16. quorum primus minor est quàm 10. ac proinde congruit proposito. Restat vt diuidamus 16. in duos quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. maior quàm 6. quia scilicet 10. & 6. conficiunt 16. Hoc autem fiet per opera-

tionem decimætertiæ hac arte. Sumo duos quadratos inter 6. & 10. puta 9. & $\frac{64}{9}$. quorum latera 3. & $\frac{8}{3}$. Positoque altero quadratorum quæsitorum 1 Q. altero 16 − 1 Q. fingo huius latus à 4 − tôt numeris, vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{8}{3}$. minor quàm 3. fiet autem valor Numeri, si octuplum numeri Numerorum diuidatur per ipsorum quadratum vnitate auctum. Quare posito numero Numerorum 1 N. fiet $\frac{8 N}{1 Q + 1}$. maior quàm $\frac{8}{3}$. minor quàm 3. vnde vtraque hac æquatione resoluta, inuenietur 1 N. maior quàm $\frac{7}{3}$. minor quàm $\frac{5}{2}$. ponatur $\frac{12}{5}$. Igitur quadrati 16 − 1 Q. latus statuetur 4 − $\frac{12}{5}$. N. & fiet 1 N. $\frac{480}{169}$. latus scilicet vnius quæsitorum quadratorum, estque alterum $\frac{476}{169}$. Quamobrem tres quæsiti quadrati sunt 4. $\frac{230400}{28561}$. $\frac{226576}{28561}$. quos si auferas sigillatim à denario, restant tres denarij quæsitæ partes 6. $\frac{55210}{28561}$. & $\frac{59034}{28561}$.

Hinc collige huic quoque quæstioni præscribi debere huiusmodi conditionem.

Oportet dati numeri duplum diuidi posse in tres quadratos.

Potest etiam aliter institui operatio, fingendo simul & semel trium latera quadratorum, & imitando artificium decimæquartæ hoc pacto. Quoniam 20. diuidi debet in tres quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. sumo trientem de 20. puta 6 $\frac{2}{3}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, hæc est $\frac{1}{144}$. fitque quadratus $\frac{961}{144}$. à latere $\frac{31}{12}$. fingenda ergo sunt latera quadratorum, vt vnumquodque adæquet $\frac{31}{12}$. Porrò numerus 20. diuiditur in tres quadratos, quorũ latera 4. $\frac{8}{5}$. $\frac{6}{5}$. quæ redacta ad eandem denominationem cum numero adæqualitatis, fiunt $\frac{240}{60}$. $\frac{96}{60}$. $\frac{72}{60}$. Ipse verò adæqualitatis numerus fit $\frac{155}{60}$. Quamobrem fingentur aptè latera quadratorum 4 − 85 N. $\frac{8}{5}$ + 59 N. $\frac{6}{5}$ + 83 N. estque summa quadratorum 20 + 17595 Q. − 292 N. æqualis 20. vnde fit 1 N. $\frac{292}{17595}$. sunt ergo latera quadratorum $\frac{9112}{3519}$. $\frac{9076}{3519}$. & $\frac{9070}{3519}$. Ipsi quadrati $\frac{83028544}{12383361}$. $\frac{82373776}{12383361}$. & $\frac{82264900}{12383361}$. quos si auferas sigillatim à denario, remanent vtique quæsitæ denarij partes. $\frac{40805066}{12383361}$. $\frac{41459834}{12383361}$. $\frac{41568710}{12383361}$.

QVÆSTIO XVII.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν [διελεῖν] εἰς τέσσαρας ἀριθμούς, οἳ σὺν τρεῖς λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. τετάχθω δὴ ὁ ι. ἐπεὶ οὖν οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς ποιοῦσι τετράγωνον. ἀλλὰ καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς, τὸ αὐτὸ ποιοῦσι, καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς τὸ αὐτὸ ποιοῦσι. καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ τετάρτου τρεῖς. οἱ ἄρα τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι τέσσαρας τετραγώνους. ἀλλ' οἱ τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι μο λ. δεήσει ἄρα μο λ. διελεῖν εἰς τέσσαρας τετραγώνους ὅπως ἕκαστος ἐλάσσων ᾖ μο ι. τοῦτο δὲ οὕτως εὑρεθήσεται. ἐάν τε διὰ τῆς παρισότητος τάξαντες ἕκαστον αὐτῶν μο ζ. L'. καὶ ἕκαστον τετραγώνων ἀφέλωμεν ἀπὸ μο ι. εὑρήσομεν τοὺς ζητουμένους. εἰ δὲ μὲν ὅρος τῶν λ.

DATVM numerum diuidere in quatuor numeros, vt terni coniuncti quadratum faciant. Datus esto 10. Quoniam qui à primo deinceps tres iuncti faciunt quadratum, itemque tres à secundo, & tres à tertio, & tres à quarto deinceps idem præstant. Ergo quatuor numeri ter sumpti faciunt quatuor quadratos. At quatuor numeri ter sumpti faciunt 30. Ergo 30. diuidendus est in quatuor quadratos, quorum quilibet minor sit quàm 10. Hoc autem sic inuenietur. Si per adæqualitatem statuamus quemlibet 7 $\frac{1}{2}$. & vnumquéque quadratorum auferamus de 10. inueniemus quæ-

sitos. Sin autem animaduerto 30. componi ex 16. 9. 4. & 1. ponam 4. & 9. quandoquidem vterque minor sit quàm 10. si ergo 17. diuidamus in duos quadratos vt didicimus, quorum alter maior sit quàm 8 $\frac{1}{2}$. minor quàm 10. erit vterque ipsorum minor quàm 10. Proinde si vtrumque eorum de 10. auferamus; inueniemus reliquos de quæsitis. Nam duo iam sunt inuenti, nempe 6. & 1. & soluetur quæstio.

συγκείμενον ἔχει τοῦ ιϛ^ου. καὶ τοῦ θ^ου. καὶ τοῦ δ^ου. καὶ τῆς μο α. θῶμεν τὸν τετράγωνον δ. καὶ τὸν τετράγωνον θ. ὧν ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ἐστὶ μο ι. λοιπὸν γίνεται μο ιζ. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάττων ᾖ μο ι. ἐὰν οὖν τὸν ιζ. διέλωμεν εἰς δύο τετραγώνους ὡς ἐμάθομεν, ὥστε ἑκάτερον αὐτῶν μείζονα εἶναι μο η. α^β. ἐλάσσονα δὲ μο ι. ἔσται ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάσσων μο ι. καὶ ἐὰν ἑκάτερον αὐτῶν ἀφέλωμεν ἀπὸ μο ι. εὑρήσομεν τοὺς λοιποὺς τῶν ζητουμένων [δύο γὰρ ἤδη εὑρήκαμεν] ὃν μὲν μο ϛ. ὃν δὲ μο α. ὥστε λελύσθαι τὸ ζητούμενον.

IN QVAESTIONEM XVII.

DVPLICEM operandi modum tangit Diophantus in proposito exemplo. Primus talis est. Quoniam 30. diuidendus est in quatuor quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. sumo quadrantem de 30. puta 7 $\frac{1}{2}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{16}$. fitque quadratus $\frac{121}{16}$. à latere $\frac{11}{4}$. Curandum ergo vt diuidatur 30. in quatuor quadratos, ita vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{11}{4}$. Atqui 30. suaptè natura diuiditur in quatuor quadratos, quorum latera sunt 4. 3. 2. 1. Quare per adæqualitatem statuentur quæsitorum quadratorum latera 4 − 5 N. 3 − 1 N. 2 + 3 N. 1 + 7 N. eritque summa quadratorum 30 + 84 Q. − 20 N. æqualis 30. vnde fiet 1 N. $\frac{5}{21}$. Erunt igitur latera quadratorum $\frac{59}{21}$. $\frac{58}{21}$. $\frac{57}{21}$. $\frac{56}{21}$. Ipsi verò quadrati $\frac{3481}{441}$. $\frac{3364}{441}$. $\frac{3249}{441}$. $\frac{3136}{441}$. à quibus si auferatur sigillatim numerus 10. remanent quæsitæ denarij partes $\frac{929}{441}$. $\frac{1046}{441}$. $\frac{1161}{441}$. $\frac{1274}{441}$.

Secundus operandi modus talis est. Quoniam 30. suapte natura diuiditur in quatuor quadratos 16. 9. 4. 1. quorum duo 9. & 4. proposito congruunt cùm sint minores denario, restat vt reliquorum summam puta 17. diuidamus in duos alios quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. maior quàm 7. quod sic fiet, sumo semissem de 17. puta 8 $\frac{1}{2}$ & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{144}$ & fit quadratus $\frac{1225}{144}$ à latere $\frac{35}{12}$. Quare per adæqualitatem fingentur latera quadratorum 4 − 13 N. & 1 + 23 N. est summa quadratorum 17 + 698 Q. − 58 N. æqualis 17. vnde fit 1 N. $\frac{29}{349}$. Quare latera quadratorũ sunt $\frac{1019}{349}$ $\frac{1016}{349}$. Ipsi quadrati $\frac{1038361}{121801}$ & $\frac{1032256}{121801}$. quibus addendo tertium & quartum 4. & 9. habemus totum 30. diuisum in quatuor quadratos, quos sigillatim auferendo à denario, remanent quæsitæ denarij partes, puta $\frac{185754}{121801}$. $\frac{179649}{121801}$. 6. & 1.

Cæterùm in textu Græco verba illa mendo non carent, ἐὰν οὖν τὸν ιζ. διέλωμεν εἰς δύο τετραγώνους, ὡς ἐμάθομεν, ὥστε ἑκάτερον αὐτῶν μείζονα εἶναι μο η. α^β. ἐλάσσονα δὲ μο ι. nam si numerus η. α^β. hoc est 8 $\frac{1}{2}$ retinendus est, proculdubio non ἑκάτερον, sed ἕτερον legendum est, nam impossibile est numerum 17. diuidi in duos quadratos, quorum vterque sit maior quàm 8 $\frac{1}{2}$ vt euidens est. Quod si vocem ἑκάτερον retinere libet, numerus η. α^β. mutandus est in ζ. seu in 7. verè enim numerus 17. diuidendus est in duos quadratos quorum vterque sit maior quàm 7. minor quàm 10. sed & postrema verba mutila erant, vt ex iis quæ adiecimus manifestum est.

Demum moneo eodem prorsus artificio datum numerum diuidi posse in quinque partes, vt quaternæ quadratum conficiant, vel in sex partes, vt quinæ quadratum fa-

ciant, & sic in infinitum. Restat vt quæstionem explicemus, quam in hunc locum reiecimus in adnotatione ad sextam tertij nimirum.

Inuenire quinque numeros quadrato æquales, vt quaterni reliquum superent quadrato numero.

Ponatur summa eorum quilibet quadratus, puta 1. Quia ergo vt ostensum est ad vigesimam primi summa excessuum tripla est summæ numerorum, erit summa excessuum 3. Oportet igitur diuidere 3. in quinque quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 1. Et quidem diuidendo bis vnitatem in duos quadratos, totus 3. diuisus erit in quinque quadratos, puta in $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{144}{169}$. $\frac{25}{169}$. 1. Sed quia quintus non est minor vnitate, adicio eum vni priorum, puta $\frac{25}{169}$. & fit $1\frac{25}{169}$. diuidendus rursus in duos alios quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 1. semissis summæ est $\frac{97}{169}$. cui proximus est quadratus $\frac{100}{169}$. à latere $\frac{10}{13}$. Ita ergo diuidendus $1\frac{25}{169}$. in duos quadratos vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{10}{13}$. Quare fingentur latera quadratorum $1 - 3$N. & $\frac{5}{13} + 7$N. fitque summa quadratorum $1\frac{25}{169} + 58$ Q. $- \frac{8}{13}$ N. æquales $1\frac{25}{169}$. vnde fit 1 N $\frac{4}{377}$. sunt ergo latera quadratorum $\frac{365}{377}$ & $\frac{173}{377}$. ipsi quadrati $\frac{133225}{142129}$. & $\frac{29929}{142129}$. Quamobrem quinque excessus sunt $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{144}{169}$. $\frac{133225}{142129}$. $\frac{29929}{142129}$. quos si auferas sigillatim ab vnitate, & residuorum semisses sumas, fient quæsiti numeri $\frac{8}{25}$. $\frac{9}{50}$. $\frac{25}{338}$. $\frac{4452}{142129}$. $\frac{56100}{142129}$.

Ita si quærantur sex numeri quadrato æquales, quorum quini reliquum superent quadrato numero, ponetur summa numerorum quilibet quadratus, puta 1. Et quia excessuum summa est quadrupla summæ numerorum, diuidetur 4. in sex quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 1. quod fiet eodem prorsus artificio. Et sic ad quotlibet numeros quæstio extendetur.

Immo res expedietur, etiamsi proponatur quilibet datus numerus diuidendus in quotlibet partes, vt omnium vna dempta super reliquam excessus sit quadratus numerus. Sed si tres tantùm partes postulentur, oportebit datum numerum diuidi posse in tres quadratos.

QVÆSTIO XVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον, ποιῇ κύβον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ς^ο α. ἕκαστος δὲ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν κύβων ζ. ὁ δὲ κύβων κς. ὁ δὲ κύβων ξγ. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιεῖ κύβον. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς^ο α. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν κ^υ ϟς. ὥστε κ^υ ϟς. ἴσοι ς^ο α. καὶ πάντα παρὰ ἀριθμὸν δ^υ ϟς. ἴσαι μ^ο α. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος. εἰ ἦσαν καὶ αἱ μ^ο ϟς. τετραγώνου, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ὅθεν ζητῶ πόθεν ἐστὶν ὁ ϟς. ἔστι δὲ τριῶν ἀριθμῶν σύνθεμα,

INVENIRE tres numeros, vt cubus summæ eorum adsciscens quemlibet ipsorum, faciat cubum. Statuatur summa trium 1 N. Quæsitorum autem alter 7 C. alter 26 C. tertius 63 C. & constat cubum summæ adscito quolibet ipsorum facere cubum. Reliquum est vt tres isti coniuncti faciant 1 N. sed tres coniuncti faciunt 96 C. Hoc ergo æquatur 1 N. & omnia per numerum diuidantur, fiunt 96 Q. æquales 1. & vnitas quidem quadratus est, ac si 96. item quadratus esset, soluta fuisset quæstio. Proinde quæro vnde 96 ortus sit, est nimirum summa

trium numerorum, quorum quilibet vnitate auctus cubum facit. Itaque eò res rediit vt inueniantur tres numeri, quorum quilibet vnitate adscita cubus fiat, sed & summa trium sit quadratus. Ponatur primi latus 1 N. + 1. secundi verò 2 − 1 N. tertij 2. cubi fient, primus quidem 1 C. + 3 Q. + 3 N. + 1. secundus 6 Q. + 8 − 1 C. − 12 N. tertius 8. Aufero ab vnoquoque vnitatem, & statuo primum 1 C. + 3 Q. + 3 N. secundum 6 Q. + 7. − 1 C. − 12 N. tertium 7. Reliquum est vt summa eorum sit quadratus, fit autem 9 Q. + 14 − 9 N. æqualis quadrato à latere 3 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{2}{15}$. erit igitur quæsitorum primus $\frac{1538}{3375}$. secundus $\frac{18577}{3375}$. tertius 7. Venio ad id quod initio propositum erat, & pono primum $\frac{1538}{3375}$ C. secundum $\frac{18577}{3375}$ C. tertium 7 C. & rursus statuo trium summam 1 N. & fiunt $\frac{43740}{3375}$ C. æquales 1 N. & omnium decimaquinta pars sumatur, & omnia per numerum diuidantur, fiunt 2916 Q. æquales 225. & fit 1 N. $\frac{15}{54}$. Ad positiones, & constat.

ὧν ἕκαστος μετὰ μονάδος μιᾶς ποιεῖ κύβον. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν ἀριθμοὺς τρεῖς ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μονάδος μιᾶς ποιῇ κύβον, ἔτι δὲ τὸ σύνθεμα τῶν τριῶν ᾖ τετράγωνος. ἐκκείσθω ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ς^ο α. μ^ο α. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ^ο β. λείψει ς^ο α. ἡ δὲ τοῦ τρίτου μ^ο β. οἱ κύβοι γίνονται. ὁ μὲν κ^υ α. δ^υ γ. ςς γ. μ^ο α. ὁ δὲ δ^υ ς. μ^ο η. λείψει κ^υ α. ςς ιβ. ὁ δὲ μ^ο η. αἴρω ἀπὸ ἑκάστου μ^ο α. καὶ τάσσω τὸν μὲν πρῶτον. κ^υ α. δ^υ γ. ςς γ. τὸν δὲ δεύτερον δ^υ ς. μ^ο ζ. λείψει κ^υ α. ςς ιβ. τὸν δὲ τρίτον μ^ο ζ. λοιπόν ἐστι αὐτοὺς συντεθέντας ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δ^υ θ. μ^ο ιδ ⋔ ςς θ. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς γ. λείψει μ^ο δ. καὶ γίνεται ὁ ς β^{ιε}. ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν πρῶτος ,αφλη^{γτοε}. ὁ δὲ [δεύτερος] α. ,ηφοζ^{γτοε}. ὁ δὲ τρίτος ζ. ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὸν μὲν κ^υ ,αφλη^{γτοε}. τὸν δὲ κ^υ α. ,ηφοζ^{γτοε}. τὸν δὲ κ^υ ζ. καὶ πάλιν τάσσομεν τοὺς τρεῖς ς^ο α. καὶ γίνονται κύβοι δ. ,γψμ^{γτοε}. ἴσοι ς^ο α. πάντων τὸ πεντεκαιδέκατον καὶ παρὰ ἀριθμόν, καὶ γίνονται δ^υ ,βϡις. ἴσαι μ^ο σκε. καὶ γίνονται ὁ ς^ο ιε^{νδ}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XVIII.

PENDET omnino solutio quæstionis huius, à lemmate assumpto, quo scilicet quæruntur tres cubi vnitate multati, quorum summa sit quadratus numerus. Et ponit Diophantus latus primi 1 N + 1. latus secundi 2 − 1 N. vbi numeri contrario signo afficiuntur, vt etiam in cubis, numeri cuborum contrario signo reperiantur affecti, cùm hinc reperiatur + 1 C. inde verò − 1 C. vnde fit vt in summa cuborum cubis se mutuo elidentibus, remaneant solùm Quadrati, Numeri, & Vnitates; cùm autem tertij cubi latus ponatur quilibet vnitatum numerus, puta 2. eius cubus vnitate multatus, puta 7. est certus vnitatum numerus, qui additus summæ priorum cuborum vnitate multatorum, non constituit diuersam speciem, quia in illa summa,

vt dictum est, reperiuntur vnitates; sic fit summa trium cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 14. − 9 N. quæ quadrato æquari debet. Hoc verò fieri non posset, si numerus quadratorum 9. non esset quadratus, vt euidens est, quod tamen non animaduertit Xilander. Vt ergo positiones arte certa, non casu instituantur, videndum vnde in summa cuborum contentus numerus quadratorum proueneriт. Atqui est triplum summæ vnitatum quæ ponuntur in primo & secundo latere, quia videlicet in primo latere ponitur 1. in secundo 2. quorum summa 3. cuius triplum 9. Idcirco 9 Q. reperiuntur in summa cuborum. Igitur cùm in primo latere ponetur 1. cuius triplum 3: oportebit in secundo latere constituere tot vnitates, quarum triplùm adsumpto 3. faciat quadratum, id autem facillimè fiet, infinitisque modis si à quolibet quadrato auferatur 3. & residui triens sumatur, vt si à 9. auferas 3. residui triens 2. poni poterit in secundo latere, vt fecit Diophantus. Rursus si à 36. auferas 3. residui triens 11. congruet proposito, & poni poterit secundum latus 11 − 1 N. & sic in infinitum. Tertius quoque cubus poni potest quilibet vnitatum numerus cubicus; ita si loco 8. quem posuit Diophantus, sumas 27. erit summa trium cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 33 − 9 N. æqualis quadrato, cuius latus si fingas 3 N − 6. fiet 1 N $\frac{1}{9}$. & diuersa omnino continget solutio ab ea quam tradit Diophantus, quam sanè in falsis numeris assignauit Xilander, in eo allucinatus quod putauit 1 N. fieri $\frac{12}{5}$. cùm fiat $\frac{5}{18}$. Quare tres quæsiti numeri sunt $\frac{1538}{157464}$. $\frac{18577}{157464}$. $\frac{23625}{157464}$. Quorum summa est $\frac{5}{18}$. cuius cubus $\frac{125}{5832}$. quo addito ad singulos numeros, fiunt cubi $\frac{4913}{157464}$. $\frac{21952}{157464}$. $\frac{27000}{157464}$. quorum latera $\frac{17}{54}$. $\frac{28}{54}$. $\frac{30}{54}$.

Animaduersione præterea dignũ est numeri 9 Q + 14 − 9 N. latus cautè fingendum esse. Quia enim latus secundi cubi positum est 2 − 1 N. necesse est 1 N. minorem esse quàm 2. fiet autem valor numeri fingendo latus quadrati 3 N − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 14. diuidendo harum vnitatum quadratum multatum numero 14. per sextuplum earundem vnitatum multatum numero 9. Oportet ergo quotientem hunc minorem esse quàm 2. hoc est $\frac{1Q-14}{6N-9}$ minor est quàm 2. & tandem 1 Q + 2. minor est quàm 12 N. Qua æquatione per approximationem resoluta, fit 1 N 11 $\frac{9}{10}$. Ponetur igitur fictitium latus 3 N − tot vnitatibus quæ sint minores quàm 11 $\frac{9}{10}$. dum earum quadratus excedat 14. Ponit Diophantus 3 N − 4. vnde fit 1 N. $\frac{2}{15}$.

Cæterùm ex ipsius operationis ductu manifestum est; quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Nam verbi gratia propositum sit inuenire quatuor numeros, vt cubus summæ eorum, quouis adsumpto cubum faciat. Sanè quærendi erunt quatuor cubi, quorũ vnitate multatorũ sũma sit quadratus numerus. Ponatur primi latus 1 N + 1. secundi 2 − 1 N. tertij 2. quarti 3. Erit summa cuborũ vnitate multatorũ 9 Q. + 40 − 9 N. æqualis quadrato. Quod si Numeri determinationẽ quæras inuenies fingendũ latus 3 N. − tot vnitatib. quæ sint minores quã 13 $\frac{1}{3}$. ita vt earũ quadratus excedat 40. Ponãtur ergo 7. & sit latus fictitiũ 3 N. − 7. fiet 1 N. $\frac{3}{11}$. Erũt igitur quatuor cubi $\frac{2744}{1331}$. $\frac{6859}{1331}$. 8. 27. & à singulis si auferas vnitatem, & apponas signum cuborum residuis, erunt quatuor quæsiti numeri $\frac{1413}{1331}$ C. $\frac{5528}{1331}$ C. 7 C. 26 C. Quorum summa in minimis $\frac{4624}{121}$ C. æquatur 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{11}{68}$. Ad Positiones, erunt quæsiti numeri $\frac{1880703}{418508992}$. $\frac{7357768}{418508992}$. $\frac{12400927}{418508992}$. $\frac{46060586}{418508992}$. quorum summa vtique est $\frac{11}{68}$. cuius cubus $\frac{1331}{314432}$. adscito quolibet ipsorum, cubos facit $\frac{3652264}{418508992}$. $\frac{9129329}{418508992}$. $\frac{14172488}{418508992}$. $\frac{47832147}{418508992}$. quorum latera $\frac{154}{748}$. $\frac{209}{748}$. $\frac{242}{748}$. $\frac{363}{748}$.

QVÆSTIO XIX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος λείψας ἕκαστον ποιῇ κύβον. τετάχθωσαν πάλιν ὁ τρεῖς ς ᾱ. καὶ αὐτῶν ὁ μὲν κύβων ζ η^{ων}. ὁ δὲ κύβων κς κζ^{ων}. ὁ δὲ κύβων

INVENIRE tres numeros, vt cubus summæ eorum, quouis ipsorum detracto, faciat cubum. Ponatur rursus trium summa 1 N. & ipsi $\frac{7}{8}$ C. $\frac{26}{27}$ C. $\frac{63}{64}$ C.

superest vt tres coniuncti æquentur 1 N. fit ergo $\frac{4877}{1764}$ C. æquale 1 N. & omnia per numerum diuidantur, fit $\frac{4877}{1764}$ Q. æquale 1. est autem 1. quadratus. Oportebat ergo & numerum quadratorum esse quadratum: vnde autem is natus est? Quod à ternario subducti sunt tres cubi, quorum quilibet minor est vnitate. Eò itaque res redit, vt inueniantur tres cubi, quorum quilibet sit minor vnitate, summa autem ipsorum à ternario sublata, faciat quadratum. Et quia volumus cuborum quemque minorem esse vnitate, si statuamus tres numeros simul vnitate minores, multo minores singuli erunt vnitate. Sicautem quadratum qui relinquetur, oportebit maiorem esse binario. Statuatur quadratus qui relinquitur 2 ¼. Oportet igitur ¾ diuidere in tres cubos, & horum multiplicia secundum aliquos cubos diuisa. Esto secundum 216. Oportet igitur vt diuidamus 162. in tres cubos. At 162. componitur ex cubo 125. & interuallo duorum cuborum 64. & 27. Habemus autem in porismatis, omnium duorum cuborum interuallum componi ex duobus cubis. Recurramus ad propositum initio, & sumamus vnumquemque cuborum inuentorum, & quolibet ab vnitate subtracto, residua statuamus pro quæsitis numeris, & sit summa 1 N. Ita fiet vt cubus summæ, quouis ipsorum de-

ζγ^{ξδ}. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ϛ^{οι} α. γίνεται κυβικὸν δωοζ ἴσον ϛ^{οι} α. πάντα παρὰ ἀριθμόν, καὶ γίνεται δυναμοστὸν δωοζ ἴσον μ° α. καὶ ἐστιν ἡ μονὰς τετράγωνος. δεήσει ἄρα καὶ τὰς δυνάμεις εἶναι τετράγωνον. πόθεν ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν δ° ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς κύβους, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος μιᾶς. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς κύβους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν, ἐλάσσων ᾖ μ° α. τὸ δὲ σύνθεμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν κύβον ἐλάσσονα εἶναι μονάδος μιᾶς, ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας μονάδος α. πολλῷ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων μονάδος α. ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος τετράγωνος μείζων εἶναι δυάδος. τετάχθω καταλειπόμενος τετράγωνος μ° β. α^{δ}. δέησεν τὰ γ^{δ}. διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους. καὶ κατὰ τούτων πολλαπλάσια κατά τινων κύβων διαιρεθέντων. ἔστω δὴ κατὰ Ⓨ σιϛ. ὀφείλομεν οὖν τὸν ρξβ. διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους. σύγκειται δὴ ὁ ρξβ. ἔκ τε κύβου τοῦ ρκε. καὶ δύο κύβων ὑπεροχῆς τοῦ τε ξδ. καὶ τοῦ κζ. ἔχομεν δὴ ἐν τοῖς πορίσμασιν, *ὅτι πάντων δύο κύβων ἡ ὑπεροχὴ κ * ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν ἕκαστον κύβων εὑρεθέντων. τοὺς δὲ τρεῖς ἀριθμὸν α. καὶ συμβήσεται Ⓨ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβων λείψαντα ἑκα-

σον, ποιεῖν κύβον. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ϛ᾽ α. γίνονται δὲ οἱ τρεῖς κ᾽ β. α δ. ταῦτα ἴσα ϛ᾽ α. ὅθεν γίνεται ὁ ϛ᾽ μ᾽ β γ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

tracto cubum faciat. Restat vt tres simul æquentur 1 N. fit autem trium summa 2 $\frac{1}{4}$ C. Hoc ergo æquatur 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{2}{3}$. Ad positiones.

IN QVAESTIONEM XIX.

HÆC propositio est de numero earum, quas vt ad nos peruenerunt, fateor me non satis assequi. Quamuis enim de illius solutione satis mihi constet, vt infrà patebit, duo tamen sunt quæ totam eius tractationem valde imperfectam mihi videri faciunt. Primum enim licet ingeniosè inferat Diophantus inueniendos esse tres cubos, quorum quilibet sit vnitate minor, ita vt summa eorum à ternario sublata relinquat quadratum, vnde concludit curandum esse vt tres cubi simul sint vnitate minores, sic enim quilibet multo magis erit vnitate minor, quare sequitur quadratum qui relinquitur, summam cuborum auferendo à ternario, debere esse maiorem quàm 2. minorem quàm 3. licet inquam hæc subtiliter edisserat Diophantus, non docet tamen quomodo talis inueniendus sit quadratus, & cur 2 $\frac{1}{4}$. sumat potiùs quàm alium quemlibet ex infinitis qui cadunt inter 2. & 3. Certè, vt ex processu apparet, talis deligendus est quadratus, quo à ternario sublato, relinquatur numerus ex tribus cubis compositus. Id ergo qui fieri possit arte certa, docere debuit Diophantus, néque enim in promptu est si loco quadrati 2 $\frac{1}{4}$. sumatur quadratus 2 $\frac{1}{4}$. quomodo residuum de 3. puta $\frac{3}{4}$. diuidi possit in tres cubos, eademque de aliis ratio. Quamobrem casu factum videtur, vt sumpserit author 2 $\frac{1}{4}$. quo de 3. sublato relinquitur $\frac{3}{4}$. ex tribus cubis compositus.

Deinde porisma, quod hîc assumitur, quale sit non est facile diuinare, cùm Græca Diophanti hoc loco mutila sint. Si verò libeat amplecti quod nostra versione exhibemus, sanè docuimus ad secundam quarti. Duorum cuborum interuallum diuidi posse in duos cubos, dummodo maior datorum cuborum excedat duplum minoris. Sed quomodo omnium duorum cuborum interuallum diuidatur in duos cubos, ignorum mihi adhuc. Nam nec operationes loco citato allatæ, nec canon ibidem traditus locum habent, cùm duplum minoris cubi excedit maiorem. Itaque penes eruditos iudicium esto, vtrum ex propositionis huius deprauatione huiusmodi difficultates ortum habeant, an verò ipsi Diophanto imputandæ sint, qui cùm fortè quadratum 2 $\frac{1}{4}$. inuenisset quo de 3. sublato superest $\frac{3}{4}$. compositus ex tribus cubis, arduum problema vtcumque potuit, explicauit, melioribus destitutus auxiliis. Nos, quod superest, illius solutionem afferemus à Diophanto prætermissam. Quoniam diuidere oportet $\frac{3}{4}$. in tres cubos, reducatur ad denominationem cubicam, puta ad $\frac{162}{216}$. Itaque cùm denominator sit cubus, superest vt numeratorem 162. diuidamus in tres cubos. Porro 162. componitur ex cubo 125. & ex 37. interuallo cuborum 27. & 64. Quare cùm duplum minoris non superet maiorem, poterit 37. diuidi in duos cubos per Canonem primæ earum quas ad secundam quarti attulimus. Quod fiet hoc pacto. Ducito ter vtrumque datorum cuborum in latus alterius, fient 324. & 576. quos diuide per summam cuborum, fiunt $\frac{324}{91}$. $\frac{576}{91}$. Tum aufer priorem à maiore latere 4. & aufer minus latus 3. à posteriore, remanent quæsitorum cuborum latera $\frac{40}{91}$. & $\frac{303}{91}$. sunt ergo cubi $\frac{64000}{753571}$. & $\frac{27818127}{753571}$. quorum summa 37. his ergo adnumerando 125. fit trium cuborum summa 162. vt ergo $\frac{162}{216}$. diuidatur in tres cubos, diuidemus sigillatim tres inuentos cubos per denominatorem 216. & fient quæsiti cubi $\frac{125}{216}$. $\frac{8000}{20346417}$. [illegible]. à lateribus $\frac{5}{6}$. $\frac{20}{273}$. $\frac{303}{546}$. & vnumquemque cubum auferendo ab vnitate, relinquuntur $\frac{91}{216}$. $\frac{20338417}{20346417}$. & [illegible]. Statuamus igitur quæsitorum numerorum summam 1. N. ipsos autem $\frac{91}{216}$ C. $\frac{20338417}{20346417}$ C. [illegible] C. nam horum vnoquoque ab 1 C. detracto, relinquitur cubus, vnus scilicet ex tribus cubis suprà allatis. Superest vt horum summa sit 1 N. est autem 2 $\frac{1}{4}$ C. Igitur fit 1 N. $\frac{2}{3}$. cuius cubus $\frac{8}{27}$. suntque quæsiti numeri ad eãdem denominationem redacti [illegible]. [illegible]. [illegible]. quorum summa est vtrique $\frac{2}{3}$. & auferendo vnumquemque à cubo summæ, hoc est à $\frac{8}{27}$. seu à [illegible]. relinquuntur cubi [illegible]. [illegible]. [illegible]. quorum latera [illegible]. [illegible]. [illegible].

In

QVÆSTIO XX.

INVENIRE tres numeros, vt cubus summæ eorum, à quolibet ipsorum detractus, cubum faciat. Ponatur rursus trium summa 1 N. ipsi autem 2 C. 9 C. 28 C. Reliquum est hos tres simul æquari 1 N. sed hi tres simul sunt 39 C. Igitur 39 C. æquantur 1 N. omnia per numerum diuidantur. Igitur 39 Q. æquantur 1. & si quadratorum numerus foret quadratus, soluta esset quæstio. Est autem 39. summa trium cuborum adiecto ternario. Oportet ergo inuenire tres cubos, quorum summa adiecto ternario faciat quadratum. Statuatur primi cubi latus 1 N. secundi 3 - 1 N. tertij quotlibet vnitatum, ac sit 1. Itaque fit summa trium cuborum 9 Q. + 28 - 27 N. cui addendo 3. fit 9 Q. + 31 - 27 N. æquale quadrato à latere 3 N. - 7. & fit 1 N. $\frac{6}{5}$. Tantum est latus primi cubi, alterius verò latus est $\frac{9}{5}$. reliqui 1. Porrò cuilibet cuborum ab his ortorum addo 1. & venio ad propositum initio, statuo quemlibet totidem cuborum. Restat vt trium summa æquetur 1 N. fit autem summa trium 11 $\frac{14}{25}$ C. Hoc æquatur 1 N. & fit 1 N. $\frac{5}{17}$. Ad positiones.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ κύβον. τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς ς^ο α. τῶν δὲ τριῶν ὁ μὲν κ^υ β. ὁ δὲ κ^υ θ. ὁ δὲ κ^υ κη. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς^ο α. ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσὶ κύβοι λθ. ὥστε κ^υ λθ. ἴσοι ς^ο α. πάντα παρὰ ς^ν. ὥστε δυνάμεις λθ. ἴσαι μ^ο α. καὶ εἰ ἦσαν αἱ δυνάμεις λθ. [τετράγωνος, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον, ἔστι δὲ ὁ λθ.] τριῶν κύβων τὸ σύνθεμα μετὰ μ^ο τριῶν. δεήσει ἄρα εὑρεῖν τρεῖς κύβους, ὧν τὸ σύνθεμα μετὰ μ^ο γ. ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθωσαν ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς^ο α. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου. μ^ο γ. λεῖψει ς^ο α. ἡ δὲ τοῦ λοιποῦ μονάδων τινῶν. ἔστω δὴ μ^ο α. καὶ γίνεται τὸ σύνθεμα τῶν τριῶν κύβων. δ^ν θ. μ^ο κη. λεῖψει ςς κζ. ταῦτα μετὰ μ^ο γ. γίνεται δ^ν θ. μ^ο λα. λεῖψει ςς κζ. ἴσον τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς γ. λεῖψει μ^ο ζ. καὶ γίνεται ὁ ς^ο μ^ο ς^ε. [ἡ ἔστι πλευρὰ τοῦ πρώτου κύβου] ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου θ^ε. ἡ δὲ τοῦ λοιποῦ μονὰς α. καὶ τῷ ἀπὸ ἑκάστου τούτων κύβῳ προστίθεμαι μ^ο α. καὶ ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσω ἕκαστον κύβων τοσούτων. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς^ο α. γίνονται οἱ τρεῖς κ^υ ια. ιδ^{κε}. ταῦτα ἴσα ς^ο α. καὶ γίνεται ὁ ς^ο ε^{ιζ}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

IN QVAESTIONEM XX.

MALE' assignat Xilander valorem Numeri $\frac{17}{5}$. cùm is sit $\frac{5}{17}$. nam à lateribus $\frac{6}{5}$. $\frac{9}{5}$ & 1. fiunt cubi $\frac{216}{125}$. $\frac{729}{125}$. & 1. quorum cuilibet si addatur vnitas, & præfigatur nota C. statuemus pro quæsitis numeris $\frac{341}{125}$ C. $\frac{854}{125}$ C. & 2 C. quorum summa fit $\frac{1445}{125}$ C. æqualis 1 N. ac proinde $\frac{289}{25}$ æquatur vnitati, vnde fit 1 N. $\frac{5}{17}$. summa trium quæsitorum numerorum, suntque ipsi numeri $\frac{341}{4913}$. $\frac{854}{4913}$. $\frac{250}{4913}$. Nam si ab vnoquoque auferatur cubus summæ, puta $\frac{125}{4913}$ remanent cubi $\frac{216}{4913}$. $\frac{729}{4913}$. & $\frac{125}{4913}$. quorum latera $\frac{6}{17}$. $\frac{9}{17}$. $\frac{5}{17}$.

Præterea in soluendo lemmate quo quæruntur tres cubi, quorum summa adsumpto 3. faciat quadratum, non benè docet Xilander cur secundi cubi latus ponatur 3 – 1 N. ait enim suspectum esse binarium, eo quod in sequente propositione, vbi lemma propositum infinitè soluitur, necesse est valorem Numeri poni maiorem binario. Hoc verò ad præsentem quæstionem nil facit, vt ex iis quæ ad sequentem dicturi sumus apparebit. Et hîc non minus suspecti sunt 4. 5. 6. aliique infiniti, quàm 2. Talis enim ponendus est in latere secundi cubi vnitatum numerus, cuius triplum sit quadratus numerus. Patet enim ex iis quæ sæpè diximus de cubi efformatione, numerum quadratorum qui in hoc cubo reperietur gigni ex 1 Q. quadrato ex – 1 N. in triplum vnitatum adiunctarum. Necesse est autem hunc quadratorum numerum esse quadratum, alioquin quomodo fingi posset latus numeri 9 Q. + 31 – 27 N. si 9. quadratorum numerus non esset quadratus? Oportet igitur vnitatum numerum qui statuitur in latere secundi cubi esse trientem alicuius quadrati, puta 3. vel 12. vel 27. & sic poterat hoc latus poni non solùm 3 – 1 N. sed etiam 12 – 1 N. vel 27. – 1 N. & sic aliis modis infinitis. Sed & in fingendo latere quadrati 9 Q. + 31 – 27 N. magna cautio est adhibenda. Cùm enim secundi cubi latus positum sit 3 – 1 N. euidens est 1 N. minorem esse debere ternario. Fiet autem valor Numeri fingendo latus quadrati 3 N. – tot vnitatibus, quarum quadratus superet 31. diuidendo scilicet harum vnitatum quadratum multatum numero 31. per sextuplum earundem multatum numero 27. Quare oportet $\frac{1Q.-31}{6N.-27}$ minorem esse ternario, vnde fit 1 Q. – 31. minor quàm 18 N. – 81. & tandem 1 Q. + 50. minor quàm 18 N. Qua æquatione resoluta fit 1 N. minor quàm $14\frac{1}{2}$. Ponentur ergo in latere fictitio tot vnitates, vt minores sint quàm $14\frac{1}{2}$ dum earum quadratus exeedat 31. sic posuit Diophantus 7. & finxit quadratum à latere 3 N. – 7.

Itaque tripliciter variari possunt positiones. Primò enim in latere secundi cubi poni potest quilibet vnitatum numerus qui sit triens alicuius quadrati, vt docuimus.

Secundò pro latere tertij cubi poni potest quilibet vnitatum numerus.

Denique quadrati qui fit ex summa cuborum ternario aucta, latus diuersimodè fingi potest, vt in hypothesi Diophantæa statui poterit 3 N. – quotlibet vnitatibus quæ non sint minores quàm 6. nec maiores quàm 14.

Cæterùm euidens est eodem prorsus artificio quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Etenim propositum sit inuenire quatuor numeros, vt cubus summæ, à quolibet detractus, cubum relinquat. Prius ergo inuenientur quatuor cubi quorum summa quaternario aucta cubum faciat, esto primi latus 1 N. secundi 3 – 1 N. tertij 1. quarti 2. fiet summa cuborum quaternario aucta 9 Q. + 40 – 27 N. æqualis quadrato. Quod si Numeri quæras determinationem, inuenies quadrati latus fingendum 3 N. – tot vnitatibus quæ sint minores quàm $15\frac{1}{3}$. dum earum quadratus excedat 40. Fingatur ergo 3 N. – 7. fiet 1 N. $\frac{3}{5}$ primi scilicet cubi latus, secundi verò latus erit $\frac{12}{5}$. tertij 1. quarti 2. Porrò cuilibet cuborum ab his ortorum adiicio 1. & præfigo notam C. & statuo quæsitos numeros $\frac{152}{125}$ C. $\frac{1853}{125}$ C. 2 C. 9 C. Restat vt trium summa æquetur 1 N. Igitur $\frac{676}{25}$ C. æquatur 1 N. & fit 1 N. $\frac{5}{26}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri $\frac{152}{17576}$. $\frac{1853}{17576}$. $\frac{250}{17576}$. $\frac{1125}{17576}$. quorum summa $\frac{5}{26}$. cuius cubum $\frac{125}{17576}$. si auferas à quolibet ipsorum numerorum, remanent cubi $\frac{27}{17576}$. $\frac{1728}{17576}$. $\frac{125}{17576}$. $\frac{1000}{17576}$. à lateribus $\frac{3}{26}$. $\frac{12}{26}$. $\frac{5}{26}$. $\frac{10}{26}$.

QVÆSTIO XXI.

INVENIRE tres numeros quadrato æquales, vt cubus summæ eorum adsumens vnumquemque, faciat quadratum. Ponatur summa trium, vt sit quadratus 1 Q. & eorum qui quæruntur primus 3 CC. secundus 8 CC. tertius 15 CC. & contingit cubum summæ trium quolibet ipsorum adsumpto, facere quadratum. Restat vt tres simul æquentur 1 Q. sed tres simul conficiunt 26 CC. Igitur 26 CC. æquantur 1 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt 26 QQ. æquales 1. Et vnitas quidem quadratus est latus habens quadratum, ergo & 26 QQ. quadratum esse oportet latus habentem quadratum. Atqui multitudo ista quadratoquadratorum è tribus conflata est numeris, quorum quiuis adiecta vnitate facit quadratum. Ergo inueniendi sunt tres numeri, quorum quiuis adiecta vnitate faciat quadratum, porrò summa trium quadratus sit latus habens quadratum. Ponatur vnus quæsitorum 1 QQ. - 2 Q. alter 1 Q. + 2 N. Reliquus 1 Q. - 2 N. & quiuis horum adscita vnitate facit quadratum. Ac præterea trium summa est quadratus latus habens quadratum. Ita in numeris indefinitis soluta est quæstio. Ponatur ergo 1 N. 3. Erit igitur vnus quæsitorum 63. secundus 15. tertius 3.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους [τετραγώνῳ] ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ἵνα ᾖ τετράγωνος δυ α̅. καὶ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν κυκυ γ̅. ὁ δὲ κυκυ η̅. ὁ δὲ κυκυ ιε̅. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, προσλαβόντα ἕκαστον ποιεῖν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι δυ α̅. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσὶ κυκυ κϛ̅. ταῦτα ἴσα δυ α̅. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν α̅. γίνονται δυδυ κϛ̅. ἴσαι μο α̅. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος πλευρὰν ἔχων τετράγωνον. ὥστε ἄρα δυδυ κϛ̅. δεήσει εἶναι τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον. γέγονε δὲ τὸ τῶν εἰρημένων πλῆθος τῶν δυναμοδυναμέων, ἐκείνων τριῶν ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος μετὰ μο α̅. ποιεῖ τετράγωνον. [ἀπήχθη] οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος μετὰ μονάδος α̅. ποιῇ τετράγωνον.] ἔτι δὲ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ᾖ τετράγωνος πλευρὰν ἔχων τετράγωνον. τετάχθω εἷς τῶν ζητουμένων δυδυ α̅. λείψει δυ β̅. ὁ δὲ ἕτερος δυ α̅. ςς̅ β̅. ὁ δὲ λοιπὸς δυ α̅. λείψει ςς̅ β̅. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μο α̅. ποιεῖν τετράγωνον. ἔτι δὲ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι τετράγωνον [πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον] καὶ ἐν ἀορίστοις ἀριθμοῖς λέλυται τὸ ζητούμενον. ὑποκείσθω οὖν ὁ ς μο γ̅. ἔσται ἄρα εἷς τῶν ζητουμένων μο ξγ̅. ὁ δὲ δεύτερος μο ιε̅. ὁ δὲ τρίτος μο γ̅.

ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν πάλιν τοὺς τρεῖς δυν. α. τῶν δὲ ζητουμένων ὁ μὲν ἔσται κ. κ. ξγ. ὁ δὲ κ. κ. ιε. ὁ δὲ κ. κ. γ. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι δυνάμει μιᾷ, καὶ γίνονται κυβόκυβοι πα. ἴσοι δυν. α. καὶ γίνεται ὁ ς. α γ. τὰ λοιπὰ δῆλα.

Recurramus ad initiò propositum, & ponamus rursus trium summam 1 Q. Quæsitorum autem primus erit 63 CC. secundus 15 CC. tertius 3 CC. Restat vt trium summa æquetur 1 Q. & fiunt 81 CC. æquales 1 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Reliqua patent.

IN QVAESTIONEM XXI.

INGENIOSISSIME Diophantus soluit infinitè propositum lemma quo quæruntur tres quadrati vnitate deminuti, quorum summa sit numerus quadratoquadratus. Cùm enim finxisset quadratū à latere 1 Q. − 1. puta 1 QQ. − 2 Q. + 1. Inde ablata vnitate sumit 1 QQ. − 2 Q. pro primo quæsitorum. Tum verò ita ponit secundum & tertium, vt elidendo in additione tum quadratos, tum numeros, remaneat trium summa 1 QQ. Ideo formans quadratos à lateribus 1 N. + 1. & 1 N. − 1. & à singulis auferendo 1. ponit secundum 1 Q. + 2 N. tertium 1 Q. − 2 N. quorum summa 2 Q. qua addita primo, hoc est ad 1 QQ. − 2 Q. fit vtique trium summa 1 QQ. Itaque indefinitè soluta est quæstio, & pro valore Numeri sumi potest quilibet numerus maior quàm 2. quia enim tertius positus est 1 Q. − 2 N. patet 1 Q. maiorem esse debere quàm 2 N. seu quod idem est 1 N. maiorem esse debere quàm 2. Hinc porro liquet quæstionem infinitas recipere solutiones. Possunt etiam ipsæ lemmatis positiones variari vt libet, dum formetur quadratus à quolibet Quadratorum numero quadrato − 1. Verbi gratia, formetur à 4 Q. − 1. erit quadratus 16 QQ. − 8 Q. + 1. vnde ablata vnitate statuetur primus 16 QQ. − 8 Q. ac proinde secundus 4 Q. + 4 N. tertius 4 Q. − 4 N. vt sit trium summa 16 QQ.

Restat vt solutionem quæstionis proferamus quam omisit Diophantus. Inuentis numeris 63. 15. 3. soluentibus lemma propositum. Recurro ad initium & pono trium quæsitorum numerorum summam 1 Q. ipsos verò 63 CC. 15 CC. 3 CC. quorum summa fit 81 CC. æqualis 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{1}{3}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{63}{729}$. $\frac{15}{729}$. $\frac{3}{729}$. quorum summa $\frac{1}{9}$ quadratus vt postulabatur, cuius cubus $\frac{1}{729}$ quem addendo singulis numeris, fiunt quadrati $\frac{64}{729}$. $\frac{16}{729}$. $\frac{4}{729}$. à lateribus $\frac{8}{27}$. $\frac{4}{27}$. $\frac{2}{27}$.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ τῶν συγκειμένων ἐκ τῶν τριῶν κύβων β. λείψῃ ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. καὶ γίνεται ἡμῖν πάλιν τὸν β. διελεῖν ὡς καὶ πρότερον. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τοῦ δυάδος κυ. κυ. μονάδας η. δεῖ οὖν ἀπὸ μο. η. ἀφελεῖν ἕκαστον, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δεήσει οὖν τὸν κβ διελεῖν εἰς τρεῖς τε-

INVENIRE tres numeros dato numero æquales, vt cubus summæ eorum, quolibet sigillatim detracto, quadratum faciat. Rursus diuidendus est binarius vt prius. Porrò binarij cubus est 8. Proinde oportet à 8. vnumquemque detrahere, & facere quadratum. Oportet igitur 22. diuidere in tres quadra-

ros, quorum quiliber maior sit quàm 6. Et si abs 8. quemlibet detrahamus, inueniemus tres quæsitos numeros. Est autem iam ostensum quomodo oporteat diuidere 22. in tres quadratos, quorum quiliber sit maior senario.

τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ἢ μ ϛ. καὶ ἐὰν ἀπὸ μ η. ἀφαιρῶμεν ἕκαστον τούτων, εὑρήσομεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς τρεῖς. τοῦτο δὲ προδέδεικται πῶς δεῖ τὸν κβ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μ ϛ.

IN QVAESTIONEM XXII.

QVAM malè affectus sit hoc loco Diophantus, æquo lectori æstimandum relinquo, vbi nec solutio ponitur, nec operatio propositioni respondet, & quæstiones aliquot integras desiderari satis indicant verba illa. *Rursus diuidendus est binarius vt prius.* in qua enim superiorum quæstionum locutus est Diophantus de huiusmodi binarij diuisione? Itaque quantum certissimis coniecturis assequi possum, existimo hic tres omnino quæstiones intercidisse, in quibus binarij diuisione vtendum fuit, & quarum cum ista magna erat affinitas, vt facilè hinc erroris ansam nactus sit imperitus librarius. Age igitur immeritò solum vertere iussas quæstiones, ab exilio reuocemus.

QVAESTIO PRIMA.

Inueniantur tres numeri quadrato æquales, vt cubus summæ eorum singulis seorsim detractis, quadratum relinquat.

Statuatur summa numerorum 1 Q. vt sit quadratus. Ipsi vero numeri sint $\frac{3}{4}$ CC. $\frac{8}{9}$ CC. $\frac{15}{16}$ CC. sic enim quolibet à cubo summæ detracto, relinquitur quadratus. Superest vt trium summa, puta $\frac{371}{144}$ CC. æquetur 1 Q. vnde tandem fit $\frac{371}{144}$ QQ. æqualis vnitati. Oporteret ergo numerum Quadratoquadratorum esse quadratum. At quadratoquadratorum numerus est summa trium numerorũ, quorum quilibet ab vnitate detractus relinquit quadratum. Eò itaque redacti sumus vt inueniamus tres numeros, quorum singuli vnitate sint minores, & quorum summa sit numerus quadratoquadratus; quaque à ternario sublata relinquantur tres quadrati minores singuli vnitate. Vt ergo singuli trium numerorum sint minores vnitate, & eorum summa sit numerus Quadratoquadratus, ponatur eorum summa 1. Igitur reliquorum trium quadratorum summa erit 2. Quare superest vt diuidamus 2. in tres quadratos, quorum quilibet sit vnitate minor. id autem facilè fit per ea quæ ostensa sunt ad decimam quartam huius, suntque huiusmodi quadrati $\frac{16}{25}$. $\frac{75369}{105625}$. $\frac{68281}{105625}$. & quolibet ab vnitate sublato, supersunt quæsiti numeri $\frac{9}{25}$. $\frac{30256}{105625}$. & $\frac{37344}{105625}$. Posita ergo summa numerorum 1 Q. ponantur ipsi numeri $\frac{9}{25}$ CC. $\frac{30256}{105625}$ CC. $\frac{37344}{105625}$ CC. Superest vt horum summa puta 1 CC. æquetur 1 Q. vnde fit 1 N. 1. suntque quæsiti numeri ipsi $\frac{9}{25}$. $\frac{30256}{105625}$. $\frac{37344}{105625}$.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire tres numeros quadrato æquales, vt cubus summæ illorum à quolibet detractus, quadratum relinquat.

Esto summa trium numerorum 1 Q. Ipsi verò sint 2 CC. 5 CC. 10 CC. vt auferendo à singulis cubum summæ, remaneant quadrati. Restat vt trium summa sit 1 Q. est autem 17 CC. ergo tandem 17 Q Q. æquantur 1. Oporteret igitur 17. esse quadratoquadratum. Atqui 17. est summa trium quadratorum vnitate auctorum. Eò itaque redacti sumus vt inueniamus tres quadratos, quorum summa ternario aucta, conficiat quadratoquadratum. Id verò nil aliud est quàm à quouis quadratoquadrato auferre ternarium, & residuum diuidere in tres quadratos. Sumatur ergo quadratoquadratus 16. cùm is ternario detracto relinquat 13. oportet diuidere 13. in tres qua-

dratos. sunt autem 9. $\frac{36}{25}$. $\frac{64}{25}$. quibus sigillatim addendo 1. statuemus eos in cubocubis, eritque primus quæsitorum 10 C C. secundus $\frac{61}{25}$ C C. tertius $\frac{89}{25}$ C C. Quorum summa 16 C C. æquatur 1 Q. vnde fit 1 N $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri sub eadem denominatione $\frac{250}{1600}$. $\frac{61}{1600}$. $\frac{89}{1600}$. quorum summa $\frac{1}{4}$. quadratus est, & eius cubus $\frac{1}{64}$. detractus à quolibet numerorum, relinquit quadratos $\frac{9}{64}$. $\frac{9}{400}$. $\frac{1}{25}$.

QVAESTIO TERTIA.

Inuenire tres numeros dato numero æquales, vt cubus summæ eorum, quolibet adiecto, fiat quadratus. Sit datus numerus 2.

Oportet igitur diuidere 2. in tres partes, vt cuilibet addendo 8. fiat quadratus. Quamobrem eo res rediit vt diuidamus 26. qui fit ex triplo ipsius 8. ad sumente binarium, in tres quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 8. Hoc autem quî fieri possit iam ostensum est. Suntque tres quadrati 9. [illegible]. [illegible]. à quibus sigillatim auferendo 8. restant quæsitæ binarij partes. 1. [illegible]. [illegible].

Sanè post hanc quæstionem, rectè subijci vigesimam secundam Diophanti, vt eam versione nostra expressimus, res ipsa clamat, cum in ea binarius simili ratione diuidendus proponatur, additione in subtractionem mutata. Sed & numerus 22. in textu Græco manifestè habetur, quamuis deinde incuria librarij mutetur in 26. Nam Græca Diophanti verba vt habentur in codice Regio exhibuimus, quò coniectura nostra omnibus euidentior appareat, cùm ex nostra versione mendas omnes tollere facile sit. Cæterùm operatio Diophanti satis est perspicua, quia enim à cubo 8. auferendæ sunt sigillatim tres binarij partes, ita vt semper remaneat quadratus, cùm hoc idem sit atque à triplo ipsius 8. puta à 24 auferre binarium, rectè infertur numerum 22. esse diuidendum in tres quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 6. minor autẽ quàm 8. Hoc vt prestẽ sumo trientem de 22. puta 7 $\frac{1}{3}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratũ faciat, ea est $\frac{1}{576}$. & fit quadratus $\frac{4225}{576}$. à latere $\frac{65}{24}$. Oportet ergo ita diuidere 22. in tres quadratos, vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{65}{24}$. Diuiditur autem suaptè natura in tres quadratos, quorum latera 3. 3. 2. Quare per adæqualitatem fingentur quæsitorum quadratorum latera 3 – 7 N. 3 – 7 N. 2 + 17 N. estque summa quadratorum 22 + 387 Q – 16 N. æqualis 22. vnde fit 1 N. $\frac{16}{387}$. sunt ergo quadratorum latera $\frac{1049}{387}$. $\frac{1049}{387}$. $\frac{1046}{387}$. ipsi quadrati $\frac{1100401}{149769}$. $\frac{1100401}{149769}$. $\frac{1094116}{149769}$. quos si auferas sigillatim à 8. supersunt quæsitæ binarij partes, nimirum $\frac{97751}{149769}$. $\frac{97751}{149769}$. $\frac{104036}{149769}$.

QVÆSTIO XXIII.

ΤΟ δοθὲν μόριον διελεῖν εἰς τρία μόρια, ὅπως ἕκαστον αὐτῶν λεῖψαν τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω τὸ δοθὲν μόριον μ° α̅ ϛ^ον. καὶ δέον ἔστω τὸ α̅ ϛ^ον. διελεῖν εἰς τρία μόρια καθὼς ἐπάχθη. ὥστε δεῖ ἕκαστον αὐτῶν λεῖψαν μ° α̅ σιϛ^ον. ποιεῖν τετράγωνον. οἱ ἄρα τρεῖς λείψαντες μ° α̅ οβ^ον. ποιοῦσι τρεῖς τετραγώνους. καὶ ἐὰν ἑκάστῳ τῶν τετραγώνων προσθῶμεν α̅ σιϛ^ον. εὑρήσομεν ἕκαστον τῶν ζητουμένων. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον. ἔρχεται

DATAM partem diuidere in tres partes, vt qualibet detracto cubo summæ ipsarum, faciat quadratum. Esto data pars $\frac{1}{6}$. & opus sit diuidere $\frac{1}{6}$ in tres partes, vt imperatum est. Oportet igitur quamlibet ipsarum, detracta $\frac{1}{216}$ facere quadratum. Proinde tres simul detractis $\frac{1}{72}$ faciũt tres quadratos. Et si cuiuis trium quadratorum addamus $\frac{1}{216}$. inueniemus singulos quæsitorum. Hoc autem facile est. Eo enim res

rediit vt $\frac{13}{64}$ diuidamus in tres quadratos, quod est factu facile.

ἢ πδ ιγ ἐδ. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπερ ἐστὶ ῥᾴδιον.

IN QVAESTIONEM XXIII.

Hæc quæstio non parum confirmat sententiam nostram de præcedente. Nam cùm in illa propositum sit datum numerum diuidere in tres partes, quarum quælibet à cubo summæ detracta quadratum relinquat. Hîc è conuerso postulatur, vt datus numerus sic diuidatur in tres partes, vt à qualibet auferendo cubum summæ remaneat quadratus. Quia verò non potest cubus summæ esse minor qualibet partium, nisi in fractis tales numeri exhibeantur (cùm in integris quilibet cubus suo latere sit maior.) Idcirco proposuit Diophantus datam partem diuidere, non autem datum numerum. Est autem operatio facilis, & quæ ex dictis ad præcedentes nullo negotio intelligatur. Cùm enim tres partes quæsitæ simul faciant $\frac{1}{4}$. Et à singulis auferri debeat $\frac{1}{64}$. patet hoc idem esse atque si ab $\frac{1}{4}$. seu à $\frac{16}{64}$. auferantur $\frac{3}{64}$. vnde restat $\frac{13}{64}$. diuidendus in tres quadratos, quod facilè fit quia componitur ex duobus $\frac{9}{64}$. & $\frac{4}{64}$. quorum altero puta $\frac{4}{64}$. diuiso in duos quadratos $\frac{9}{400}$. & $\frac{16}{400}$. habemus totum $\frac{13}{64}$. diuisum in tres quadatos, qui sub eadem denominatione sunt $\frac{225}{1600}$. $\frac{36}{1600}$. $\frac{64}{1600}$. & si addatur singulis $\frac{1}{64}$. seu $\frac{25}{1600}$. fiunt quæsiti numeri $\frac{250}{1600}$. $\frac{61}{1600}$. $\frac{89}{1600}$. quorum summa $\frac{1}{4}$. & si à quolibet auferatur $\frac{1}{64}$. remanent prius inuenti quadrati.

Porrò & hæc & præcedens, aliæque quas ad præcedentem attulimus ad quodlibet numeros extendi possunt, & omnes sub tribus vniuersalissimis propositionibus comprehendentur, nimirum.

QVAESTIO PRIMA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes, quarum quælibet adsumpto dato numero, quadratum faciat.

Explicata est à nobis ad decimam quartam huius.

QVAESTIO SECVNDA.

Datum numerum diuidere in quotlibet pattes, vt auferendo quamlibet à dato numeto, supersit quadrarus. Oportet aurem numerum à quo fit subrractio maiorem esse ea patre diuidendi numeri, quę denominatur à numero multitudinis partium postulatarum.

Diuidendus esto 12. in quatuor partes, quarum quælibet detracta de 5. relinquat quadratum. Cùm ergo auferendo 12. à quadruplo ipsius 5. puta à 20. supersit 8. patet 8. diuidendum esse in quatuor quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 5. Diuiditur autem 8. in duos quadratos 4. 4. quare diuiso 4. bis in duos quadratos, res expedietur. Erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{36}{25}$. $\frac{64}{25}$. $\frac{100}{169}$. $\frac{576}{169}$. quos si auferas sigillatim à quinario, remanent numeri 12. partes quatuor quæsitæ. $\frac{89}{25}$. $\frac{61}{25}$. $\frac{745}{169}$. $\frac{269}{169}$.

QVAESTIO TERTIA.

Datum numerum diuidete in quotlibet pattes, vt à qualibet auferendo datum numerum supersit quadrarus. Oportet autem ablatitium numetum minorem esse ea parte diuidendi numeri, quam exptimit numerus multitudinis partium postulatatum.

Diuidendus esto 20. in quatuor partes, vt à qualibet auferendo 3. supersit quadratus. Quia quadruplum ipsius 3. puta 12. ablatum de 20. relinquit 8. patet 8. diuidendum esse in quatuor quadratos quoscunque, nam cuilibet addendo 3. fient quæsitæ partes numeri 20. Sumantur ergo quadrati ad præcedentem allati, & cuilibet addatur 3. fient numeri 20. quæsitæ partes $\frac{111}{25}$. $\frac{139}{25}$. $\frac{607}{169}$. $\frac{1083}{169}$.

QVÆSTIO XXIV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δυ. α. καὶ ζητοῦμεν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μονάδος α. ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ἀπὸ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου. ἐκτίθεμαι τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ μιᾶς τῶν [περὶ τὴν ὀρθὴν τετράγωνον] μερίζω εἰς τὸν ἀπὸ τῆς λοιπῆς τῶν [περὶ τὴν] ὀρθήν. καὶ εὑρήσομεν τοὺς τετραγώνους. ἕνα μὲν δυ. $\frac{9}{16}$. τὸν δὲ ἕτερον δυ. $\frac{25}{144}$. τὸν δὲ τρίτον δυ. $\frac{64}{225}$. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν μετὰ δυ. α. ποιῶν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυ. α. γίνεται δὲ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κυκ. α. $\frac{14400}{518400}$. ταῦτα ἴσα δυ. α. καὶ πάντα εἰς τὸ αὐτὸ μόριον, καὶ παρὰ δύναμιν γίνεται δυδυ. α. $\frac{14400}{518400}$. ἴσα μο. α. καὶ ἡ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ. γίνεται δυ. $\frac{120}{720}$. ἴσα μο. α. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος, εἰ ἦν τετράγωνος, καὶ τὰ δυ. $\frac{120}{720}$. λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον, οὐκ ἔστιν δέ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ἐκ τῶν τριῶν καθέτων αὐτῶν στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν βάσεων αὐτῶν στερεὸν ποιῇ τετράγωνον. * πλευρὰν ἔχοντα τὸν ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων. καὶ ἐὰν πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ εὑρημένου ὀρθογωνίου γενήσεται ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, quouis ipsorum adscito quadratum faciat. Ponatur solidus ille 1 Q. & quærantur tres quadrati, quorum quilibet adscita vnitate faciat quadratum. Hoc autem peti potest à quouis triangulo rectangulo. Expono tria triangula rectangula, & accipiens quadratum vnius laterum circa rectum, diuido eum per quadratum alterius laterum circa rectum, & inuenio quadratos, vnum $\frac{9}{16}$ Q. alterum $\frac{25}{144}$ Q. tertium $\frac{64}{225}$ Q. & quilibet ipsorum cum 1 Q. facit quadratum. Restat vt solidus sub tribus contentus æquetur 1 Q. Est autem solidus ille $\frac{14400}{518400}$ CC. hoc æquatur 1 Q. & omnia ad eundem denominatorem reducendo, & diuidendo per 1 Q. fiunt $\frac{14400}{518400}$ QQ. æqualia 1. & latus lateri æquatur, fitque $\frac{120}{720}$ Q. æquale 1. Est autem vnitas quadratus. Quod si etiam $\frac{120}{720}$ Q. quadratus esset, soluta fuisset quæstio. Non est autem. Eò igitur redactus sum, vt inueniam tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ductus in solidum sub basibus faciat quadratum, * cuius latus sit numerus multiplicatione ortus laterum circa rectum vnius triangulorum. Et si omnia diuiserimus per productum ex lateribus circa rectum inuenti rectanguli, orietur qui fit ex producto laterum

circa rectum secundi, in productum laterum circa rectum alterius triangulorum. Et si vnum ipsorum statuamus 3. 4. 5. Eò deuentum est. vt inueniantur duo triangula rectangula, vt productus ex lateribus circa rectum, producti ex lateribus circa rectum sit 12 N. Proinde & area areæ 12. si autem 12. & 3. Hoc autem facile est, & est simile huic 9. 40. 41. Alterum 5. 12. 13. Habentes ergo tria triangula rectangula, reuertamur ad initiò propositum. Et statuamus trium quæsitorum quadratorum, alterum 9. alterum 25. tertium 81. & si solidum ex his æquemus 1 Q. fiet 1 N. rationalis. Ad positiones. *.

τοῦ α δ' ἐπὶ τὸν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ἑτέρου τῶν τριγώνων, καὶ ἐὰν τάξωμεν ἐν αὐτῶν γ. δ. ε. ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ ςς ιβ. ὥστε καὶ ἐμβαδὸν ἐμβα ιβ. εἰ δὲ ιβ. καὶ γ. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ οθ. μ. μα. τὸ δὲ ἕτερον ε. ιβ. ιγ. ἔχοντες οὖν τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἐρχόμεθα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσομεν τῶν ζητουμένων τετραγώνων, ὃν μὲν θ. ὃν δὲ κε. ὃν δὲ πα. καὶ ἐὰν τὸν ἐκ τῶν δ. ε. στερεὸν ἰσώσωμεν Δ α. γίνεται ὁ ς ῥητός. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. *

IN QVAESTIONEM XXIIII.

Vix scio an elegantiora & subtiliora problemata, tribus quæ sequuntur, excogitari possint, ea tamen tam miserè corrupta sunt, vt hîc omni ex parte restituere Diophantum, humani, vt arbitror, vires superet ingenij, nisi quis emendatiorem proferat codicem. Equidem satis apparet ad huius quæstionis solutionem requiri vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub basibus habeat rationem quadrati ad quadratum. At in duabus sequentibus inuenienda esse tria triangula rectangula, vt solidus sub hypotenusis ad solidum sub basibus habeat rationem quadrati ad quadratum. Quomodo autem hæc lemmata expediat Diophantus percipere minimè potui. Quoniam verò nos ea perfectè demonstrauimus libro tertio porismatum, & reliqua Diophanti operatio perspicua est, verba illius quæ sanitati restitui poterant, reposuimus, reliqua vt erant relinquere malui, quàm in iis corrigendis diutius animum torquere. Moneo tantùm verba illa, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ οθ. μ. μα. in Vaticano codice sic haberi, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ ς μ. μα. Quam lectionem vtpote probabiliorem, sequutus sum in mea versione, verè enim numeri 9. 40. 41. constituunt triangulum rectangulum, quod non accidit ipsis 79. 40. 41.

Porrò multa sunt hîc obseruatione digna. Primò, vt inueniat quadratum qui adscita vnitate faciat quadratũ, sumit Diophãtus latera trianguli rectanguli, & quadratum baseos diuidit per quadratũ perpendiculi. Vt ex positis 3. 4. 5. diuidẽdo 9. per 16. fit $\frac{9}{16}$. quadratus quæsitus, nam illi addẽdo 1. fit $\frac{25}{16}$. item quadratus. Cuius rei causa satis est euidẽs. Nam quolibet numero per seipsum diuiso, quotiens est vnitas. Quare propositis quadratis 9. & 16. quorum summa quadratum facit, puta 25. si alter per alterum diuidatur, vt 16. per 9. fit $\frac{16}{9}$. cui addendo $\frac{9}{9}$. seu vnitatem, quadratum fieri necesse est. Cùm enim fractiones sint eiusdem denominationis, sufficit addere numeratores, denominatore communi retento. At numeratores ex hypothesi faciunt quadratum. Quare cùm & denominator sit quadratus erit tota fractio $\frac{25}{9}$. quadratus, vt patet. Aduerte autem si velis tres diuersos quadratos, quorum singuli

adſcita vnitate, faciant quadratum; ſumenda eſſe tria triangula rectangula non ſimilia, qualia repoſuimus in textu Diophanti; nam ſi ſumantur ſimilia triangula, & quadrati laterum homologorum diuidantur pet quadratos homologorum laterum, fiet idem quotiens, vt ſumptis triangulis. 3. 4. 5. & 6. 8. 10. diuiſo 9. per 16. & 36. per 64. æquales fiunt quotientes $\frac{9}{16}$. & $\frac{36}{64}$. Quod accidit ob ſimilitudinem proportionum.

Secundò expoſitis tribus triangulis 3. 4. 5. 5. 12. 13. & 8. 15. 17. diuiduntur baſium quadrati per quadratos perpendiculorum, fiuntque quadrati $\frac{9}{16}$. $\frac{25}{144}$. $\frac{64}{225}$. qui nota Q. inſigniti ſtatuuntur pro tribus quæſitis numeris, quia ſic quilibet adſumens 1 Q. facit quadratum. Porrò ſolidus ſub iis contentus, fractio eſt, cuius numerator 14400. fit ex mutua multiplicatione numeratorum 9. 25. 64. At denominator 518400 fit ex denominatorum 16. 144. 225. mutuo ductu. Eſt ergo huiuſmodi ſolidus $\frac{14400}{518400}$. Quia verò numeri ex mutua quadratorũ multiplicatione orti, quadrati ſunt, quorũ latera fiunt ex mutuo ductu laterũ quadratorũ eorundem, patet 14400. eſſe quadratum numeri 120. qui fit ex mutuo ductu baſium trium triangulorum expoſitorum, nempè 3. 5. 8. ſimiliter 518400. eſt quadratus numeri 720. qui continetur ſub perpendiculis 4. 12. 15. vnde cùm tandem $\frac{120}{720}$ Q. æquentur vnitati, & euidens ſit vt ſolutio contingat rationalis oportere ipſum $\frac{120}{720}$. eſſe quadratum, hoc eſt 120. ad 720. rationem eſſe debere quæ quadrati ad quadratum: Rectè infert Diophantus rem eò deductam eſſe, vt inueniantur tria triangula rectangula, vt ſolidus ſub baſibus ad ſolidum ſub perpendiculis ſit in ratione quadrati ad quadratum.

Tertiò lemma propoſitum ſic abſoluimus propoſitione vndecima libri tertij poriſmatum. Exponatut quodlibet triangulum rectangulum 3. 4. 5. & effingantur alia duo triangula ab hypotenuſa expoſiti trianguli, & à quolibet laterum circa rectum modo quem tradidimus quinta tertij poriſmatum, fiet à 5. & 4. triangulum 9. 40. 41. At verò à 5. & 3. formabitur triangulum 16. 30. 34. Tria ergo hæc triangula ſatisfacient propoſito, nam ſolidus ſub perpendiculis 3. 9. 16. puta 432. ad 4800. ſolidum ſub baſibus rationem habet quàm 9. ad 100. Licétque vt monuimus in ſcholio vndecimæ tertij poriſmatum, loco cuiuſlibet inuentorum triangulorum, ſumere aliud ſimile: vt loco ipſius 16. 30. 34. ſumi poteſt 8. 15. 17. quod ſanè cum aliis duobus propoſitum abſoluit.

Denique his inuentis triangulis ſic explicatur quæſtio Diophanti; diuido quadratos baſium per quadratos perpendiculorum, & quotientibus addo notam Q. fiunt quæſiti numeri $\frac{9}{16}$. Q. $\frac{81}{1600}$. Q. & $\frac{64}{225}$. Q. & ſolidus ſub iis contentus, puta $\frac{46656}{5760000}$ CC. æquatur 1 Q. & tandem $\frac{46656}{5760000}$ Q Q. æquatur 1. ac proinde & latus lateri æquale eſt, hoc eſt $\frac{216}{2400}$ Q. ſeu in minimis $\frac{9}{100}$. æquatur vnitati. Quare fit 1 N. $\frac{10}{3}$. ſunt ergo quæſiti quadrati $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{81}$. quorum mutuo ductu fit ſolidus $\frac{100}{9}$. cui ſi addantur ſigillatim ipſi quadrati, fiunt rurſus quadrati $\frac{625}{36}$. $\frac{1681}{144}$. $\frac{1156}{81}$. quorum latera $\frac{25}{6}$. $\frac{41}{12}$. $\frac{34}{9}$.

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ἐκ τούτων στερεὸς λείψας ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς δ^{υ} α. καὶ πάλιν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ἀπὸ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων. ἑνὸς μὲν ις^{ων} θ. τοῦ δὲ ἑτέρου ρμδ^{ων} κε. τοῦ δὲ σκε^{ων} ξδ. τάσσω αὐτοὺς ἐν δυνάμει, καὶ μένει ἡ δ^{υ} α λείψει ἑκάστου αὐτῶν ποιοῦσα τετράγωνον. λοιπόν ἐστι τὸν

INVENIRE tres quadratos, vt ſolidus ſub ipſis contentus, quolibet ipſorum detracto, faciat quadratum. Ponatur ſolidus ſub ipſis contentus 1 Q. & rurſus quadrati qui quæruntur, ſumantur ex triangulis rectangulis, vnus à $\frac{9}{16}$. alter à $\frac{25}{144}$. tertius à $\frac{64}{225}$. ſtatuo eos in quadratis, & manet 1 Q. quolibet ipſorum detracto, faciens quadratum. Supereſt vt ſolidus ſub

tribus contentus æquetur 1 Q. est autem solidus ille $\frac{25600}{1221025}$ CC. hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt $\frac{25600}{1221025}$ QQ. æqualia 1. Est autem vnitas quadratus, latus habens quadratum. Ergo oportebat etiam $\frac{25600}{1221025}$ QQ. esse quadratum. latus habentem quadratum. Rursus itaque res eò est reducta vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ductus in solidum sub hypotenusis faciat quadratum, qui latus habeat quadratum *. Et si omnia diuidamus per productum ex hypotenusa in perpendiculum vnius rectangulorum, oportet oriatur qui fit ex producto hypotenusæ in perpendiculum, alicuius rectanguli, in productum ex hypotenusa in perpendiculum alterius, esto vnum rectangulorum 3. 4. 5. Eò itaque deuentum est, vt inueniantur duo triangula rectangula, vt numerus hypotenusæ & perpendiculi, numeri hypotenusæ & perpendiculi sit 20. si autem 20. & 5. & est facile, quippe maius est 5. 12. 13. minus 3. 4. 5. Ab his ergo quærenda sunt alia duo, vt numerus hypotenusæ & perpendiculi sit 6. est autem maioris hypotenusa 6½. perpendiculum 60. Minoris autem hypotenusa 2½. qui verò in vno rectangulorum 12. & accipientes minima similium, recurri-

ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυνάμει α. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κυβοκύβων β. ͵εχ. ἐν μορίῳ ρκβ. ͵ακε. ταῦτα ἴσα δυνάμει α. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν μίαν γίνεται δυ δυ β. ͵εχ. ἐν μορίῳ ρκβ. ͵ακε. ἴσα μο α. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος πλευρὰν ἔχουσα τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ δυ δυ β. ͵εχ. ἐν μορίῳ ρκβ. ͵ακε. εἶναι τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ἐκ τῶν καθέτων στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν ὑποτεινουσῶν στερεὸν, ποιῇ τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον, * καὶ ἐὰν πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν τῆς ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων, δεήσει τὸν τῆς ὑποτεινούσης καὶ κάθετον τῆς ὑποτεινούσης, καὶ καθέτου πολλαπλασιασθέντα κατὰ τὸν ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ὀρθογωνίου τινὸς, ἔστω τὸ ἓν τῶν ὀρθογωνίων γ. δ. ε. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου τῆς ὑποτεινούσης, καὶ καθέτου ἢ κ. εἰ δὲ κ. καὶ ε. καὶ ἔστι ῥᾴδιον, καὶ ἔστι τὸ μὲν μεῖζον ε. ιβ. ιγ. τὸ δὲ ἔλαττον γ. δ. ε. ζητητέον οὖν ἀπὸ τούτων ἕτερα δύο, ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ἢ μο ϛ. ἔστι δὲ τοῦ μὲν μείζονος ὑποτείνουσα μο ϛ. α β. ἡ δὲ κάθετος ξ. τοῦ δὲ ἐλάσσονος ὁ μὲν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μο β. α β. ὁ δὲ ἐν τῇ α. τῶν ὀρθογωνίων ιβ. καὶ λαβόντες τὰ ἐλάχιστα τῶν ὁμοίων ἀνατρέχο-

μεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν δυ α. αὐτῶν δὲ τῶν τετραγώνων. ὃν μὲν δυ ιϛ. ὃν δὲ δυ φοϛ. ὃν δὲ δυ α. ἐν μορίῳ β. ηφξα. λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυ α. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν καὶ ἡ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ. καὶ εὑρίσκεται ὁ ϛ ξε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.*

mus ad propositum initio, & ponimus solidum sub tribus contentum 1 Q. ipsorum autem quadratorum alterum 16 Q. alterum 576 Q. tertium $\frac{1}{28561}$ Q. superest vt solidus sub tribus, æquetur 1 Q. & omnia in 1 Q. latusque lateri æquetur, & inuenietur 1 N. 65. Ad positiones.*

IN QVAESTIONEM XXV.

EODEM ferè logismo vtitur hîc Diophantus, ac in præcedente. Nam vt inueniat tres quadratos qui ab vnitate sigillatim detracti quadratum relinquant, sumit tria triangula rectangula vt prius, & diuidit quadratum perpendiculi cuiuslibet trianguli per quadratum hypotenusæ. Verbi gratia sumpto triangulo 3. 4. 5. diuidit 16. per 25. vnde fit $\frac{16}{25}$. quadratus qui ab vnitate hoc est à $\frac{25}{25}$. detractus relinquit quadratum $\frac{9}{25}$. cuius rei ratio ex adnotatis ad præcedentem satis innotescit. Hinc ergo patet solidum sub tribus huiusmodi quadratis contentum, fieri ex solido sub quadratis à tribus perpendiculis, diuiso per solidum sub quadratis à tribus hypotenusis. Quamobrem latus quadratum huiusmodi solidi constat ex solido sub ipsis perpendiculis diuiso per solidum sub hypotenusis; vt ergo latus hoc sit quadratus numerus vt requiritur, necesse est inueniri tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub hypotenusis sit in ratione quadrati ad quadratum.

Quomodo autem inueniantur tria huiusmodi triangula, non satis mihi constat ex corruptissimis Diophanti verbis; sed illorum iacturam æquo animo ferre possumus, quandoquidem problema istud perfectè à nobis demonstratum est propositione decimaquarta libri tertij porismatum, vbi tradidimus illius constructionem hoc pacto. Exposito quolibet triangulo 5. 4. 3. Ita vt 8. duplum baseos sit maius perpendiculo 3 inueniatur per duodecimam tertij porismatum aliud triangulum vt planus sub perpendiculis vtriusque trianguli, superet planum sub basibus quadrato numero, erit illud 13. 5. 12. Iam à duobus triangulis 5. 4. 3. 13. 5. 12. effingatur tertium per decimam tertij porismatũ. Cuius hypotenusa 65. fiet ex mutuo ductu hypotenusarum 13. & 5. Basis autem 63. erit summa productorum ex basi cuiuslibet trianguli in perpendiculum alterius. Denique perpendiculum 16. erit differentia productorum ex basi in basim, & ex perpendiculo in perpendiculum. Sic habebimus tria triangula quæsita puta 5. 4. 3. 13. 5. 12. 65. 63. 16. Nam planus sub perpendiculis est 576. planus sub hypotenusis 4225. quorum vterque quadratus cùm sit, eorum vtique ratio est quæ quadrati ad quadratum.

Hoc expedito lemmate facilè soluitur quæstio Diophanti. Sit enim solidus sub quæsitis quadratis contentus 1 Q. Ipsi verò quadrati statuantur ij qui fiunt diuidendo quadratum perpendiculi cuiuslibet inuentorum triangulorum per quadratum hypotenusæ, puta $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{144}{169}$ Q. $\frac{256}{4225}$ Q. fitque solidus sub ipsis contentus $\frac{331776}{17850625}$ CC. æqualis 1 Q. seu $\frac{331776}{17850625}$ Q Q. æquatur 1. Quare & latus lateri, hoc est $\frac{576}{4225}$ Q. æquatur 1. & fit 1 N. $\frac{65}{24}$. Ad positiones. Erunt quæsiti quadrati $\frac{169}{64}$. $\frac{25}{4}$. $\frac{4}{9}$. solidus sub iis contentus est $\frac{4225}{576}$. à quo si quilibet eorum auferatur, remanent quadrati $\frac{169}{64}$. $\frac{625}{576}$. $\frac{441}{64}$. quorum latera $\frac{13}{8}$. $\frac{25}{24}$. $\frac{21}{8}$.

QVÆ-

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, detractus ab vnoquoque ipsorum, faciat quadratum. Rursus solidus sub ipsis contentus statuatur 1 Q. ipsi autem à quibusuis rectangulis petantur. Et rursus hîc res deuoluitur ad ea quæ in præcedente fuerunt quæsita. Si igitur in hac iisdem vtamur rectangulis, & ponamus eorum qui quæruntur quadratorum * vnum 25 Q. alterum 625 Q. tertium 14784 Q. Et rursus solidus sub tribus contentus detractus à quolibet, facit quadratum. Superest vt solidus ille æquetur 1 Q. vnde inuenitur 1 N. maior quàm 8. & constat. *.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν [στερεὸς] λειφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω πάλιν ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς δ α. αὐτοὶ δὲ ἀφ' οἵων δήποτε τριγώνων ὀρθογωνίων. καὶ πάλιν ἀπάγεται καὶ ἐνταῦθα εἰς τὰ ζητούμενα ἐν τῇ πρὸ ταύτης προτάσει. εἰ χρώμεθα οὖν καὶ ἐν ταύτῃ τοῖς αὐτοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τάσσωμεν τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ὃν μὲν δυ κε. ὃν δὲ δυ χκε. ὃν δὲ δυνάμεις α. δψπδ. καὶ πάλιν μένει ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῶν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπ' αὐτῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυνάμει μιᾷ. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς μείζων η. καὶ μένει. *

IN QVAESTIONEM XXVI.

SATIS apparet ex lemmate ad præcedentem explicato pendere quæstionis huius solutionem, nam vt prius inuenienda sunt tria triangula rectangula: vt solidus sub hypotenusis ad solidum sub perpendiculis habeat rationem quadrati ad quadratum. Et sicut ibi ponebantur quæsiti quadrati $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{144}{169}$ Q. $\frac{256}{4225}$ Q. ita vt auferendo quemlibet ab 1 Q. remanerēt quadrati, puta $\frac{16}{25}$ Q. $\frac{25}{169}$ Q. $\frac{3969}{4225}$ Q. Ita hîc numeratoribus in denominatores mutatis, & è cōuerso, statuuntur quæsiti quadrati $\frac{25}{9}$ Q. $\frac{169}{144}$ Q. $\frac{4225}{256}$ Q. vt à quolibet auferēdo 1 Q. remaneāt quadrati $\frac{16}{9}$ Q. $\frac{25}{144}$ Q. $\frac{3969}{256}$ Q. fitque solidus sub tribus quæsitis contentus $\frac{17850625}{331776}$ CC. æqualis 1 Q. & tandem $\frac{4225}{576}$ Q æquatur vnitati. Vnde fit 1 N. $\frac{24}{65}$. Sunt ergo quæsiti numeri. $\frac{64}{169}$. $\frac{4}{25}$. $\frac{9}{4}$. Nam solidus sub iis contentus est $\frac{576}{4225}$. quem auferendo sigillatim à quolibet ipsorum, remanent quadrati $\frac{1024}{4225}$. $\frac{4}{169}$. $\frac{35721}{16900}$: quorum latera $\frac{32}{65}$. $\frac{2}{13}$. $\frac{189}{130}$.

QVÆSTIO XXVII.

INVENIRE tres quadratos, vt productus ex binorum multiplicatione adscita vnitate faciat quadratum. Et quoniam quæro productum ex primo in secundum addita vnitate facere quadratum, omnia ducantur in tertium qui est quadratus.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μ α. ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητῶ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ μονάδος α. ποιεῖν τετράγωνον. πάντα ἐπὶ τὸν τρίτον ὄντα τετράγωνον.

ὥστε δεήσει τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, τουτέστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ὡς καὶ μετὰ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου, τοῦτο γὰρ προεδείξαμεν. ὥστε ἐκεῖνοι οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο τὸ ζήτημα.

Itaque oportebit productum ex primo in secundum, ductum in tertium, hoc est solidum sub tribus contentum, cum tertio facere quadratum, sicut etiam cum primo & secundo. Id autem antè demonstrauimus. Igitur illi numeri hanc quoque soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM XXVII.

REFERTVR hæc propositio ad vigesimam quartam, & iidem prorsus numeri vtramque quæstionem soluunt, vt rectè infert Diophantus, quod tamen vt euidentius fiat, sic demonstro. Sint tres quadrati A B C. soluentes vigesimam quartam, ita vt solidus sub ipsis contentus quolibet adiecto quadratum faciat; dico eum qui fit à duobus quibusuis addita vnitate fore quadratum. Ducto enim A in B fiat D. cui addita vnitate fiat G. probandum est G esse quadratum. Itaque quia ex hypothesi ducto D in C. & producto addendo ipsum C. fit quadratus. At ducere D in C & producto addere C. idem est atque ducere C in numerum vnitate maiorem ipso D, hoc est

A $\frac{25}{4}$. B $\frac{9}{16}$. C $\frac{256}{81}$.
D $\frac{225}{64}$. G $\frac{289}{64}$.

4. noni. in ipsum G, sequitur ex C in G. fieri quadratum. [1] Ergo C & G sunt plani similes. [2] Quare cùm C sit quadratus ex hypothesi, oportet & ipsum G quadratum esse. Quod demonstrandum erat.
24. octaui.

Sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{81}$. Nam ex binorum mutuo ductu fiunt numeri $\frac{225}{64}$. $\frac{16}{9}$. $\frac{1600}{81}$. quibus addendo sigillatim vnitatem, fiunt quadrati $\frac{289}{64}$. $\frac{25}{9}$. $\frac{1681}{81}$. quorum latera sunt $\frac{17}{8}$. $\frac{5}{3}$. $\frac{41}{9}$.

QVÆSTIO XXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας μονάδα α. ποιῇ τετράγωνον. ταῦτα ἐπὶ τὸν τρίτον. ὥστε ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον τουτέστι ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς λείψας τὸν τρίτον ποιεῖ τετράγωνον. ὥστε καὶ ἑκάτερον τόν τε πρῶτον καὶ τὸν δεύτερον λείψας ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς ποιεῖ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται. ἐκεῖνοι οὖν οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο.

INVENIRE tres quadratos, vt productus ex binorum multiplicatione detracta vnitate, faciat quadratum. Omnia in tertium. Itaque productus ex primo in secundum ductus in tertiū, hoc est solidus sub tribus contentus, detracto tertio quadratum facit; sicut & idem solidus sub tribus contentus, facit quadratum detracto secundo & tertio. Hoc autem supra demonstratum est. Igitur illi numeri hoc quoque præstant.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

HÆC etiam refertur ad vigesimam quintam & iidē numeri vtramque soluūt quæstionē. Nam à solido sub tribus quadratis contēto auferre, verbi gratia, ternum

idem eſt atque ducere planum ſub primo & ſecundo vnitate multatum, in ipſum tertium. Quare cùm ſolidus ſub tribus contentus, detracto tertio ſit quadratus, neceſſe eſt & planum ſub primo & ſecundo detracta vnitate eſſe quadratum, alioquin eo ducto in tertium qui quadratus eſt, non poſſet fieri quadratus. Soluitur ergo hæc quæſtio per quadratos inuentos per vigeſimam quintam, nempe per quadratos $\frac{169}{64}$. $\frac{25}{4}$. $\frac{4}{9}$. Etenim plani ſub binis contenti ſunt $\frac{4225}{256}$. $\frac{25}{9}$. $\frac{169}{144}$. A quibus auferendo ſigillatim vnitatem, remanent quadrati $\frac{3969}{256}$. $\frac{16}{9}$. $\frac{25}{144}$. quorum latera $\frac{63}{16}$. $\frac{4}{3}$. $\frac{5}{12}$.

QVÆSTIO XXIX.

INVENIRE tres quadratos, vt productus ex binorum multiplicatione detractus ab vnitate, faciat quadratum. Rurſus quærentes eum qui à duobus quibuſuis fit ſublatum ab vnitate, facere quadratum, ſi omnia ducamus in tertium; rurſum eò deducimur vt inueniamus tres numeros, è quibus confectus ſolidus ſi tollatur à quouis, relinquat quadratum. Hoc autem ſuprà eſt demonſtratum.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ μονάδος μιᾶς ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ζητοῦντες τὸν ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἀρθέντα ἀπὸ μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν πάντα ποιήσωμεν ἐπὶ τὸν τρίτον. πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται.

IN QVÆSTIONEM XXIX.

PENDET rurſus hæc propoſitio à vigeſima ſexta, & iidem quadrati vtrique quæſtioni ſatisfaciunt. Ratio eſt, quia ſolidus ſub tribus contentus detractus, verbi gratia, à tertio relinquit quadratum per vigeſimam ſextam. At idem quadratus fit ſi planus ſub primo & ſecundo detrahatur ab vnitate, & reſiduum ducatur in tertium. Ergo neceſſe eſt planum ex primo in ſecundum detractum ab vnitate relinquere quadratum, vt ſcilicet eo in tertium qui quadratus eſt, ducto, fiat quadratus. Quod autem ſi planus ex primo in ſecundum detrahatur ab vnitate, & reſiduum ducatur in tertium, idem fiat numerus, atque ſi ſolidus ſub tribus auferatur à tertio, ne quis ſcrupulus maneat, ſic demonſtro. Sint tres quicunque numeri A B C. & ſolidus ſub ipſis D. quem auferendo à tertio C. remaneat K. Tum ducto A in B fiat G quo detracto ab vnitate relinquatur H. Dico ſi H. ducatur in C fieri K. Quia enim D. eſt ſolidus ſub tribus contentus, & G planus, ſub duobus A B. patet ducto C in G. fieri ſolidum D. At duo G H æquantur vnitati ex conſtructione. Quare cùm ducendo C in vnitatem, fiat ipſe C. producti ex C in ipſos G H. puta D K ſimul æquantur ipſi C. At ex C in G fit D vt oſtenſum eſt. Ergo ex C in H fiet K. Quod erat oſtendendum.

D $\frac{1}{24}$.
A $\frac{1}{2}$. B $\frac{1}{3}$. C $\frac{1}{4}$.
G $\frac{1}{6}$. H $\frac{5}{6}$. K $\frac{5}{24}$.

Itaque ſumptis quadratis $\frac{64}{169}$. $\frac{4}{25}$. $\frac{9}{4}$ per vigeſimam ſextam inuentis, ex binorum mutuo ductu fient $\frac{256}{4225}$. $\frac{9}{25}$. $\frac{144}{169}$. quos auferendo ſigillatim ab vnitate, remanent quadrati $\frac{3969}{4225}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{25}{169}$. quorum latera $\frac{63}{65}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{13}$.

Cæterùm hæ tres quæſtiones paulò vniuerſalius proponi poſſunt, quod exemplo vigeſimæ ſeptimæ docuiſſe ſufficiat.

Inuenire tres quadratos, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, addito quouis quadratoquadrato, faciat quadratum.

Datus quadratoquadratus eſto 16.

Sumo quadratos ſoluentes vigeſimam ſeptimam, puta $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{81}$. quos ſigillatim multiplico per latus quadratum ipſius 16. puta per 4. & fiunt quæſiti quadrati 25.

[illegible]. quos satisfacere proposito perspicuum est. Nam primo quadratos eos esse constat, quia fiunt ex quadrato 4. in tres quadratos sigillatim ducto, idemque semper eueniet, quia latus quadratum cuiuslibet quadratoquadrati, quadratus est. Deinde cùm sint quadrupli priorum quadratorum, at ex quadruplo numeri in quadruplum alterius, fiat sedecuplum producti ex numero in numerum, patet productos ex binorum multiplicatione esse sedecuplos priorum productorum. Quare si his addatur 16. puta sedecuplum vnitatis, fient numeri sedecupli ad quadratos qui fiunt si numeri per vigesimam septimam inuenti bini inter se multiplicentur, & productis addatur vnitas. Ac proinde cùm ex quadrato in quadratū fiat quadratus, patet propositū.

QVÆSTIO XXX.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσευρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως συνδύο λαμβανόμενοι οἱ τετράγωνοι, καὶ προσλαβόντες τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ιε. καὶ ἔστω εἷς ζητουμένων μο θ. ζητητέον οὖν ἑτέρους δύο, ὅπως ἑκάτερος μὲν αὐτῶν μετὰ μο κδ ποιῇ τετράγωνον. συναμφότερος δὲ μετὰ μο ιε. ποιῇ τετράγωνον. δεῖ οὖν ζητεῖν δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ μο κδ. ποιῇ τετράγωνον. λαμβάνομεν τοὺς μετροῦντας μο κδ. καὶ τριγώνου ὀρθογωνίου πλευρὰς τὰς περὶ τὴν ὀρθήν. [ἔστω κατὰ ἀριθμοστὸν δ^ου. ὁ ἀντικείμενος ςς^οι ς. συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ γίνεται ἀριθμοστὸν β^ου. καὶ ἀριθμοὶ γ. πάλιν] ἔστω κατὰ ἀριθμοστὸν γ^ου. ὁ ἀντικείμενος ςς^οι η. συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ γίνεται ἀριθμοστὸν α. α^β. καὶ ςς^οι δ. ἔστω ἡ τοῦ ἑνὸς πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ἀριθμοστοῦ β. καὶ ςς γ. [ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ἀριθμοστοῦ α. α^β. καὶ ςς δ.] καὶ μένει ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ μο κδ. ποιῶν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ συναμφοτέρους μετὰ μο ιε. ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ [δυναμοστὸν ς. α^δ. καὶ Δ^υ κε ⋔ μο θ] δυνάμεις ἄρα κε [καὶ δυναμοστὸν ς. α^δ.] ⋔ μο θ. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω Δ^υ κε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε^ς. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

DATO numero tres adinuenire quadratos, quorum bini sumpti, adscitoque dato numero, faciant quadratum. Esto datus 15. & sit vnus quæsitorum 9. Quærendi sunt ergo alij duo, vt quilibet illorum cum 24. faciat quadratū, & ambo simul cum 15. faciant quadratum. Oportet ergo quærere duos quadratos, quorum vterque cum 24. faciat quadratum. Sumamus numeros qui metiantur 24. & sint latera circa rectum trianguli rectanguli. Esto secundum $\frac{4}{1N}$. oppositus, erit 6 N. vtriusque horum semissis est $\frac{2}{1N}$. & 3 N. Rursus esto secundum $\frac{3}{1N}$. oppositus erit 8 N. vtriusque semissis est $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ & 4 N. Sit ergo vnius quadratorum latus ab interuallo $\frac{2}{1N}$. & 3 N. alterius verò latus ab interuallo $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. & 4 N. sic enim vterq; quadratorū cum 24. faciet quadratū. Restat vt & ambo iūcti cū 15. faciant quadratum. Fit autem $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$ + 25 Q. − 9. Igitur 25 Q. + $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$ − 9. æquantur quadrato. Esto quadrato 25 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{5}$. Ad positiones.

IN QVAESTIONEM XXX.

SVBTILITER Diophantus posito vno quadratorum ad placitum, puta 9. inuestigat reliquos. Cùm enim 9. additus dato numero 15. faciat 24. certum est reliquorum quemlibet adsumpto 24. debere conficere quadratum, quia quilibet ipsorum addito 9. & 15. debet esse quadratus. Sed & vterque simul adscito 15. debet facere quadratum. Reliquum ergo est vt duo quadrati reperiantur, quorum quilibet cum 24. faciat quadratum, & eorum summa adsumens 15. sit quadratus. Hîc sanè mirabili artificio ponit latera quadratorum 3 N. $-\frac{2}{1N}$ & 4 N. $-\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. vnde fiant quadrati 9 Q. $-$ 12 $+\frac{4}{1Q}$. & 16 Q. $-$ 12 $+\frac{\frac{9}{4}}{1Q}$. quorum vterque adsumens 24. quadratum facit, puta 9 Q. + 12 $+\frac{4}{1Q}$. & 16 Q. + 12 $+\frac{\frac{9}{4}}{1Q}$. à lateribus 3 N. $+\frac{2}{1N}$. & 4 N. $+\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. Equidem certum est si quadrati duo fingantur ab aliquo binomio, & à residuo quod ei respondet, interuallum quadratorum fore quadruplum plani sub partibus comprehensi, vt quadratorum à lateribus 1 N. + 3. & 1 N. $-$ 3. interuallum est 12 N. quadruplum producti ex 1 N. in 3. Quare Diophantus quærens quadratum cui addendo 24. fiat quadratus, ponit pro latere residuum tale, vt planus sub partibus sit quadrans de 24. puta 6. Id vt consequatur sumit duos numeros quorum mutuo ductu fiat 24. puta 6. & 4. & vtriusque semissem capit, puta 3. & 2. nam ex semissi in semissem fit quadrans producti ex toto numero in totum numerum. Formandum ergo est residuum à 3. & 2. ponendo scilicet alterum cum signo N. puta 3 N. ex altero verò formando fractionem numericam, puta $\frac{2}{1N}$. & fit residuum 3 N. $-\frac{2}{1N}$. in quo patet planum sub partibus esse $-$ 6. atque adeo duplum illius esse $-$ 12. cui addendo 24. fit + 12. sola signorum mutatione facta. Eadem arte fingit latus tertij quadrati, sumendo 8. & 3. quorum mutuo ductu fit 24. & capiendo semisses eorum, puta 4. & 1 $\frac{1}{2}$. vnde formatur residuum 4 N. $-\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. vbi etiam contingit planum sub partibus esse $-$ 6. eadem de causa.

Porrò non temerè sumendi sunt duo quicunque numeri mutuo ductu producentes 24. quales sumpsit author 6. & 4. & rursus 8. & 3. sed tales esse debent, vt duo 6. & 8. Itemque 4. & 3. constituant latera circa rectum trianguli rectanguli, vt infrà docebimus. Ideò sumit Diophantus duos quoscunque numeros 3. & 4. qui sint latera circa rectum trianguli rectanguli, & per eos diuidendo 24. nanciscitur alios duos 8. & 6. qui sunt etiam latera circa rectum trianguli rectanguli, quia eorum eadem est proportio, quæ ipsorum 3. & 4. vt constat per decimam nonam septimi. Vnde etiam sequitur & horum semisses, puta 1 $\frac{1}{2}$. & 2. Itemque 4. & 3. constituere latera circa rectum trianguli rectanguli ob identitatem rursus proportionis. 1. 3. porif.

Necesse est autem huiusmodi numeros constituere latera circa rectum trianguli rectanguli, vt summa quadratorum ab ipsis ortorum sit quadratus numerus, quia oportet summam quadratorum fictitiorum adscito 15. puta 25 Q. $-$ 9 $+\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$. esse trinomium cuius quælibet pars constet quadrato numero. At 25 Q. est summa quadratorum à lateribus 3 N. & 4 N. & rursus $\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$. est summa quadratorum à lateribus $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. & $\frac{2}{1N}$. vnde patet oportere vt 3 N. & 4 N. Itemque $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. & $\frac{2}{1N}$. sint latera circa rectum trianguli rectanguli. Vnitates verò $-$ 9. æquantur quadrato qui positus est pro primo quæsitorum, vt patet.

Ingeniosa itaque laterum fictione assequutus est Diophantus, vt quælibet pars trinomij quadrato æquandi, constet quadrato numero, quod ni foret, qua quæso ratione æquaretur quadrato 25 Q. $-$ 9 $+\frac{\frac{25}{4}}{1Q}$? Sanè si velis fingere illius latus 5 N. + vel $-$ certo vnitatum numero, nil efficies, neque si ponas latus illud $\frac{\frac{5}{2}}{1N}$. plus vel minus certo Numerorum numero, nam vtroque modo vel incides in absurdum, vel in complexam æquationem, talemve ex qua non prodeat solutio rationalis. Itaque huiusmodi æquatio ritè nequit explicari, nisi æquando propositum

numerum, vel cum 25 Q. vel cum $\frac{25/4}{1Q}$. ſic enim ablatis vtrimque æqualibus remanebunt 9. æquales vel $\frac{25/4}{1Q}$. vel 25 Q. & res optimè ſuccedet, quia vtrumque extremum æquationis reperitur quadratus. Poſuit Diophantus 25 Q. æquales 25 Q. − 9 + $\frac{25/4}{1Q}$. Quare tandem 9. æquantur $\frac{25/4}{1Q}$. & omnia per 1 Q. fiunt 9 Q. æquales $\frac{25}{4}$. Quare 1 N. eſt $\frac{5}{6}$. Ad poſitiones ſunt latera quadratorum $\frac{1}{10}$ & $\frac{17}{15}$. Sunt ergo tres quæſiti quadrati 9. $\frac{1}{100}$. $\frac{289}{225}$. nam bini adſumpto 15. faciunt quadratos $\frac{2401}{100}$. $\frac{5929}{225}$. $\frac{625}{36}$. quorum latera $\frac{49}{10}$. $\frac{77}{15}$. $\frac{25}{6}$.

Quod ſi ponas 25 Q. − 9 + $\frac{25/4}{1Q}$. æquari $\frac{25/4}{1Q}$: fient 9. æquales 25 Q. & erit 1 N. $\frac{3}{5}$. eadem tamen quæ prius continget ſolutio, quia tunc concipiendum erit latera quadratorum fuiſſe $\frac{2}{1N}$ − 3 N. & $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ − 4 N. quæ per valorem Numeri reſoluta, erunt vt ſuprà $\frac{17}{15}$ & $\frac{1}{10}$.

QVÆSTIO XXXI.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσευρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι καὶ λείψαντες τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ° ιγ. τετάχθω πάλιν εἷς τῶν ζητουμένων τετραγώνων μ° κε. ζητητέον οὖν ἑτέρους δύο, ὅπως ἑκάτερος μὲν αὐτῶν μετὰ μ° ιβ. ποιῇ τετράγωνον. συναμφότερος δὲ λείψας μ° ιγ. ποιῇ τετράγωνον. πάλιν λαμβάνομεν τὴν μέτρησιν κατὰ ἀριθμοὺς τρεῖς καὶ δ. γίνεται ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ςˣ α. αˣ. καὶ ἀριθμοστοῦ β. ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ἀπὸ διαφορᾶς ςˣ β. καὶ ἀριθμοστοῦ α. αˣ. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ ἑκατέρου τετράγωνος μετὰ μ° ιβ. ποιῶν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι συναμφοτέρους λείψει μ° ιγ. ποιεῖν τετράγωνον γίνεται δὲ δυναμοστὸν ς. αˣ. δυ ς. αˣ. λείψει μ° κε. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω δυναμοστῷ ς. αˣ. καὶ γίνεται ὁ ς μ° β. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

DATO numero tres adinuenire quadratos, quorum bini ſumpti detracto dato numero, faciant quadratum. Eſto datus 13. Ponatur rurſus quæſitorum quadratorum vnus 25. Quærendi ergo alij duo, vt vterque ſigillatim cum 12. faciant quadratum, ambo verò ſimul detractis 13. faciant quadratum. Rurſum ſumimus dimenſionem ſecundum numeros 3. & 4. fitque prioris quadrati latus ab interuallo inter 1 $\frac{1}{2}$ N. & $\frac{1}{1N}$. alterius verò ab interuallo inter 2 N. & $\frac{1\frac{1}{2}}{1N}$. Sic enim vtriuſque quadratus adſcito 12. facit quadratum. Supereſt vt ambo ſimul detracto 13. faciant quadratum. Fit autem $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$ + 6 $\frac{1}{4}$ Q. − 25. Hoc ergo æquatur quadrato. Eſto ipſis $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q}$. & fit 1 N. 2. Ad poſitiones.

IN QVAESTIONEM XXXI.

Ex dictis ad præcedentem ſatis intelligitur hæc quæſtio. Ponit primum quadratum 25. vnde cùm auferendo 13 à 25. ſuperſit 12. patet quærendos duos quadratos, quorum vterque adſcito 12. faciat quadratum, ita vt amborum ſumma detracto 13. faciat etiam quadratum. Inuenit autem duos quadratos, quorum vterque adſcito 12. faciat quadratum eodem artificio quo vſus eſt in præcedente, & fingit eorum latera à lateribus circa rectum trianguli rectanguli, quorum mutuo ductu fiat 3. qua-

drans ipsius 12. Et ponit vnum latus 2 N. $- \frac{1\frac{1}{2}}{1N}$ alterum $\frac{1\frac{1}{2}}{1N} -$ 2 N. vnde quadratorum summa detractis 13. fit $\frac{25}{4}$ Q. − 25 + $\frac{\frac{25}{4}}{1Q.}$, æquanda quadrato, puta $\frac{\frac{25}{4}}{1Q.}$. Quare tandem $\frac{25}{4}$ Q. æquantur 25. & fit 1 N. 2. sunt ergo latera quadratorum quæsitorum 2. & $\frac{13}{4}$. & fiunt tres quadrati quæsiti 25. 4. $\frac{169}{16}$. quorum bini detracto 13. relinquunt quadratos 16. $\frac{25}{16}$. $\frac{361}{16}$.

Cæterùm moneo & hanc & præcedentem infinitas recipere solutiones ex duplici capite. Primò enim primus quadratus poni potest quilibet vnitatum numerus quadratus. Deinde latera secundi & tertij variè fingi possunt, à diuersis scilicet numeris qui sint latera circa rectum diuersorum triangulorum rectangulorum non similium. Verbi gratia loco ipsorum 3. & 4. sumi poterant 8. & 15. vel 5. & 12. & alij infiniti, vt in hac quæstione si libeat vti numeris 5. & 12. sumo numeros oppositos qui scilicet in hos ducti producunt 12. hi sunt $\frac{12}{5}$ & 1. & omnium capio semisses, puta $\frac{5}{2}$. 6. $\frac{6}{5}$. $\frac{1}{2}$. fingo ergo latera quadratorum $\frac{1}{2}$ N. $- \frac{\frac{6}{5}}{1N}$. & 6 N. $- \frac{\frac{1}{2}}{1N}$. & patet quemlibet quadratorum adscito 12. facere quadratum. Restat vt eorum summa detractis 13. faciat quadratum, facit autem $\frac{169}{4}$ Q. − 25 + $\frac{\frac{169}{100}}{1Q.}$. hoc ergo æquetur $\frac{\frac{169}{100}}{1Q.}$. fiet $\frac{169}{4}$ Q. æqualis 25. vnde fit 1 N. $\frac{10}{13}$ suntque quadratorum latera $\frac{382}{325}$. & $\frac{1031}{260}$. Itaque tres quæsiti quadrati sunt 25. $\frac{145924}{105625}$. $\frac{1062961}{67600}$. quorum bini detracto 13. faciunt quadratos $\frac{1413424}{105625}$. $\frac{1874161}{67600}$. $\frac{4405809}{1690000}$. quorum latera $\frac{1190}{325}$. $\frac{1369}{260}$. $\frac{2097}{1300}$. videtur autem hîc omissa huiusmodi quæstio.

Inuenire tres quadratos, quorum bini detracti à dato numero relinquant quadratum.

Sed hanc vt nimis facilem prætermisit Diophantus. Sit enim datus 21. patet nil aliud postulari quàm vt 21. diuidatur in tres quadratos, quales sunt 16. 4. 1. euidens quippe est si bini auferantur à 21. relinqui tertium.

QVÆSTIO XXXII.

INVENIRE tres quadratos, vt compositus ex ipsorum quadratis, faciat quadratum. Statuatur quæsitorum vnus 1 Q. alter 4. alter 9. & fit compositus ex eorum quadratis 1 QQ. + 97. æqualis quadrato à latere 1 Q. − 10. & fiunt reliqui 20 Q. æquales 3. & si horum multiplicatione quadratus fieret, soluta esset quæstio. Eò itaque res rediit, vt inueniantur duo quadrati, & numerus quidam, vt qui ab eo fit quadratus, detractis quadratis duorum quæsitorum quadratorum, numerum faciat, qui ad duplum numeri ab initio sumpti rationem habeat quæ est quadrati ad quadratum. Ponantur quæ-

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω δὴ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν Δ^Υ α. ὁ δὲ μ° δ. ὁ δὲ μ° θ. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, δυναμοδυνάμεως μιᾶς μ° ϟζ. ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς Δ^Υ α. λείψει μ° ι. καὶ γίνονται λοιπαὶ Δ^Υ κ. ἴσαι μ° γ. καὶ εἰ ἦν ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον, καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τετραγώνους, καὶ ἀριθμόν τινα ὅπως ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος λείψας τοὺς ἀπὸ τῶν ζητουμένων τετραγώνους ποιῇ ἀριθμόν τινα, ὃς πρὸς τὸν διπλάσιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοῦ λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τετάχθωσαν οἱ

ζητούμενοι τετράγωνοι, ὃς μὲν δ^υ α. ὃς δὲ μ^ο δ. [καὶ ὁ τυχὼν ἀριθμὸς δ^υ α μ^ο δ.] καὶ ἀπὸ τούτου τετράγωνος, ἐὰν λήψῃ τοὺς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους, καταλείπει δ^υ η. θέλομεν ταῦτα πρὸς τὸν δὶς δ^υ α μ^ο δ. τουτέστι πρὸς δ^υ β μ^ο η. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. καὶ πάντων τὸ ἥμισυ. ὥστε καὶ δυνάμεις δ πρὸς δ^υ α μ^ο δ. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. καὶ εἰσὶν αἱ δυνάμεις δ τετράγωνος, ὥστε καὶ δ^υ α μ^ο δ. ἴσαι τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς^ο α μ^ο α. ὅθεν ὁ ς^ο μ^ο α. α^β. ἔσται τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ὁ μὲν μ^ο β. α^δ. ὁ δὲ μ^ο δ. ὁ δὲ τυχὼν μ^ο κε^δ. καὶ πάντα τετράκις. γίνεται ὁ μὲν μ^ο θ. ὁ δὲ μ^ο ις. ὁ δὲ τυχὼν μ^ο κε. διὰ τρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν τῶν τριῶν τετραγώνων. ὃν μὲν δ^υ α. ὃν δὲ μ^ο θ. ὃν δὲ μ^ο ις. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δ^υ δ^υ α μ^ο τλζ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δ^υ α λεῖψει μ^ο κε. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς μ^ο ιβ^ε. τὰ λοιπὰ δῆλα.

siti quadrati vnus 1 Q. alter 4. & arbitrarius numerus sit 1 Q. + 4. & huius quadratus detractis illorum quadratis, relinquit 8 Q. Hoc volumus ad duplum 1 Q. + 4. hoc est ad 2 Q. + 8. rationem habere quadrati ad quadratum. Omnium semissis sumatur. Igitur & 4 Q. ad 1 Q. + 4. rationem habebit quadrati ad quadratū. Sunt autem 4 Q. quadratus. Proinde & 1 Q. + 4. æquantur quadrato à latere 1 N. + 1. Vnde fit 1 N. 1 ½. erit ergo quæsitorum quadratorum, alter 2 ¼. alter 4. oblatus numerus $\frac{25}{4}$. & omnia quater. Erit alter 9. alter 16. arbitrarius 25. Recurramus ad propositum initiò, & statuamus trium quadratorum vnum 1 Q. alterum 9. tertium 16. & fit compositus ex ipsorum quadratis 1 QQ. + 337. Hæc æquantur quadrato à latere 1 Q. − 25. vnde fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Reliqua sunt manifesta.

IN QVAESTIONEM XXXII.

SVBTILITER Diophantus soluit propositum lemma quo quærit duos quadratos, & præterea numerum à cuius quadrato auferendo quadratos duorum quæsitorum quadratorum, residuum ad duplum eiusdem numeri sit in ratione quadrati ad quadratum. Etenim ponit quæsitum numerum 1 Q. + 4. At quæsitos quadratos 1 Q. & 4. sic enim auferendo horum quadratos, à quadrato illius numeri superest 8 Q. qui ad 2 Q. + 8. debet esse in ratione quadrati ad quadratum; quare & horum semisses, puta 4 Q. & 1 Q. + 4. erunt rursus in ratione quadrati ad quadratum, cùm non mutetur proportio. Ac proinde cùm 4 Q. sit quadratus, oportet & 1 Q. + 4. esse quadratum, cuius latus esto 1 N. + 1. fit 1 N. $\frac{3}{2}$. Sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{9}{4}$ & 4. at quæsitus numerus $\frac{25}{4}$. & ad vitandas fractiones, omnia per 4. multiplicantur, fiúntque quæsiti quadrati 9. & 16. quæsitus numerus 25. Statuentes ergo alterum quadratorum 1 Q. alterum 9. tertium 16 fit summa compositi ex eorum quadratis 1 QQ. + 337. æqualis quadrato à latere 1 Q. − 25. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Sunt itaque quæsiti quadrati $\frac{144}{25}$. 9. 16. summa quadratorum ab ipsis ortorum est $\frac{231361}{625}$. quadratus vtique à latere $\frac{481}{25}$.

Porrò animaduersione dignum est quadratos, qui per assumptum lemma quæruntur esse semper quadratos laterum circa rectum trianguli rectanguli, & numerum quæsitum esse semper quadratum hypotenusæ, seu summã eorundem quadratorum, vt vides in hypothesi Diophantæa quadratos reperiri 9. & 16. At quæsitum numerum esse 25. Et tres huiusmodi quadratos semper soluere lemma propositum sic demonstrabitur. Sint quadrati A B. quorum summa C. sit etiam quadratus. Et à quadrato ipsius C. auferantur quadrati ipsorum A B. & supersit G. sumatúrque H. duplus ipsius C. dico G. ad H. habere rationem quadrati ad quadratum. Sit enim D. productus ex A. in B. eritque D. quadratus cùm fiat ex quadrato in quadratum. Itaque quia C. æquatur ipsis A B. simul, [4] erit quadratus ipsius C. æqualis quadratis ipsorum A B. & duplo ipsius D. Quare cùm auferendo quadratos ipsorum A B. à quadrato ipsius C. supersit G. erit G. duplus ipsius D. Ergo cùm & H. sit duplus ad C. erit G. ad H. sicut D. ad C. sed D. & C. sunt quadrati. Igitur ratio G. ad H. est ratio quadrati ad quadratum. Quod ostendendum erat. 4. *secundi.*

	G. 288.	H. 50.
A 9.	B 16.	C 25.
	D 144.	

Hinc elicitur Canon facillimus ad soluendum propositam quæstionem.

Sume pro duobus quæsitorum quadratorum, quadratos laterum circa rectum trianguli rectanguli. Tum diuide productum mutuo ductu eorundem, per quadratum hypotenusæ, orietur tertius.

Verbi gratia, exposito triangulo rectangulo 5. 12. 13. Erunt duo ex quæsitis quadratis 25. & 144. & quia ducto 25. in 144. fit 3600. diuiso eo per quadratum hypotenusæ, puta per 169. fit tertius quæsitorum $\frac{3600}{169}$. & soluta est quæstio. Nam trium quadratorum quadrati simul faciunt $\frac{623051521}{28561}$. quadratum à latere $\frac{24961}{169}$.

QVÆSTIO XXXIII.

ΟΚΤΑΔΡΑΧΜΟΥΣ καὶ πενταδράχμους χοέας τις ἔμιξε,
Τοῖς προπόλοισι πιεῖν χρηστ' ἀποταξάμενος.
Καὶ τιμὴν ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τετράγωνον,
Τὰς ἐπιταχθείσας δεξάμενος μονάδας,
Καὶ ποιοῦντα πάλιν ἕτερόν σε φέρειν τετράγωνον,
Κτησάμενον πλευρὰν σύνθεμα τῶν χοέων.
Ὥστε διάστειλον, τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν,
Καὶ πάλι τοὺς ἑτέρους παῖ λέγε πενταδράχμους.

DRACHMARVM *quinque, & drachmarum miscuit octo*
Quis choeas, famulis vina bibenda suis.
Pro cunctis pretium, numerum præbens tetragonum,
Qui præfinitas suscipiens monadas
Diuersum dat quadratum. Sed summa choarum
Illius exæquat constituitque latus.
Dic age quot choeas drachmarum comparat octo,
Drachmarum choeas, dic age, quinque, puer.

QVOD significatur hoc epigrammate tale est. Quidam emit duos cados vini: vnius quidem choam drachmis 8.

ΤΟ σημαινόμενον διὰ τοῦ ἐπιγράμματός ἐστι τοιοῦτον. ἠγόρασέ τις δύο κενῆ οἴνου. ἐκ μὲν τοῦ ἑνὸς τὸν χοέα

δραχμῶν η. ἐκ δὲ τοῦ ἑνὸς τὸν χοέα δραχμῶν ε. καὶ ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τιμὴν τετράγωνον ἀριθμόν, ὃς προσλαβὼν μο ξ. ἐποίει τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τὸ πλῆθος τῶν χοέων. διάστειλον τοὺς ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους. ἔστω τὸ πλῆθος τῶν χοέων ς^ος α. ὥστε ἡ τιμὴ γίνεται Δ^Υ α. λείψει μο ξ. λοιπὸν δεῖ Δ^Υ α ⋔ μο ξ. ποιεῖν ἴσον τετραγώνῳ. καὶ δεῖ τάσσειν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ς^ων α. λείψει μο ὅσων δήποτε. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ Δ^Υ α. λείψασα μο ξ. σύγκειται ἐκ δύο τινῶν ἀριθμῶν τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων, καὶ τῆς τιμῆς τῶν πενταδράχμων, καὶ τὸ πέμπτον τῆς τιμῆς τῶν πενταδράχμων, ποιεῖ τὸ πλῆθος τῶν πενταδράχμων, τὸ δὲ ὄγδοον τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων, ποιεῖ τὸ πλῆθος τῶν ὀκταδράχμων. καὶ ἐπεὶ τὸ πλῆθος τῶν χοέων συντεθέντων ποιεῖ ς^ον α. γέγονεν οὖν τὸν Δ^Υ α. λείψει μο ξ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως τὸ τοῦ ἑνὸς πέμπτον, καὶ τὸ τοῦ ἑτέρου ὄγδοον ποιῇ ς^ον α. καὶ τοῦτο δὲ οὐ πάντοτε δύναμαι, εἰ μὴ κατασκευάσθῃ ὁ ς^ος μείζων μὲν τοῦ ὀγδόου Δ^Υ α. λείψει μο ξ. ἐλάσσων δὲ τοῦ πέμπτου Δ^Υ α. λείψει μο ξ. ἔσται ἄρα Δ^Υ α. λείψει μο ξ. μείζων ς^ῶν ε. ἐλάσσων δὲ ς^ῶν η. ἐπεὶ οὖν Δ^Υ α. λείψει μο ξ. μείζων ἐστὶν ς^ῶν ε. κοιναὶ προσκείσθωσαν μο ξ. ὥστε καὶ Δ^Υ α. μείζων ἐστὶν ς^ῶν ε. μο ξ. ὥστε καὶ δύναμις α. ἴση ἐστὶν ς^οῖς ε. καὶ ἀριθμῷ τινι μείζονι μο ξ. ὥστε δεήσει τὸν ἀριθμὸν μείζονα εἶναι, ἢ

alterius verò choam drachmis quinque, & pro omnibus pretium persoluit numerum quadratum, cui addendo 60. fit quadratus latus habens multitudinem choarum. Distingue nunc choas octo drachmarum, à chois quinque drachmarum. Esto choarum multitudo 1 N. Ergo pretium erit 1 Q - 60. Restat vt 1 Q - 60. æquetur quadrato, & oportet huius quadrati latus ponere 1 N. cum defectu aliquot vnitatum. Sed quoniam 1 Q - 60. componitur ex duobus numeris, pretij scilicet choarum quæ constant octo drachmis, & pretij choarum quæ constant quinque drachmis, & huius pretij quinta pars, facit multitudinem choarum constantium quinque drachmis; sicut illius pretij octaua pars facit multitudinem choarum constantium octo drachmis; at multitudo omniū choarum est 1 N. Oportet 1 Q - 60. diuidere in duos numeros, ita vt vnius quintas cum alterius octante faciat 1 N. Atqui hoc fieri non potest nisi 1 N. inueniatur maior octante de 1 Q. - 60. minor autem quintante eiusdem 1 Q - 60. Erit ergo 1 Q - 60. maior quàm 5 N. minor quam 8 N. Quia igitur 1 Q - 60. maior est quàm 5 N. adiiciantur vtrimque 60. Igitur 1 Q. maior est quàm 5 N + 60. Proinde 1 Q. æquatur 5 N. & numero alicui maiori quàm 60. Quare oportet 1 N. maiorem esse, vel saltem non

minorem quàm 11. Rursum quoniàm 1 Q − 60. minor est quàm 8 N. addantur vtrimque 60. Ergo 1 Q. æqualis est 8 N. & numero alicui minori quàm 60. Vnde oportet 1 N. reperiri non maiorem quàm 12. At demonstratum est non minorem esse debere quàm 11. Oportet igitur 1 N. inueniri maiorem quàm 11. minorem quàm 12. si autem velimus 1 Q − 60. æquare quadrato, fingemus quadrati latus 1 N. cum defectu aliquot vnitatum, & fiet 1 N. ex aliquo numero in se ducto, & adsumente 60. & per sui duplum diuiso. Eò itaque res deducta est, vt inueniendus sit numerus, cuius quadratus si adsciscat 60. & summa per duplum ipsius numeri diuidatur, fiat quotiens maior quàm 11. minor quàm 12. & si quæsitum statuamus 1 N. oportebit 1 Q + 60. diuidentes per 2 N. facere quotientem maiorem quàm 11. minorem quàm 12. Oportet ergo 1 Q. + 60. diuiso per 2 N. quotientē fieri maiorem quàm 11. Quare 1 Q + 60. maior sit oportet quàm 22. N. Proinde 22 N. æquales sunt 1 Q. & numeto alicui minori quàm 60. Quare non debet 1 N. minor esse quàm 19. Rursus oportet 1 Q + 60. diuidentes per 2 N. quotientem fieri maiorem quàm 12. Quare 1 Q + 60. minor est quàm 24 N. Proinde 24 N. æquantur 1 Q. & numero alicui maiori quàm 60. Vnde

μὴ ἐλάσσονα μ° ια. πάλιν ἐπεὶ ἡ δύναμις α. λεῖψει μ° ξ. ἐλάσσων ἐστὶν ςς η. κοιναὶ προσκείσθωσαν μ° ξ. ὥστε δ α. ἴση ἐστὶν ςς οῖς η. καὶ ἀριθμῷ τινι ἐλάττονι μ ξ. ὅθεν δεῖ τὸν ς εὑρίσκεσθαι μὴ μείζονα μ° ιβ. ἐδείχθη δὲ καὶ μὴ ἐλάττων μ° ια. ὥστε δεήσει τὸν ς εὑρεῖν μείζονα μὲν μ° ια. ἐλάσσονα δὲ μ ιβ. ἐὰν δὲ ζητῶμεν δ α. λεῖψει μ ξ. ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσομεν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ς α. λείψαντος μονάδας τινάς, καὶ γίνεται ὁ ς ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν γενομένου, καὶ προσλαβόντος μ° ξ. καὶ παραβληθέντος παρὰ τὸν διπλασίονα αὐτοῦ, καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ἀριθμόν, ὅπως ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος προσλαβὼν μ° ξ. καὶ παραβληθεὶς παρὰ τὸν διπλασίονα αὐτοῦ, τὴν παραβολὴν ποιῇ μείζονα μὲν μ° ια. ἐλάσσονα δὲ μ ιβ. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὸν ζητούμενον ς α. δεῖ δ α. μ ξ. μερίζοντες παρὰ ςς β. τὴν παραβολὴν ποιεῖν μείζονα μὲν μ ια. ἐλάσσονα δὲ μ ιβ. δεῖ οὖν δ α. μ ξ. μερίζοντας παρὰ ςς οῖς β. παραβολὴν ποιεῖν μείζονα μ ια. ὥστε δ α. μ ξ. μείζων ὀφείλουσιν εἶναι ςς κβ. ὥστε ςς κβ. ἴσοι εἰσὶν δ α. καὶ ἀριθμῷ τινι ἐλάσσονι μ ξ. ὥστε ὁ ς οὐκ ὀφείλει εἶναι ἐλάσσων μ ιθ. πάλιν δεῖ δ α. μ ξ. μερίζοντας παρὰ ἀριθμοὺς β. τὸν ς εὑρεῖν ἐλάσσονα μ ιβ. ὥστε δύναμις α μ ξ. ἐλάσσους εἰσὶν ἀριθμῶν κδ. ἀριθμοὶ ἄρα κδ. ἴσοι εἰσὶν δυ α. καὶ ἀριθμῷ τινι μείζονι μ ξ. ὅθεν

ὁ ἀριθμὸς ὀφείλει ἐλάσσων εἶναι μο κα. ἀλλὰ καὶ μείζων μο ιθ. ὥστε δεῖ δυνάμει α. λεῖψει μο ξ. ἴσον τετράγωνον ποιοῦντα τάσσειν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ς α. λεῖψει μο κ. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς μο ια. α^β. ὁ τετράγωνος ρλβ. α^δ. ἀφαιρῶ μο ξ. λοιπαὶ μο οβ. α^δ. δεῖ οὖν τὰς μονάδας οβ. α^δ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου πέμπτον, μετὰ τοῦ τοῦ δευτέρου ὀγδόου ποιῇ μο ια. α^β. ἔστω τὸ τοῦ πρώτου πέμπτον μέρος ς α. τὸ ἄρα τοῦ δευτέρου ὄγδοον ἔσται μο ια. α^β. λεῖψει ς α. αὐτοὶ ἄρα ἔσονται, ὁ μὲν ςς ε. ὁ δὲ μο ϙβ. λεῖψει ςς η. ταῦτα ἴσα οβ. α^δ. ἔσται ὁ ς μο οθ^ιβ. τὸ ἄρα πλῆθος τῶν πενταδράχμων χοέων ἔσται οθ^ιβ. τὸ δὲ τῶν ὀκταδράχμων χοέων νθ^ιβ. καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

oporret 1 N. minorem esse quàm 21. Sed & ostensum est maiorem esse debere quàm 19. Oportet ergo quadratum æqualem 1 Q − 60. paranres, latus statuere 1 N − 20. Vnde inuenitur 1 N. 11 $\frac{1}{2}$. Quadratus eius 132 $\frac{1}{4}$. Tollo 60. relinquuntur 72 $\frac{1}{4}$. Oportet ergo diuidere 72 $\frac{1}{4}$. in duos numeros, vt prioris quintans, cum octante posterioris faciat 11 $\frac{1}{2}$. Esto quintans prioris 1 N. Erit ergo posterioris octans 11 $\frac{1}{2}$ − 1 N. Ipsi ergo erunt, alter 5 N. alter 92 − 8 N. Hæc simul æquantur 72 $\frac{1}{4}$. & fit 1 N. $\frac{79}{12}$. Multirudo ergo choarum constanrium quinque drachmis erit $\frac{79}{12}$. At multitudo choarum constantium octo drachmis erit $\frac{59}{12}$. Et reliqua sunt manifesta.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

QVOT mendas hinc sustulerimus æquo lectori æstimandum relinquo, qui nostram cum versione Xilandri contulerit. Sanè vt omittam reliqua, vbi legebatur in codice manu exarato, τοῖς ὀβολοῖς ποιεῖν χρηστὸν ἐπιτετα[γ]μένον, reposuimus flagitante sententia & lege metri, τοῖς παντοπολοῖσι ποιεῖν χρηστ' ἀποταξάμενος, & vbi legebatur τοὺς ὀκταδράχμους ποιήσον, emendauimus τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν. Vtrumque ex sententia Salmasij nostri. Porrò emendato textu, non magna hîc est difficultas, quæ tamen animaduersione digna censeo, hæc sunt.

Primò, quod ait Diophantus 1 Q − 60. non posse diuidi in duas partes, ita vt alterius quintans cum alterius octante faciat 1 N. nisi 1 N. statuatur maior octante, minor autem quintante ipsius 1 Q. − 60. perspicuum est ex adnotatis ad quintam primi, cuius hîc auxilium implorare cogimur, & cui huiusmodi conditionem præscripsit author.

Secundò ritè infert. Si quintans de 1 Q − 60. est maior quàm 1 N. ipse 1 Q. − 60. maior est quàm 5 N. & rursus si octans de 1 Q − 60. est minor quàm 1 N. ipse 1 Q. − 60. minor est quàm 8 N. Vt ergo inueniantur termini intra quos consistere debet valor numeri, vtendum artificio quo ad quadragesimã quintam quarti, & alibi sæpè vsi sumus. Etenim quia 1 Q − 60 maior est quàm 5 N. addendo vtrimque 60. fit 1 Q maior quàm 5 N. + 60. & tandem fit 1 N. maior quàm R 66 $\frac{1}{4}$ + 2 $\frac{1}{2}$. seu per approximationem maior quàm 11. Similiter si 1 Q. − 60 statuatur minor quàm 8 N. fiet 1 N. minor quàm R 76 + 4. seu per approximationem minor quàm 12. Concludit ergo Diophantus 1 N. cadere debere inter 11. & 12. Quod non ita accipiendum est, vt 11 & 12. exactissimi termini censeantur, cùm enim non possint in rationalibus præscribi exactè huiusmodi termini, satis habuit Diophantus tales præscribere

intra

intra quos ritè sumi possit valor numeri. Cæterùm si exactiores requirantur, assignari poterunt 10 $\frac{1}{2}$. & 12 $\frac{1}{4}$. Malè autem assignaueris 10. & 13. cùm inter eos cadant infiniti numeri, qui nequaquam sumi possunt pro valore numeri.

Deoque cū fingendo latus quadrati 1 Q – 60. fiat valor numeri, cuidam quadrato addendo 60 & summam diuidēdo per duplum lateris illius, patet quærēdum esse numerū per cuius duplum diuidendo quadratum ipsius, auctū numero 60. fiat quotiens maior quàm 11. minor quàm 12. Posito ergo tali numero 1 N. fit vtique $\frac{1 Q + 60}{2 N}$ maior quàm 11. minor quàm 12. & omnia ducendo in 2 N. fit 1 Q + 60. maior quàm 22 N. minor quàm 24. N. Et vtraque æquatione per approximationem resoluta, constat quæsitum numerum maiorem esse debere quàm 19. minorem quàm 21. Quare sumit Diophantus 20. & ponit quadrati 1 Q. – 60. latus 1 N – 20. vnde fit 1 N. 11 $\frac{1}{2}$. summa scilicet choarum. Ergo totum pretium est quadratus 72 $\frac{1}{4}$. Quare superest vt diuidamus 72 $\frac{1}{4}$. in duas partes, ita vt quintans vnius cum octante alterius faciat 11 $\frac{1}{2}$. Hoc exequitur Diophātus per operationem quintæ primi, & reliqua sunt manifesta.

Porrò quod terminos statuit 19. & 21. intra quos sumi debet vnitatum numerus in latere fictitio ponendus, non sic etiam accipiendum est, quod putet exactissimos eos esse, nam si libet exactiores præscribentur 18 $\frac{1}{4}$ & 22 $\frac{1}{2}$. Quare huiusmodi numerus poni poterat 19. atque etiam 21. vel 22. vel quilibet alius intra præscriptos limites. Nequaquam autem 18. vel 23. vt & ratio & experientia dictat.

Quoniam verò argutum epigramma, incertum an ab ipso confictum, vel ab alio quopiam mutuatum, nobis exhibuit Diophantus, placet hoc loco elegantissima aliquot epigrammata proferre, non ioiucundas quæstiones de rebus arithmeticis continentia, quæ nondum edita fuerunt, quæque pridem è codice probatissimo Palatino excerpta tradidit nobis vir eruditissimus Claudius Salmasius, clarissimum Burgundiæ nostræ lumen. His subiiciemus versionem nostram totidem versibus exaratam, feliciter, an secus iudicent Musarum alumni. Tum breuiter quæstiones ipsas explicabimus. Cætera quæ vel ad Græci sermonis ornatum spectant, vel reconditæ quid sapiunt eruditionis Salmasio nostro relinquemus, qui breui, vt studiosos sperare iubeo, Anthologiam innumeris auctam Epigrammaris, magno reipublicæ literariæ incremento, in lucem proferet. Vnum est quod moneam, maximam horum epigrammatum partem Metrodoro tribui, quibusdam verò, alia nomina esse præfixa, quædam denique incertos habere authores.

I.

Ολβιε Πυθαγόρη Μουσέων Ελικώνιον ἔρνος
Εἰπέ μοι εἰρομένῳ ὁπόσοι σοφίης κατ' ἀγῶνα
Σοῖσι δόμοισιν ἔασιν, ἀεθλεύοντες ἄριστα.
Τοὶ γὰρ ἐγὼν εἴποιμι Πολύκρατες. ἡμίσεες μὲν
Αμφὶ καλὰ σπεύδουσι μαθήματα. τέτρατοι αὖτε
Αθανάτου φύσεως πεπονήαται. ἑβδομάτοις δὲ
Σιγὴ πᾶσα μέμηλε, καὶ ἄφθιτοι ἔνδοθι μῦθοι.
Τρεῖς δὲ γυναῖκες ἔασι, Θεανὼ δ' ἔξοχος ἄλλων.
Τόσους Πιερίδων ὑποφήτορας αὐτὸς ἀγινῶ.

Dic Heliconiadum decus ô sublime sororum
Pythagora, tua quot tyrones tecta frequentent
Qui sub te Sophiæ sudant in agone magistro.
Dicam, tuque animo mea dicta Polycrates hauri.
Dimidia horum pars præclara mathemata discit
Quarta immortalem naturam nosse laborat.

Septima sed tacitè sedet, atque audita reuoluit.
Tres sunt fœminei sexus; At prima Theano.
Pieridum arcanis tot vates imbuo sacris.

Hîc perspicuum est numerum quæri, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{7}$. simul adsumpto ternario ipsum quæsitum numerum constituant. Ponatur is 1 N. ergo $\frac{1}{2}$ N. $\frac{1}{4}$ N. $\frac{1}{7}$ N. & præterea 3. hoc est $\frac{25}{28}$ N. + 3. æquantur 1 N. vnde fit 1 N. 28. quæsitus numerus discipulorum. Nam eius $\frac{1}{2}$ est 14. At $\frac{1}{4}$ est 7. Demum $\frac{1}{7}$. est 4. quorum summa 25. adsciscens 3. conficit ipsum 28. vt requirebatur. Quoniam verò multæ quæstiones eiusdem naturæ deinceps proponentur, ad eas soluendas esto vniuersalis Canon.

Sume minimum numerum qui habeat datas partes, tum illius datas partes simul aufer ab eodem numero, per residuum diuide datum numerum in ipsa expressum quæstione, quotientem ducito in sumptum ab initio numerum, fiet quæsitus numerus.

Vt in proposita quæstione, minimus numerus qui habeat $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. est 28. à quo aufer $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. illius, puta 25. relinquitur 3. per quem diuide 3. numerum in quæstione expressum, fit quotiens 1. quem ducito in ipsum 28. fit quæsitus numerus 28.

II.

Α Κύπρις τὸν Ἔρωτα κατηφιόωντα προσηύδα.
Τίπτε τοι ὦ τέκος ἄλγος ἐπέχραεν; ὃς δ' ἀπαμείπτο.
Πιερίδες μοι μῆλα διήρπασαν ἄλλυδις ἄλλη
Αἰνύμεναι κόλποιο, τὰ δὴ φέρον ἐξ Ἑλικῶνος.
Κλειὼ μὲν μήλων πέμπτον λάβε; δωδέκατον δὲ
Εὐτέρπη; ἀτὰρ ὀγδοάτην λάχε δῖα θάλεια.
Μελπομένη δ' εἰκοστὸν ἀπαίνυτο. Τερψιχόρη τε
Τέτρατον. ἑβδομάτην δ' Ἐρατὼ μετεκίαθε μοίρην.
Η δὲ τριηκόντων με Πολύμνια νόσφισε μήλων.
Οὐρανίη δ' ἑκατόν τε καὶ εἴκοσι. Καλλιόπη δὲ
Βριθομένη μήλοισι τριηκοσίοισι βέβηκε.
Σοὶ δ' ἄρα κουφοτέροισιν ἐγὼ σὺν χερσὶν ἱκάνω
Πεντήκοντα φέρων τάδε λείψανα μῆλα θεάων.

Talibus aggreditur mœrentem Cypris Amorem.
Ecquis, nate, animo dolor insidet? Ille ita contrà.
Diripuere sinu Libethrides vndique adortæ
Decerpta ex Helicone sacro quæ mala ferebam.
Clio malorum quintante, duodecimaque
Euterpe, octaua sed gaudet parte Thalia.
Melpomenæ cessit vicesima; Nomen habenti
A me, septima. Terpsichore quadrante potitur.
Triginta me multauit Polyhymnia malis.
Vranie centum viginti. Calliopeque
Improbior, rapiis discessit onusta tricenis.
Ecce tibi manibus vacuis occurro, dearum
Relliquias, quinquaginta vix mala reportans.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{4}$. simul, adſumptis numeris 30. 120. 300. 50. conficiant ipſum quæſitum numerum. Quare per Canonem ſupra traditum ſumo minimum qui habeat datas partes, puta 840. ſuntque illius partes datæ 168. 70. 105. 42. 120. 210. quarum ſumma 715. qua detr acta de 840. manet 125. per quem diuido ſummam datorum numerorum 30. 120. 300. 50. puta 500. fit quotiens 4. quo ducto in ſumptum numerum 840. fit quæſitus numerus 3360. malorum ſcilicet multitudo.

III.

Αἱ Χάριτες μήλων καλάθοις φέρον, ἐν δ᾽ ἑκάστῃ
Ἶσον ἔην πλῆθος. Μοῦσαι σφίσιν ἀντεβόλησαν
Ἐννέα, καὶ μήλων σφέας ᾔτεον· αἱ δ᾽ ἄρ᾽ ἔδωκαν
Ἶσον ἑκάστῃ πλῆθος, ἔχον δ᾽ ἴσα ἐννέα καὶ τρεῖς.
Εἰπὲ πόσον δῶκαν, ὅπως δ᾽ ἴσα πᾶσαι ἔχεσκον.

Mala ferunt calathis Charites, æqualia cuique
Mala inſunt calatho. Muſarum his obuia turba
Mala petunt: Charites cunctis æqualia donant.
Tunc æqualia tres contingit habere, nouemque.
Dic quantum dederint, numerus ſit vt omnibus idem.

Senſus eſt. Singulæ Charites habent eundem ſeu æqualem malorum numerum, & quælibet tradit ſingulis muſarum æqualem numerum, hacque demum contributione facta, quælibet Charis & quælibet Muſa, eundem reperitur habere numerum. Soluitur autem quæſtio ſi iungas numerum Charitum atque Muſarum, puta 3. & 9. vnde fit 12. Quare dicendum quamlibet Charitum ab initio habuiſſe mala 12. vel numerum quemlibet malorum qui ſit multiplex ad 12. hac tamen lege vt ſi ſumas 12. quælibet Charis cuilibet Muſæ tribuat malum vnum; ſi ſumas 24. quælibet Charis tribuat cuilibet Muſæ, mala duo, & ſic deinceps. Verbi gratia Ponamus. Charitum quamlibet habuiſſe ab initio mala 24. & dare ſingulis Muſis mala 2. Ergo quælibet Charis tribuet Mala 18. quia ſunt nouem muſæ, ac proinde cuilibet Chariti relinquentur mala 6. At quælibet muſa accipiens Mala 2. à qualibet Charite, habebit etiam mala 6. vt euidens eſt. Quare patet propoſitum.

IV.

Τεῦξόν μοι στέφανον, χρυσόν, χαλκόν τε κεράσας,
Κασσίτερον δ᾽ ἅμα τοῖσι, πολύκμητόν τε σίδηρον
Μνῶν ἑξήκοντα. χρυσὸς δ᾽ ἐχέτω μετὰ χαλκοῦ
Δοιὰ μέρη τριτάτων. χρυσὸς θ᾽ ἅμα, κασσίτερός τε
Τρισσὰ μέρη τετόρων. χρυσὸς δ᾽ ἅμα ἠδὲ σίδηρος
Τόσσα μέρη τῶν πέντε. πόσον δ᾽ ἄρα δεῖ σε κεράσσαι
Λέξον τοῦ χρυσοῦ, χαλκοῦ πόσον, ἀλλ᾽ ἔτι λέξον
Κασσιτέροιο πόσον, λοιποῦ πόσον εἰπὲ σιδήρου
Ὥστε σε τὸν στέφανον τεῦξαι μνῶν ἑξήκοντα.

Æs, ferrum, ſtannum miſcens, aurique metallum
Sexaginta minas penſantem finge coronam.
Æs aurumque duos ſimul efficiunto trientes,

Ternos quadrantes stanno mixtum impleat aurum.
At totidem quintas auri vis addita ferro.
Ergo age dic fului quantum tibi coniicis auri
Miscendum, dic quantum æris stannique requiras.
Dic quoque sufficiant duri quot pondera ferri
Præscripiam vt valeas rite efformare coronam.

Esto quantitas auri 1 N. Quia ergo aurum & æs simul sunt $\frac{2}{3}$ de 60. puta 40. erit æris quantitas 40 − 1 N. eadem de causa, erit stanni quantitas 45 − 1 N. & ferri quantitas 36 − 1 N. Quantitas ergo quatuor metallorum simul, erit 121 − 2 N. æqualis 60. vnde fit 1 N. 30 $\frac{1}{2}$. quantitas scilicet auri, at quantitas æris est 9 $\frac{1}{2}$. stanni 14 $\frac{1}{2}$. ferri 5 $\frac{1}{2}$.

V.

Τὸ τρίτον ἀργυροποιὲ προσέμβαλε καὶ τὸ τέταρτον
Τῆς φιάλης εἰς ἕν, καὶ τὸ δυωδέκατον.
Εἰς δὲ κάμινον ἔλαυνε βαλὼν, καὶ πάντα κυκήσας
Ἔξελέ μοι βῶλον, μνᾶν δέ μοι ἑλκυσάτω.

Sume tibi Phialę faber ingeniose trientem
Quartamque, & partem sume duodecimam.
Iniice fornaci simul omnia mixta; sed inde
Prodeat vnam ęquans pondere massa minam.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{12}$. simul conficiant 1. Esto is 1 N. ergo $\frac{1}{3}$ N. $\frac{1}{4}$ N. $\frac{1}{12}$ N. simul, hoc est $\frac{2}{3}$ N. æquantur vnitati, vnde fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. quot minas pendebat Phiala.

VI.

Ἔχω τὸν ἑξῆς, καὶ τὸ τοῦ τρίτου τρίτον.
Κἀγὼ τὸν ἑξῆς, καὶ τὸ τοῦ πρώτου τρίτον.
Κἀγὼ δέκα μνᾶς, καὶ τὸ τοῦ πρώτου τρίτον.

Æquo sequentem cum triente tertij.
Æquat sequens me, iunctus & primi triens.
Supero trientem primi ego decem minis.

Tres postulantur numeri, vt primus contineat secundum & $\frac{1}{3}$ tertij. Secundus contineat tertium & $\frac{1}{3}$ primi. Tertius contineat 10. & $\frac{1}{3}$ primi. Statuatur tertius 1 N. + 10. ergo triens primi erit 1 N. ac proinde primus ipse 3 N. Quia verò secundus continet tertium & $\frac{1}{3}$ primi, si tertio puta 1 N. + 10. addas $\frac{1}{3}$ primi, puta 1 N. fiet secundus 2 N. + 10. Restat vt primus æquetur secundo cum triente tertij. Quare 3 N. æquantur 2 $\frac{1}{3}$ N. + 13 $\frac{1}{3}$. & fit 1 N. 20. Sunt igitur quæsiti numeri 60. 50. 30.

VII.

Τοὺς χιλίους στατῆρας οὓς ἐκτησάμην
Λαβεῖν κελεύω τοὺς ἐμοὺς παῖδας δύο.
Πλεῦ γνησίου τὸ πεμπτὸν ηὐξήσθω δέκα
Μέτρου τετάρτου τῶν λαχόντων τῷ νόθῳ.

Quos possidere mille statras datum est
Sic partiantur præcipio nati duo.
Ex coniuge orti quinta pars, addat super
Quadranti eorum quos nothus sumet, decem.

Sensus est. Volo legitimum filium de mille nummis tot accipere, vt eorum quinta pars superet numero 10. quadrantem eorum quos sumet Nothus. Ergo numerus 1000. diuidendus est in duas partes, ita vt quinta pars vnius superet denario quadrantem alterius. Esto pars vna 1 N. altera 1000 − 1 N. ergo $\frac{1}{4}$ N. + 10. æquari debet quintæ parti de 1000 − 1 N. hoc est 200 − $\frac{1}{5}$ N. æquatur $\frac{1}{4}$ N. + 10. & fit 1 N. 422 $\frac{2}{9}$. pars quæ notho cedit. Quare pars quæ legitimo competit, est 577 $\frac{7}{9}$.

VIII.

Ἓξ μνῶν, ἓξ φιάλας Κροῖσος βασιλεὺς ἀνέθηκεν
Δραχμῇ τὴν ἑτέραν μείζονα τῆς ἑτέρας.

Mnarum sex, Phialas sex Cræsus dedicat, atque
Est maior drachma quæque priore sequens.

Cùm quælibet mina contineat drachmas 100. minæ sex sunt 600. drachmæ. Quare numerus 600 diuidendus est in sex partes per continuam vnitatis additionem progredientes. Esto prima 1 N. erit secunda 1 N. + 1. tertia 1 N. + 2. quarta 1 N. + 3. quinta 1 N. + 4. sexta 1 N. + 5. fit omnium summa 6 N. + 15. æqualis 600. vnde fit 1 N. 97 $\frac{1}{2}$. prima pars, sunt ergo aliæ 98 $\frac{1}{2}$. 99 $\frac{1}{2}$. 100 $\frac{1}{2}$. 101 $\frac{1}{2}$. 102 $\frac{1}{2}$.

IX.

Ὡρονόμων ὄχ' ἄριστε, πόσον παρελήλυθεν ἠοῦς;
Ὅσσον ἀποιχομένοιο δύο τρίτα, δὶς τόσα λείπει.

Dic quota nunc hora est? superat tantum ecce diei,
Quantum bis gemini exacta de luce trientes.

Antiquorum more diem diuidentes in duodecim partes æquales, seu in horas 12. quas Gnomonici Planetarias vocant; Ponamus numerum transactarum horarum esse 1 N. ergo reliquus horarum numerus vsque ad noctem erit ex quæstionis lege $\frac{4}{3}$ N. & fiet omnium horarum summa $\frac{7}{3}$ N. æqualis 12. Est ergo 1 N. 5 $\frac{1}{7}$ numerus scilicet horarum transactarum, & supersunt vsque ad finem diei horæ 6 $\frac{6}{7}$.

X.

Τίπτε με τῶν καρύων ἕνεκεν πληγῇσι πιέζεις;
Ὦ μῆτερ, τὰ δὲ πάντα καλαὶ διεμοιρήσαντο
Παρθένοι. ἡ γὰρ ἐμεῖο Μελίσσιον ἕβδομα ἦρα.
Ἡ δὲ δυωδέκατον Τιτάνη λάβεν. ἕκτον ἔχουσι
Καὶ τρίτον Ἀστυόχη φιλοπαίγμονες, ἡ δὲ Φίλιννα.
Εἴκοσι δ' ἁρπάξασα Θέτις λάβε. δώδεκα Θίσβη.
Ἣν ὅρα καὶ δὲ γελᾷ Γλαύκη παλάμῃσιν ἔχουσα
Ἕνδεκα. τοῦτο δέ μοι κάρυον περιλείπεται οἶον.

Quid mibi pro nucibus minitaris verbera mater?
Has pulchræ inter se dispertiuere puellæ.
Septima pars flauæ cessit geminata Melissæ,
Ipsa duodecimam Titane sibi sumpsit, habentque
Sextantem Astyoche, festiua Philinna trientem,
Viginti Thetu, at rapuit Thisbe improba bis sex.
Abstulit & ridens Glauce totidem minus vnâ.
Sed numero ex omni nux hæc mihi denique restat.

Quæritur numerus cuius $\frac{2}{7}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{3}$. simul adsumentes 20. 12. 11. 1. faciant ipsum quæsitum numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 84. cuius partes datæ simul additæ, faciunt 73. quo ablato de 84. superest 11. per quem diuido summam ipsorum 20. 12. 11. 1. puta 44. fit quotiens 4. quo ducto in sumptum numerum 84. fit quæsitus numerus 336. Nam eius datæ partes sunt 96. 28. 56. 112. quorum summa 292. cui si addas summam datorum numerorum, puta 44. fit rursus 336. vt postulabatur.

XI.

Πόσ' σοι μῆλα βέβηκεν ἐμὸν τέκος; ἕκτα μὲν Ἰνὼ
Δοιά, καὶ ὀγδοάτην μοῖραν ἔχει Σεμέλη.
Αὐτονόη δὲ τέταρτον ἀφήρπασεν. αὐτὰρ Ἀγαύη
Πεμπτὸν ἐμῶν κόλπων οἴχετ' ἀπαινυμένη.
Σοὶ δ' αὐτῇ δέκα μῆλα φυλάσσεται. αὐτὰρ ἔγωγε,
Ναὶ μὰ φίλην Κύπριν, ἓν τόδε μοῦνον ἔχω.

Dic vbi, Nate, reposta tibi sunt mala? Trientem
Ino habet, octantem possidet at Semele.
Quadrantem Autonoë sumpsit, properauit Agaue
Quintantem è nostro diripuisse sinu.
Mala decem seruantur adhuc tibi. Testis amica,
Sed Venus, hoc vnum iam superesse mihi.

Inueniendus est numerus, cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. simul adsumpto 11. conficiant ipsum quæsitum numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 120. cuius partes datæ simul faciunt 109. quo sublato de 120. superest 11. per quem diuido datum numerum 11. fit quotiens 1. quo ducto in sumptum numerum 120. fit quæsitus numerus 120. & manifesta est solutio.

XII.

Δρεψαμένη ποτὲ μῆλα φίλαις διεδάσσατο Μυρτώ.
Χρισίδι μὲν μήλων πέμπτον πόρε, τέτρατον Ἡροῖ.
Ἐννεακαιδέκατον Ψαμάθῃ, δέκατον Κλεοπάτρῃ.
Αὐτὰρ ἐεικοστὸν δωρήσατο Παρθενοπείῃ.
Δώδεκα δ' Εὐάδνῃ μουνῶν πόρεν. αὐτὰρ ἐς αὐτὴν
Ἤλυθον ἐκ πάντων ἑκατὸν καὶ εἴκοσι μῆλα.

Dilectis Myrto diuisit mala puellis.
Heronem quarta, sed donat Chrysida quintâ.

Dat decimamnonam Psamathe, decimam Cleopatræ.
Pars munus cedit vicesima Parthenopææ.
Bis sex Euadne capit. Ipsi denique tanto
De numero, centum viginti mala supersunt.

Quærendus est numerus cuius $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{19}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{10}$. simul adsciscentes 12. & 120. seu 132. faciant ipsum quæsitum numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 380. cuius datæ partes simul faciunt 248. quo detracto ab ipso 380. remanet 132. vnde liquet ipsum 380. esse quæsitum numerum.

XIII.

Αντομβύαις ποτε μῆλα φίλαις διεμοιρήσαντο
Ινὼ καὶ Σεμέλη δώδεκα παρθενικαῖς.
Καὶ ταῖς μὲν Σεμέλη πόρεν ἄρτια, ταῖς δὲ ἀδελφὰ
Δῶκε κασιγνήτη, μῆλα δ' ἔχεν πλέονα.
Η μὲν γὰρ τελαῆσι τρεῖ' ἕβδομα δῶκεν ἑταίραις,
Ταῖς δὲ δύω πάντων πέμπτον ἔδωκε λάχος.
Ενδεκα δ' Αστυνόμη μιν ἀφείλατο, καὶ [illegible] ἔλειπεν
Μοῦνα κασιγνήταις μῆλα δύω φερέμεν.
Η δ' ἑτέρη πσούρεσι πόρεν δύο τέτραδα μήλων.
Πέμπτη δ' ἑκταίην μοῖραν ἔδωκεν ἔχειν.
Τέσσαρα δ' Εὐρυχόρη δῶρον πόρε. τέτρασι δ' ἄλλοις
Μήλοισιν Σεμέλη μίμνεν ἀγαλλομένη.

Bis senis Ino quondam Semeleque puellis
Pignus amicitiæ mala dedere suæ.
Parcior & Semele paria istis tradidit. Illis
Imparia exhibuit pluraque mala soror.
Quintam malorum partem dedit ista duabus.
Est data virginibus septima trina tribus.
Astynomeque decem, sed & vnum sumit. At Ino
Germanis retinet bina ferenda suis.
Altera bis geminas gemino quadrante puellas
Donat, sextantem quinta puella capit,
Quatuor Eurychore. Solido Semele quoque gaudet
Quatuor è numero mala relicta sibi.

Hic duo quæruntur numeri. Nam primum Ino mala sua sex puellis ita distribuit, vt duabus simul det $\frac{1}{5}$. malorum, tribus verò $\frac{3}{7}$. sextæ autem 11. mala, quo facto remanent ei mala 2. Quare cùm minimus qui habeat datas partes sit 35. à quo si auferas $\frac{1}{5}$. & $\frac{3}{7}$. puta 22. remanet 13. qui æquatur reliquis malis, patet ipsum 35 esse numerum malorum quæ habuit Ino. Deinde Semele quatuor puellis simul dat duos quadrantes seu $\frac{1}{2}$ suorum malorum, quintæ dat $\frac{1}{6}$. sextæ mala 4. quo facto remaneat ei mala 4. Quare sumpto 12. minimo qui habet datas partes, aufero ab eo datas partes, puta 8. remanet 4. per quem diuido reliqua mala in quæstione expressa, puta 8. fit quotiens 2. quo ducto in sumptum numerum 12. fit 24. numerus malorum Se-

meles. Accidit etiam primum numerum 35. esse imparem, secundum verò 24. esse parem & minorem primo, vt requirebat quæstio.

XIIII.

Η καρύη πολλοῖσιν ἐβεβρίθει καρύοισιν
Νῦν δέ τις ἐξαπίνης μιν ἀπέθρισεν. ἀλλά τι φησίν.
Εκ μὲν ἐμεῦ καρύων πέμπτον λάβε Παρθενόπεια.
Ογδόατον δὲ Φίλιννα φέρει λάχος; ἡ δ' Αγανίππη
Τέτρατον, ἑβδομάτῳ δ' ἐπιτέρπεται Ωρειθυῖα
Εκτὴν δ' Εὐρυνόμη καρύων ἐδρέψατο μοῖραν.
Τελαταὶ δ' ἓξ ἑκατὸν Χάριτες διεμοιρήσαντο.
Εννάκι δ' ἐννέα Μοῦσαι ἐμεῦ λάβον. ἑπτὰ δὲ λοιπὰ
Δήεις ἀκρεμόνεσσιν ἐφημένα τηλεθόοισιν.

Quæ succisa iacet, multo nux ardua quondam
Pollebat fætu, numerumque hac arte recenset.
Nostris ex nucibus quintam sibi Parthenopæa.
Octauamque Philinna capit, quartamque Aganippe.
Septima formosæ conceditur Orithyiæ.
Eurynome sextam è numero sibi vendicat omni.
Centenas terna Charites senasque tulere.
Demum Pierides nouies sumpsere nouenas.
Summis in ramis septem tamen ecce supersunt.

Oportet inuenire numerum cuius $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{6}$. simul vnà cum summa numerorum 106. 81. 7. puta cum 194. faciant ipsum numerum qui quæritur. Minimus habens partes datas est 840. à quo si auferas compositum ex datis partibus, puta 743. remanet 97 per quem si diuidas datum numerum 194. fit quotiens 2. quo ducto in sumptum numerum 840. fit quæsitus numerus 1680.

XV.

Επτάλοφον ποτὶ ἄστυ Γαδειρόθεν, ἕκτον ὁδοῖο
Βαῖτος εὐμύκοις ἄχρις ἐς ἠϊόνας.
Κεῖθεν δ' αὖ πέμπτην Πυλάδου μέχρι Φώκιον οὖδας
Ταύρη χθὼν βοέης οὔνομ' ἀπ' εὐετίης.
Πυρήνην δέ τοι ἔνθεν ἐπ' ὀρθόκραιρον ἰόντι
Ογδοον, ἠδὲ μιῆς δωδέκατον δεκάδος.
Πυρήνης δὲ μεσηγὺ καὶ Αλπιος ὑψικαρήνου
Τέτρατον. Αὐσονίης αἶψα δυωδέκατον
Αρχομένης, ἤλεκτρα φαείνεται Ηριδανοῖο
Ω μάκαρ ὃς δισσὰς ἤνυσα χιλιάδας
Πρὸς δ' ἔτι πέντ' ἐπὶ ταῖς ἑκατοντάδας ἔνθεν ἐλαύνων
Η γὰρ Ταρπηΐη μέμβλετ' ἀνακτορίη.

Quisquis adire cupis Romanam Gadibus vrbem,
Sextans ad ripam Bætidis vsque via est.
Quintantem hinc numera Phocensis ad arua coloni
A multa regio quæ boue nomen habet.
Inde Pyrenæi præcelsa ad culmina montis
Octans est, decimæ parsque duodecima.
Quarta Pyrenæos, gelidas iacet inter & Alpes.
Parte duodecima hinc incipit Ausonia.
Quà Phaëtontiades sudant electra sorores.
Sed tamen vlterius millia perge duo.
Restabunt quingenta tibi tum denique, donec
Tarpeio possis sistere colle gradum.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{120}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{12}$. simul vnà cum 2500. conficiant ipsum quæsitum numerum. Minimus habens datas partes est 120. & illius datæ partes simul faciunt 100. quo ablato de 120. remanet 20. per quem diuidendo 2500. fit quotiens 125. quo ducto in sumptum numerum 120. fit quæsitus 15000. numerus, scilicet stadiorum quæ inter Gades & vrbem Romam numerat Epigrammatarius.

XVI.

Εὐβλεφάροιο δίκης ἱερὰ κρήδεμνα μιαίνας
Ὄφρα σε παντάματωρ χρυσὲ βλέποιμι πόσον.
Οὐδὲν ἔχω, πίσυρας γὰρ ἐπ' ἐκ ἀγαθοῖσι ταλάντων
Οἰωνοῖσι, μάτην δῶκα φίλοις δεκάδας.
Ἥμισυ δ' αὖ, τρίτατόν τε καὶ ὄγδοον (ὦ πολύμορφοι
Ἀνθρώπων κῆρες) ἐχθρὸν ἔχοντα βλέπω.

Iustitiæ sacras ausus conuellere leges
Vt turgens auro cuncta domante forem,
Nil iam possideo, infidis quia nuper amicis,
Laua mente quater dena talenta dedi.
Nunc quoque semissem, simul octantem, atque trientem
(O duram sortem) barbarus hostis habet.

Quærendus est numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{3}$. simul cum 40. efficiant ipsum quæsitum numerum. Minimus habens datas partes est 24. cuius datæ partes simul faciunt 23. quo detracto de 24. superest 1. per quem diuidendo 40. fit 40. quo ducto in 24. fit 960. quæsitus numerus.

XVII.

Πέμπτον μοι κλήρου παῖ λάμβανε. δωδέκατον δὲ
Δέξο δάμαρ. πίσυρες δ' υἱέες οἰχομένου
Παιδὸς, ἀδελφειοί τε δύω, καὶ ἀγάστονε μῆτερ
Ἐνδεκάτην κλήρου μοῖραν ἕκαστος ἔχε.
Αὐτὰρ ἀνεψιοὶ δύο καὶ δέκα δέχθε τάλαντα.
Εὔβουλος δ' ἐχέτω πέντε τάλαντα φίλος.

Πιστοτάτοις δμώεσσιν ἐλευθερίην καὶ ἄποινα
Μισθὸν ὑπηρεσίης, τοῖς δὲ δίδωμι τάδε.
Ωδὶ λαμβανέτωσαν, Ονήσιμος εἴκοσι πέντε
Μνᾶς ἐχέτω. Δᾶος δ᾽ εἴκοσι μνᾶς ἐχέτω.
Πεντήκοντα Σύρος, Συνετὴ δέκα, Τίβιος ὀκτώ.
Επτὰ δὲ μνᾶς Συνέτῳ παιδὶ δίδωμι Σύρου.
Εκ δὲ τριηκόντων κοσμήσατε σῆμα ταλάντων
Ρέζετε δ᾽ οὐδαίῳ ζανὶ θυηπολίην.
Διοσῶν ἐς δὲ πύρην, καὶ ἄλφιτα, καὶ τελαμῶνας,
Εἰκαίην δοιῶν σῶμα χάριν λαβέτω.

Aßis habe quintam, fili; charißima coniux
Sume duodecimam. Quatuor alterius
Natorum nati, fratres bini, optima mater
Vndecimam partem quilibet accipiat.
Ferte talenta decem patrueles aucta duobus
Noster & Eubulus quinque talenta ferat.
Fidis libertas famulis conceditor, hacque
Sint longi merces munera seruitij.
Vicenas quinas sibi sumat Onesimus; atqui
Vicenas finitor Dauus habere minas.
Quinquaginta Syrus, capiat quoque Tibius octo:
At Syneto septem sint, Synetaque decem.
Triginta totis tumulum exornate talentis,
Debitaque inferno sacra parate Ioui.
Bina pyræ, cum fasciolis, dapibusque supremis
Artubus vngendis bina talenta dico.

Hîc exprimuntur partes $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{11}$. & talenta 12. 5. 30. 2. 2. ac præterea minæ 25. 20. 50. 8. 7. 10. seu minæ 120. quæ valent talenta duo, quare talentorum expressorum numerus est 53 Porrò minimus qui habeat datas partes est 660. atque idem est numerus qui quæritur, quia si ab eo abstuleris datas illius partes, puta 607. remanet 53.

XVIII.

Τύμβος ἐγώ, κεύθω δὲ πολύστονα τέκνα Φιλίννης,
Τοῖον μαψιτόκων καρπὸν ἔχων λαγόνων.
Πέμπτον ἐν ἠιθέοις, τέτρατον δ᾽ ἐνὶ παρθενικῇσι.
Τρεῖς δέ μοι ἀρτιγάμους δῶκε Φίλιννα κόρας.
Λοιποὶ δ᾽ ἠελίοιο παναμμοροι ἠδὲ καὶ αὐδῆς
Τέσσαρες ἐκ λαγόνων εἰς Αχέροντα πέσον.

Marmore clauditur hoc proles numerosa Philinnæ,
Frustrà maternis edita visceribus.

Quintantem iuuenes complent ; geminumque puellæ
Sextantem ; nuptas tres tegit iste lapis.
Quatuor haud viso ciciderunt sole sub orcum
Translati ex vtero , proh dolor ! in tumulum.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. simul cum 7. faciant ipsum quæsitum numerum, & statim per Canonem traditum inuenitur numerus 15.

X I X.

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος, ἆ μέγα θαῦμα
Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Ἑκτὴν κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην.
Δωδεκάτῃ δ' ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν.
Τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
Ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.
Αἴ αἶ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς,
Τοῦ δὲ καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
Τῇ δὲ πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου;

Hunc Diophantus habet tumulum , qui tempora vitæ
Illius , mira denotat arte tibi.
Egit sextantem iuuenis ; lanugine malas
Vestire hinc cœpit parte duodecima.
Septante vxori post hæc sociatur , & anno
Formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem ætatis postquàm attigit ille paternæ
Infelix subita morte peremptus obit.
Quatuor æstates genitor lugere superstes
Cogitur , hinc annos illius assequere.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{2}$. simul adsumentes 5. & 4. seu 9. faciant ipsum quæsitum numerum. Is ex tradito Canone inuenietur esse 84.

X X.

Παῖς τὸ ὅσον βεβίωκε χρόνου, παῖς μὲν τὸ τέταρτον
Δημοχάρης βεβίωκε; νεηνίσκος δὲ τὸ πέμπτον.
Τὸ τρίτον εἰς ἄνδρας. πολιὸν δ' ὅτ' ἀφίκετο γῆρας
Ἔζησεν λοιπὰ τρεῖς καὶ δέκα γήραος οὐδῷ.

Quadrantem ætatis puerilibus egit in annis
Quintantem iuuenis decurrit , virque trientem
Demochares , cana demum accedente senecta
Bis quinos reliquûm vixit tresque insuper annos.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{3}$. adsumentes 13. faciunt ipsum quæsitum numerum. Is inuenietur per vsitatum Canonem 60.

XXI.

Οἷον ἀδελφειός με βιήσατο, πέντε τάλαντα
Οὐχ ὁσίῃ μοίρῃ πατρικὰ δασσάμενος.
Ἑπτὰ κασιγνήτοιο τὸ δ' ἑνδεκάτων πολύδακρυς
Πέμπτον ἔχω μοίρης. Ζεῦ βαθὺ ὕπνον ἔχεις.

Vim frater facit, in partes nec diuidit æquas
Quæ nobis liquit quinque talenta pater.
Nam multum lachrymans septem illius vndecimarum
Quintam habeo partem. Iuppiter ista vides?

Numerus 5. diuidendus est in duas partes, vt prioris quinta pars de $\frac{7}{11}$. seu $\frac{7}{55}$. æquentur posteriori. Esto prior 1 N. posterior 5 – 1 N. ergo $\frac{7}{55}$ N. æquantur 5 – 1 N. & fit 1 N. 4 $\frac{27}{62}$. prior pars. Igitur posterior est $\frac{35}{62}$.

XXII.

Εἶπε κυβερνητῆρι, πλατὺν πόρον Ἀδριακοῖο
Τέμνων νηί, ἀλὸς πόσα λείπεται εἰσέτι μέτρα.
Τὸν δ' ἀπαμείβετο. ναῦτα μέσον κριοῖο μετώπου
Κρηταίου, Σικελῆς τε Πελωριάδος, ἑξάκι μέτρα
Χίλια, δοιῶν δ' αὖτε παροιχομένοιο δρόμοιο
Πέμπτων διπλάσιον Σικελὴν ἐπὶ πορθμίδα λείπει.

Adriacas dum findit aquas, é puppe magistrum
Nauta rogat, quantum pelagi iam restet arandum.
Ille refert. Creten inter Siculumque Pelorum
Millia sex numerant, exhausti iamque profundi
Bis gemini nobis quintantes ecce supersunt
Sicania donec remos lentemus in vnda.

Numerus 6000. secandus est in duas partes, vt prioris $\frac{4}{5}$. æquentur posteriori. Esto prior 1 N. ergo posterior 6000 – 1 N. Quare $\frac{4}{5}$. N. æquantur 6000 – 1 N. & fit 1 N. 3333 $\frac{1}{3}$. prior pars. Igitur posterior relinquitur 2666 $\frac{2}{3}$. Quot stadia restabant vsque ad Pelorum.

XXIII.

Τῶν πισύρων κρουνῶν ὁ μὲν ἤματι πλῆσεν ἅπασαν
Δεξαμενήν, δύο δ' ἶσος, ὁ δ' ἐν τρισὶν ἤμασιν ἶσος,
Τέτρατος ἐν πισύρεσσι. πόσῳ πλήσουσιν ἅπαντες;

Totum implere lacum tubulis è quatuor, vno
Est potis iste die, binis hic & tribus ille,
Quatuor at quartus. Dic quo spatio simul omnes.

Pone quatuor tubos simul implere totum lacum in 1 N. dierum. Et dic per regulam

Iam trium si primus tubus vna die implet totum lacum, seu vnum lacum, quantum implebit in 1 N. diei, inuenies 1 N. eadem ratione reperies secundum tubum implere $\frac{1}{2}$ N. tertium $\frac{1}{3}$ N. quartum $\frac{1}{4}$ N. Quare omnes simul implebunt $\frac{25}{12}$ N. Quare $\frac{25}{12}$ N. æquantur vnitati, & fit 1 N. $\frac{12}{25}$. Quare omnes tubi simul implebunt lacum in $\frac{12}{25}$. diei.

Hinc porro ad soluendas huiusmodi quæstiones formabimus huiusmodi Canonẽ.

Diuide vnitatem sigillatim per denominatores rationum datarum, rursus per summam quotientium diuide vnitatem, orietur quæsitus numerus.

Vt in proposita quæstione, quia denominatores rationum datarum sunt 1. 2. 3. 4. diuide vnitatem sigillatim per 1. 2. 3. 4. fient 1 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. quorum summa $\frac{25}{12}$ per quam rursus diuide vnitatem, fit $\frac{12}{25}$. numerus quæsitus.

XXIIII.

Οἶγέ με, καὶ πισύρεσιν ἐνιπλήσω παρεοῦσαν
Δεξαμενὴν ὥραις, κρουνὸς ἅλις προρέων.
Δεξιτερὸς δ' ἄρ ἐμεῖο τόσαις ἀπολείπεται ὥραις
Ὄφρα μιν ἐμπλήσῃ. δὶς δὲ τόσαις ὁ τρίτος.
Εἰ δ' ἄμφω σὺν ἐμοὶ προχέειν ῥόον ἐς μίαν οἴγοις
Εἰν ὀλίγῃ μοίρῃ πλήσομεν ἠματίῃ.

Me resera, & lymphas profundens quatuor horis
Subiectum implebo protinus ipse lacum.
Æquali dexter spatio, duploque sinister
Quando fluit, vitreis hunc tubus implet aquis.
Parte sed implemus longè breuiore diei
Vno si mecum tempore vterque fluat.

Per Canonem suprà traditum diuide sigillatim vnitatem per numeros 4. 4. 8. fient quotientes $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. quorum summa $\frac{5}{8}$. per quam si diuidas rursus vnitatem fit $\frac{8}{5}$ quæsitus horarum numerus, quibus tres tubi simul lacum implebunt.

XXV.

Κύκλωψ ὁ Πολύφημος ὁ χάλκεος, οἷα δ' ἐπ' αὐτῷ
Τεῦξέ τις ὀφθαλμὸν, καὶ στόμα, καὶ παλάμην.
Κρουνοῖς συζεύξας, στάζοντι δὲ πάμπαν ἔοικεν
Ἠδ' ἔτι καὶ βλύζων φαίνετ' ἀπὸ στόματος.
Κρουνῶν δ' οὔτις ἄτακτος. ὁ μὲν παλάμης τρισὶ μούνοις
Ἤμασιν ἐμπλήσει δεξαμενὴν προρέων.
Ἠμάτιος γλήνης, στόμα δ' ἤματος ἐν δύο πέμπτοις.
Τίς κ' ἐνέποι τελαοῖς ἰσαθέοντα χρόνον;

Æreus hic Cyclops Polyphemus. Respice quali
Arte, quis os, oculum finxerit, atque manum.
Occultos parti salientes cuilibet aptans
Effecit gelidas vt iaculentur aquas.
Ordine sed tali. Plenus tribus ecce diebus
Est lacus, è dextra si fluat vnda tubo.

Vna dies oculo; geminatus sufficit ori
Quintans. Quod spatium sufficit ergo tribus?

Ex lege traditi Canonis diuide sigillatim vnitatem per 3. 1. $\frac{2}{5}$. fient quotientes $\frac{1}{3}$. 1. $\frac{1}{2}$. quorum summa $\frac{23}{6}$. per quam si diuidas rursus vnitatem, fit quæsitus numerus $\frac{6}{23}$. pars diei qua tres tubi simul lacum impleturi sunt.

XXVI.

Ως ἀγαθὸν κρηνῖει θεοὶ κερόωσι ῥέεθρον
Οἱ δὲ δύω ποταμοὶ, καὶ Βρομίοιο χάεις.
Ισος δ' οὐ πάντεσσι ῥόου δρόμος, ἀλλά μιν οἶος
Νεῖλος μὲν προρέων ἤματος κορέσει,
Τόσσον ὕδωρ μαζῶν ἀποβλύζει. ἐκ δ' ἄρα Βάκχου
Θυρσὸς ἐνὶ τρισσοῖς ἤμασιν οἶνον ἱείς.
Σὸν δὲ κέρας Αχελῶε δυ' ἤμασι. νῦν δ' ἅμα πάντες
Ρεῖτε, καὶ εἰν ὥραις πλήσετε μὲν ὀλίγαις.

Vt miscent pariter dulcem in Cratere liquorem
Hinc gemini fluuij, Liber & inde pater.
At non æquali spatio tamen influit humor
Vno namque potes nile replere die.
Tantum fundis aquæ e mammis. Tribus ecce diebus
Quod Thyrso præbes implet Iacche merum.
Binos cornu Acheloë dies fluis. At simul omnes
Ite, breui Crater tempore plenus erit.

Diuide sigillatim vnitatem per 1. 3. 2. fient quotientes 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. quorum summa $\frac{11}{6}$. per quam diuide rursus vnitatem, fit quæsitus numerus $\frac{6}{11}$. pars scilicet diei qua tres tubi simul craterem implebunt.

XXVII.

Ω γυναι ὡς πενίης ἐπελήσαο. ἤδ' ἐπίκειται
Αἰὲν ἀναγκαίη κέντρα φέρουσα πόνων.
Μνᾶν ἐρίων νήθεσκες ἐν ἤματι. πρεσβυτέρη δὲ
Θυγατέρων, καὶ μνᾶν καὶ τρίτον εἷλκε κρόκης.
Οπλοτέρη δὲ μιῆς φέρεν ἥμισυ. νῦν δ' ἅμα πάσαις
Δόρπον ἐφοπλίζει μνᾶν ἐρύσας ὁ καιρὸς.

Te tua paupertas mulier latet? Attamen vrget
Et duri stimulos ipsa laboris habet.
Quotidie vnam tu: sed maior nata solebat
Lanæ eum toto nere triente minam.
Nebat nata minor semissem. Nunc tribus autem
Ex vna vobis cœna paratamina est.

Sensus est. Mater quotidie nebat minam vnam lanæ. Maior natarum $\frac{2}{3}$. vnius minæ. Minor nata $\frac{1}{2}$ vnius minæ. Nunc tres simul nent minam vnam tantum quotidie,

quæritur quantum quælibet neat eadem seruata proportione. Hoc ergo nil aliud est quàm diuidere vnitatem in tres partes seruantes easdem rationes quas habent inter se 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. Quare per Canonem secundæ primi adde simul 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. fit summa $\frac{17}{6}$. per quam diuide vnitatem, fit quotiens $\frac{6}{17}$ quem ducito sigillatim in ipsos 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. fient quæsiti numeri $\frac{6}{17}$. $\frac{8}{17}$. $\frac{3}{17}$.

XXVIII.

Οἱ δ' ἀργεζοχόοι τρεῖς ἕσταμεν ἐνθάδ' ἔρωτες
Καλλιρόου πέμποντες ἐπ' εὐρίποιο λοετρά.
Δεξιτερὸς μὲν ἐγώ γε, τανυπτερύγων ἀπὸ ταρσῶν
Ἤματος ἑκταίῃ μοίρῃ ἐνὶ φ δὲ κορέσσω.
Λαιὸς δ' αὖ πισύρεσιν ἀπ' ἀμφιφορῆος ἐν ὥραις.
Ἐκ δ' ὁ μέσος τόξοιο καθ' ἤματος αὐτὸ τὸ μέσσον.
Φράζεο δ' ὡς ὀλίγῃ κεν ἐνιπλήσαιμεν ἐν ὥρῃ
Ἐκ πτερύγων, τόξου τε, καὶ ἀμφιφορῆος ἰόντες.

Qui iaculamur aquas tres hîc adstamus Amores.
Sed variè liquidas Euripo immittimus vndas.
Dexter ego, summis & quæ mihi manat ab alis
Ipsum Lympha replet solos extante diei.
Quatuor ast horis læuus versa influit vrna
Dimidiatque diem medius dum fundit ab arcu.
Dic age quàm paucis Euripum implebimus horis
Ex arcu simul, atque alis, vrnaque fluentes?

Diem constituentes ex 12. horis, erunt quatuor horæ $\frac{1}{3}$. diei. Quare per Canonem sup à traditum diuidemus vnitatem sigillatim per $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. fient quotientes 6. 3. 2. quorum summa 11. per quam diuidendo vnitatem fit $\frac{1}{11}$ quæsita pars diei, qua tres Amores simul fluentes Euripum implebunt.

XXIX.

Πλινθουργοὶ μάλα τοῦτον ἐπείγομαι οἶκον ἐγεῖραι
Ἦμαρ δ' ἀνέφελον τόδε σήμερον. οὐδ' ἔτι πολλῶν
Χρηΐζω, πᾶσαι δὲ τριηκοσίῃσι δέουσαι
Πλίνθων ἔχω. σὺ δὲ μοῦνος ἐν ἤματι τόσσον ἔτευχες,
Παῖς δέ τοι ἐκ καμάτοιο διηκοσίας ἀπέληγεν.
Γαμβρὸς δ' αὖ τόσσῃσι καὶ εἰσέτι πεντήκοντα.
Τρισσαῖς συζυγίαις πόσσαις τόδε τεύχετε ὥραις;

Fictores laterum cesserunt nubila cælo
Indulgete operi; domus vt mea perficiatur
Non multi desunt lateres, finxisse tricenos
Sufficiet. Tantum solus formare solebas
Qualibet ipse die: sed centum, filius. Atqui
Illo quinquaginta minus gener edere suetus.
Quos peto tres pariter quot consummabitis horis?

Cùm pater vna die conficiat 300. lateres, filius 100. gener 50. tres simul vna die conficiunt 450. Dic ergo per regulam trium. Si 450. lateres conficiuntur vna die, quo tempore fient 300? Inuenies $\frac{2}{3}$. diei, seu horis octo, si diem 12. horarum constituas.

XXX.

Δακρὺ παρασάξαντες ἀμείβετε. ὧ δὲ γὰρ ἡμεῖς
  Οὓς τόδε δῶμα πεσὸν ὤλεσεν Ἀντιόχου
Δαιτυμόνας, οἷσιν γε θεὸς δαιτός τε τάφου τε
  Τὸν δ' ἔπορεν χῶρον. τέσσαρες ἐκ Τεγέης
Κείμεθα. Μεσσήνης δὲ δυώδεκα. ἐκ δέ τε πέντε
  Ἄργεος. ἐκ Σπάρτης δ' ἥμισυ δαιτυμόνων,
Αὐτὸς δ' Ἀντίοχος. πέμπτου δέ τε πέμπτον ὄλοντο
  Κεκροπίδαι. σὺ δ' Ὕλαν κλαῖε Κόρινθε μόνον.

Carpe viator iter lachrymans. Hîc namque iacemus
  Quos domus vna cadens obruit Antiochi
Queis epulas inter crudeli occumbere letho
  Fata tulere. Iacent quatuor ex Tegea
Bis sex Messene; clarum quinque edidit Argos.
  Dimidium Sparte Martis amica tulit.
Occidit Antiochus. Quintam quintantis Athenæ
  Lugent; extinctum fletque Corinthus Hylam.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{25}$. simul adsumentes 23. (nam tot conuiuæ numerantur) efficiant ipsum quæsitum numerum. Reperietur ergo per Canonem sæpè vsitatum, numerus 50.

XXXI.

Νικαρέτη παίζουσα σὺν ἡλικιώτισι πέντε
  Ὧν εἶχεν καρύων Κλειτ' ἔπορεν τὸ τρίτον.
Καὶ Σαπφοῖ τὸ τέταρτον. Ἀριστοδίκῃ δὲ τὸ πέμπτον.
  Εἰκοστὸν Θεανοῖ, καὶ πάλι δωδέκατον.
Εἰκοστὸν τέτρατον δὲ Φιλιννίδι, καὶ πριλῶδε
  Πεντήκοντ' αὐτῇ Νικαρέτῃ κάρυα.

Mittens Nicarete sociabus dona, suarum
  Impertit Cliten læta triente nucum.
Sappho quarta datur. Vigesima facta Theanûs
  Atque duodecima est; Quintaque Aristodices.
Pars tibi cùm cessit vigesima quarta Philinni
  Quinquaginta sibi Nicarete retinet.

Quæritur numerus, talis, vt illius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{24}$. simul additæ, & adsumentes 50. conficiant ipsum qui quæritur numerũ. Minimus qui habeat datas partes est 120. cuius datæ partes simul conficiunt 115. quo ablato de 120. superest per quem diuidendo 50. fit quotiens 10. quo ducto in 120. fit quæsitus numerus 1200.

XXXII.

Γνωμονικῶν Διόδωρε μέγα κλέος, εἰπέ μοι ὥρην.
Ηνίκ' ἀπ' ἀντολίης πόλον ἥλατο χρύσεα κύκλα
Ηελίου; τῶ δ' ἤτοι ὅσον τρία πέμπτα δρόμοιο
Τετράκι τόσσον, ἔπειτα μεθ' ἑσπερίην ἅλα λείπει.

Dic quota iam effluxit pars ô Diodore diei.
Auratis ex quo radiis sol gnomona tangit
Quantum decursi tres quintæ temporũ, inde
Est tantum quater, hesperiis dum se occulat vndis.

Hîc numerus 12. diuidendus est in duas partes, ita vt posterior contineat quater $\frac{3}{5}$. seu $\frac{12}{5}$ prioris; vel quod idem est 12. secandus est in duas partes seruantes rationem quam habet 5. ad 12. Quare per Canonem secundæ primi addo simul 5. & 12. fit 17. per quem diuido 12. fit $\frac{12}{17}$. quem duco sigillatim in 5. & in 12. fiunt quæsitæ partes $\frac{60}{17}$. & $\frac{144}{17}$, Itaque transactum tempus est horarum $3\frac{9}{17}$. reliquum verò est horarum $8\frac{8}{17}$.

XXXIII.

Ζεῦ μάκαρ, ἦρά τοι ἦρα τάδ' ἁνδάνει, οἷα γυναῖκες
Θεσσαλικαὶ παίζουσι; μεμάρανται ὄμμα Σελήνης
Εκ μερόπων, ἴδον αὐτός, ἔην δ' ἔτι νυκτὸς ἐπ' ἠῶ
Δὶς τόσον ὅσσα δύ' ἕκτα καὶ ἕβδομον οἰχομένοιο.

Proh superûm pater, ista placent quæ Thessala cantu
Molitur maga? Cùm Phœbe pudibunda lateret
Vidi ego. Bis tantum solis restabat ad ortum
Tertia transactæ quantum & pars septima noctis.

Numerus 12. rursus diuidendus est in duas partes, ita vt posterior contineat $\frac{2}{3}$. & $\frac{2}{7}$. seu $\frac{20}{21}$. prioris. Quare 12. secandus est in duas partes seruantes rationem quam habet 21. ad 20. Ergo per Canonem secundæ primi addo simul 21. & 20. fit 41. per quem diuido 12. fit $\frac{12}{41}$. quem duco sigillatim in 21. & in 20. fiunt quæsitæ partes $\frac{252}{41}$. & $\frac{240}{41}$. Itaque quando Eclipsis lunæ facta est, transierant horæ noctis $6\frac{6}{41}$. Restabant autem vsque ad solis ortum, horæ $5\frac{35}{41}$.

XXXIV.

Απλανέων ἄστρων παρόδους δ' ἐπὶ τοῖσιν ἀλητῶν
Εἰπέ μοι ἡνίκ' ἐμοὶ χθιζὸν ἔτικτε δάμαρ.
Ημαρ ἔην ὅσσον τε δὶς ἕβδομον ἀντολίηθεν
Εξάκι τόσσον ἔην ἑσπερίην ἐς ἅλα.

Fixorum coitus Astrorum, vnaque vagantum
Dic age cùm pareret vxor amata mihi.
Lux erat, & quantum septans geminatus ab ortu
Tantum bis ter erat solis ad occubitum.

Numerus 12. denuò diuidendus est in duas partes, ita vt posterior contineat sexies $\frac{2}{7}$. id est $\frac{12}{7}$ prioris. Quare 12. secandus est in duas partes seruantes rationem quam habet 7. ad 12. Addo simul 7. & 12. fit 19. per quem diuido 12. fit quotiens $\frac{12}{19}$. quem duco sigillatim in 7. & in 12. fiunt quæsitæ partes $\frac{84}{19}$. & $\frac{144}{19}$. Itaque tempore partus transierant horæ diei 4 $\frac{8}{19}$. Restabant autem vsque ad noctem horæ 7 $\frac{11}{19}$.

XXXV.

Ἔγρεσθ' ἠεργῆεια παρέδραμε πέμπτον ἔειδοι
Λειπομένης τελεσῶν οἴχεται ὀγδοάτων.

Surgite lanificæ, lux est, reliquaque diei
Octantum effluxit portio quinta trium.

Numerus 12. diuidendus est quoque in duas partes, ita vt prior contineat quintam partem de $\frac{3}{8}$ seu $\frac{3}{40}$ posterioris. Quare 12. secandus est in duas partes seruantes rationem quam habet 3. ad 40. addo 3. ad 40. fit 43. per quem diuido 12. fit quotiens $\frac{12}{43}$. quo ducto sigillatim in 3. & in 40. fiunt quæsitæ partes $\frac{36}{43}$ & $\frac{480}{43}$. Itaque iam effluxerant horæ vnius $\frac{36}{43}$. restabant autem horæ 11 $\frac{7}{43}$.

XXXVI.

Σύρτιος ἐν τενάγεσσι πατὴρ θάνεν, ἐκ δ' ἄρ' ἐκείνης
Πέντε τάλαντα φέρων ἤλυθε ναυτιλίης
Οὗτος ἀδελφειῶν προφερέστατος, ἣ γὰρ ἔμοιγε
Δῶκεν ἑῆς μοίρης διπλάσιον τριτάτων
Δοιῶν, ἡμετέρης δ' ἂν ὄγδοα μητρὶ μοίρης
Ὤπασεν, οὐδὲ δίκης ἤμβροτεν ἀθανάτων.

Syrtibus in mediis pater occidit; Attamen inde
Incolumis rediit quinque talenta ferens
Optimus hic fratrum: Gemini mihi namque trientis
Duplum concessit sortis habere suæ.
At charam nostræ partis quadrante parentem
Donauit, certus non violasse deos.

Numerus 5. diuidendus est in tres partes, ita vt secunda contineat $\frac{4}{3}$ primæ. At tertia contineat $\frac{1}{4}$ secundæ. Hoc est 5. diuidendus est in tres partes seruantes easdem rationes, quas seruant 3. 4. 1. Horum ergo summa est 8. per quam diuido 5. fit $\frac{5}{8}$ quo ducto sigillatim in ipsos 3. 4. 1. fiunt quæsitæ partes $\frac{15}{8}$. $\frac{20}{8}$. $\frac{5}{8}$. Habuit igitur primus frater talentum 1. & $\frac{7}{8}$. secundi talenta 2 $\frac{4}{8}$. Mater verò $\frac{5}{8}$. vnius talenti, vel si placet talentum resoluere in minas 60. & minam in drachmas 100. Habuit primus frater talentum vnum, minas 52. drachmas 50. secundus frater habuit talenta 2. minas 30. mater denique minas 37. drachmas 50.

XXXVII.

Ἁ βάσις ἃν πατέω σὺν ἐμοὶ βάρος ἁλίκον ἕλκει
Χ' ἁ κρηπὶς σὺν ἐμοὶ τόσσα τάλαντα φέρει.
Ἀλλ' ἐγὼ οἶος ἅπαξ τὰν σὰν βάσιν ἐς δὶς ἀνέλκω.
Κἠγὼ μοῦνος ἐὼν σὰν βάσιν ἐς τρὶς ἄγω.

Quam calco basis, hac mecum pondus trahit ingens.
Mecum æquale trahit pondus & ista basis.
Solus at ipse tuæ baseos sum pondere duplus.
Sum triplus baseos solus & ipse tuæ.

Hæc quæstio non vnam recipit solutionem, sed infinitas. Nam quæritur Numerus qui bis ita diuidatur in duas partes, vt maior priori diuisionis sit dupla ad maiorem posterioris diuisionis. At maior posterioris diuisionis sit tripla ad minorem prioris. Omnem autem numerum ita diuidi posse bis in duas partes, docuit abundè Diophātus quæstione duodecima libri primi. Statuamus verbi gratia quamlibet statuam cum sua base pendere talenta 100. Diuidetur ergo 100. in partes quæsitas per operationem Diophanti loco citato, vel per Canonem à nobis ibidem traditum, & erunt partes prioris diuisionis 80. & 20. At partes posterioris 40. & 60. quæ propositum implent.

XXXVIII.

Δός μοι δέκα μνᾶς, ὢ τρίπλοις σοι γίνομαι.
Καγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ πεντάπλους.

Minas decem da, triplus vt fiam tui.
At tu decem da, quintuplus fiam vt tui.

Quæruntur duo numeri, vt primus accipiens 10. à secundo, fit triplus eius quod relinquitur secundo. At secundus accipiens 10. à primo, fit quintuplus ad residuum primi. Similem quæstionem tractauit Diophantus lib. 1. quæstione 15. sic autem soluitur. Esto primus 1 N. + 10. hic ergo cùm dederit 10. secundo remanebit 1 N. & erit tunc secundus 5 N. à quo si auferas 10. quæ accepit à primo, erit secundus ab initio 5 N. − 10. Restat vt primus accipiens 10. à secundo, fit triplus ad residuum secundi. Quare 1 N. + 20. triplus erit ad 5 N. − 20. ac proinde 1 N. + 20. æquatur 15 N. − 60. & fit 1 N. $5\frac{5}{7}$. sunt ergo quæsiti numeri $15\frac{5}{7}$. & $18\frac{4}{7}$.

XXXIX.

Δός μοι δύο μνᾶς, καὶ δίπλους σοι γίνομαι.
Καγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ τετράπλους.

Minas duas da, duplus vt fiam tui.
At tu duas da, quadruplus fiam vt tui.

Hæc quæstio eiusdem est naturæ atque præcedens. Esto primus 1 N. + 2. hic ergo cùm dederit 2. secundo, remanebit 1 N. eritque tunc secundus 4 N. & ab eo si auferas 2. quæ accepit à primo, erit secundus ab initio 4 N. − 2. qui si dederit 2. primo fiet primus 1 N. + 4. duplus ad residuum secundi, puta ad 4 N. − 4. Quare 1 N. + 4. æquatur 8 N. − 8. vnde fit 1 N. $1\frac{5}{7}$. sunt igitur quæsiti numeri $5\frac{5}{7}$. & $4\frac{6}{7}$.

X L.

Ομηρος Ησιόδῳ ἐρωτήσαντι πόσον τὸ τῶν Ελλήνων
πλῆθος κατὰ τῆς Ιλίου στρατεύσαν.

Επτὰ ἔσαν μαλερου πυρὸς ἐσχάραι· ἐν δ' ἑκάστῃ
Πεντήκοντ' ὀβελοὶ, περὶ δ' κρέα πεντήκοντα.
Τρίς τε τριηκόσιοι περὶ ἓν κρέας ἦσαν Αχαιοί.

Homerus Hesiodo interroganti quanta fuisset Græcorum multitudo aduersus Troiam militantium.

Septeni luxere foci, sed quemlibet ante
Quinquaginta caro verubus confixa tremebat,
Nongentisque veru Danaïs data fercula ab vno.

Per solam multiplicationem bis repetitam soluitur quæstio, ducito 7. in 50. fit 350. quem rursus ducito in 900. fit numerus Græcorum militum 315000. extat hoc epigramma in agone Homeri & Hesiodi Græcè edito, sed corruptum, nam initium primi versus sic legitur.

Πεντήκοντ' ἦσαν πυρὸς ἐσχάραι.

Vnde non immeritò Agonis illius author incredibilem quæ inde colligitur militum multitudinem miratur, sic enim fieret eorum numerus 2250000.

His quæ nondum edita erant Epigrammatis, subiicere libet quinque sequentia cum nostra interpretatione, ne quid ad hanc materiam pertinens hîc deesse sinamus, quamuis olim hæc edita circumferantur in Anthologia.

XLI.

Παλλὰς ἐγὼ χρυσῆ σφυρήλατος. αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων.
Ἥμισυ μὲν χρυσοῖο Χαρίσιος; ὀγδοάτην δὲ
Θέσπις. καὶ δεκάτην μοῖραν ἔδωκε Σόλων.
Αὐτὰρ ἐεικοστὴν Θεμίσων. τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Ἐννέα, καὶ τέχνη δῶρον Ἀριστοδίκου.

Aurea Pallas ego. Musis sed amica iuuentus
Materiam docto præbuit artifici.
Octauam Thespis, partemque Charisius auri
Dimidiam, decimam contulit ipse Solon.
A Themisone data est vigesima. Terna talenta
Et sena, ipse opifex præstat Aristodicus.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{20}$. simul, adsumentes 9. conficiant ipsum quæsitorum numerum. Minimus habens datas partes est 40. idemque quæsitus numerus, vt constat ex Canone iam sæpè à nobis vsurpato.

XLII.

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκείδαο
Πληθὺν βουκολίων διζήμενος. ὃς δ' ἀπαμείβετο.
Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοὰς φίλος ἥμισυ τῶνδε.
Μοίρη δ' ὀγδοάτη ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται.
Δωδεκάτη δ' ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ' ὅρον.
Ἀμφὶ δ' ἄρ' Ἤλιδα δῖαν ἐεικοστὴ νεμέθονται.
Αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίῃ τριηκοστὴν προλέλοιπα.
Λοιπὰς δ' αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

Augeam rogat Alcides, quot pascua circùm
Errarent armenta sibi. Cui retulit ille.
Pascitur Alphei rapidas semißis ad vndas.
Pars octaua sacro Saturni in colle vagatur.
Pone Taraxippi tumulum sextantis oberrat
Dimidium; decimæ semissem detinet Elis.
Denique in Arcadicis trigesima substitit oris.
Quadraginta vides tamen hîc armenta relinqui.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{30}$. simul cum numero 50. efficiant ipsum quæsitum numerum. Minimus habens datas partes est 120. cuius datæ partes simul efficiunt 95. quo ablato de 120. superest 25. per quem diuide 50. fit 2. quo ducto in 120. fit 240. quæsitus armentorum numerus.

XLIII.

Χάλκεός εἰμι λέων, κρουνοὶ δέ μοι ὄμματα δοιά,
Καὶ στόμα, σὺν δὲ θέναρ δεξιτεροῖο ποδός.
Πλήθει δὲ κρατῆρα δύ' ἤμασι δεξιὸν ὄμμα,
Καὶ λαιὸν τρισσοῖς, καὶ πισύρεσσι θέναρ.
Ἀρκιὸς ἐξ ὥρῃσι πλῆσαι στόμα. σὺν δ' ἅμα πάντα
Καὶ στόμα, καὶ γλῆναι, καὶ θέναρ, εἰπὲ πόσον;

Æreus adsto leo, tubuli mihi lumina bina
Osque etiam, dextri sic quoque planta pedis.
Binis dextro oculo, ternis lacus iste diebus
Impletur læuo, sed pede bis geminis.
Ori sufficiunt sex horæ. Dic simul ergo
Quo spatio os, oculi, pesque replere valent.

Sumendo diem artificialem 12. horarum, cuius 6. horæ sunt $\frac{1}{2}$. erunt numeri exprimentes rationes datas 2. 3. 4. $\frac{1}{2}$. per quos sigillatim diuisa vnitate fiunt quotientes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. 2. quorum summa $\frac{37}{12}$ per quam rursus diuidendo vnitatem fit quæsita pars diei $\frac{12}{37}$. seu horæ $3\frac{33}{37}$.

XLIIII.

Ἄμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἕλκομεν
Ζῆθός τε χ' ὡ ξύναιμος, ἣν δέ μου λάβῃς
Τρίτον, τὸ τέτρατόν τε τοῦ δ' Ἀμφίονος
Ἐξ πάντ' ἀνευρών, μητρὸς εὑρήσεις σταθμόν.

Viginti vterque pendimus simul minas
Zethus ego, fraterque. Attamen si ceperis
Mei trientem, cum quadrante Amphionis
Senæ, parentis pondus, exibunt minæ.

Soluit similem quæstionem Diophantus lib. 1. quæst. 5. Nam numerus 20. diuidendus est in duas partes, vt $\frac{1}{3}$. prioris, & $\frac{1}{4}$. posterioris simul efficiant 6. Esto posterioris $\frac{1}{4}$. 1 N. ipsa ergo pars posterior est 4 N. At triens prioris est 6 − 1 N. ipsa

prior pars 18 – 3 N. At duarum partium summa fit 18 + 1 N. æqualis 20. Ergo 1 N. est 2. Igitur quæsitæ partes de 20. sunt 12. & 8. & satisfaciunt proposito.

X L V.

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον.
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖο.
Τὴν δὲ βαριστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη.
Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠΰτε κούρη;
Εἰ μέτρον ἔμοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε γεωμετρίης ἐπίστορ.

Vnà cum mulo vinum portabat asella,
Atque suo grauiter ceu pondere pressa gemebat.
Talibus at dictis mox increpat ille gementem.
Mater quid luges teneræ de more puellæ?
Dupla tuis, si des mensuram, pondera gesto,
At si mensuram capias, æqualia porto.
Optime mensuras distingue Geometer istas.

Hæc etiam quæstio soluitur per decimamquintam primi. Nam quæruntur duo numeri, vt primus accipiens 1. à secundo fit duplus ad residuum secundi; at secundus accipiens 1. à primo fit æqualis residuo primi. Esto primus 1 N. + 1. Ergo dando 1. secundo, remanebit primus 1 N. & tunc secundus erit 1 N. Quare auferendo ab eo vnitatem quam accepit à primo, fit secundus, vt erat ab initio 1 N. – 1. Iam si ab eo primus accipiat 1. fiet primus 1 N. + 2. & residuum secundi erit 1 N. – 2. Itaque 1 N. + 2. duplus est ad 1 N. – 2. & tandem 1 N. + 2. æquatur 2 N. – 4. Vnde fit 1 N. 6. Sunt ergo quæsiti numeri 7. & 5.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ϛ.

DIOPHANTI ALEXANDRINI

ARITHMETICORVM

LIBER SEXTVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt hypotenusa subtracto alterutro laterum circa tectum, faciat cubum. Esto quæsitum triangulum effictum à duobus numeris, & sit alter 1 N. alter 3. fit igitur hypotenusa 1 Q. + 9. perpendiculum 6 N. Basis 1 Q. − 9. Et hypotenusa dempto vno laterum circa tectum, hoc est 1 Q. − 9. facit 18. qui non est cubus. Vnde autem prouenit 18? Quadratus est de 3. bis sumptus. Oportet igitur inuenire numerum aliquem, vt illius quadratus bis sumptus faciat cubum. Esto quæsitus numerus 1 N. & fiunt 2 Q. æquales cubo. Esto 1 C. & fit 1 N. 2. Rursus formo triangulum ab 1 N. & non à 3. sed à 2. & fit hypotenusa 1 Q. + 4. Perpendiculum 4 N. Basis 1 Q. − 4.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ κύβον. ἔστω τὸ ζητούμενον τρίγωνον πεπλασμένον ἀπὸ δύο ςς. καὶ ἔστω ὁ μὲν ς^ὖ α. ὁ δὲ μ° γ. γίνεται οὖν ἡ μὲν ὑποτείνουσα Δ^ϒ α. μ° θ. ἡ δὲ κάθετος ςς ϛ. ἡ δὲ βάσις Δ^ϒ α. λείψει μ° θ. καὶ ἡ ὑποτείνουσα ἐὰν λείψῃ ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τουτέστι Δ^ϒ α. λείψει μ° θ. γίνεται μ° ιη. καὶ οὐκ ἔστι κύβος. πόθεν ὁ ιη. ὁ ἀπὸ τοῦ γ ἐστὶν τετράγωνος δὶς γενόμενος. δεῖ οὖν εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, ὅπως ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος δὶς γενόμενος ποιῇ κύβον. ἔστω ὁ ζητούμενος ς^ὖ α. καὶ γίνονται Δ^ϒ β. ἴσαι κύβῳ. ἔστω Κ^ϒ α. καὶ γίνεται ὁ ς μ° β. πάλιν πλάσσω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ἀριθμοῦ α. καὶ οὐκ ἔτι μ° γ. ἀλλὰ μ° β. καὶ γίνεται ἡ ὑποτείνουσα δυνάμεως α. μ° δ. ἡ δὲ κάθετος ἀριθμῶν δ. ἡ δὲ βάσις Δ^ϒ α. λείψει μ° δ.

καὶ μένει ἡ ὑποτείνουσα λείψασα τὴν ἐν τῇ βάσει τουτέστι δʸ ᾱ. λείψει μο δ̄. ποιοῦσα κύβον. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν [κάθετον] οὖσαν ςς δ̄. [λειφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ποιεῖν κύβον.] γίνεται δὲ δʸ ᾱ. μο δ̄. λείψει ςς δ̄. ἴσον κύβῳ. καί ἐστι τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ς ᾱ. λείψει μο β̄. ἐὰν οὖν ἀριθμὸν ᾱ λείψει μο β̄. ἰσώσωμεν κύβῳ, λύσομεν τὸ ζητούμενον. ἔστω ἴσον μο η̄. καὶ γίνεται ὁ ς μο ῑ. ὥστε πλασθήσεται τὸ τρίγωνον ἀπὸ μο ῑ. καὶ μο β̄. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑποτείνουσα ρδ̄. ἡ δὲ κάθετος μο μ̄. ἡ δὲ βάσις μο ϟς̄. καὶ μένει.

& manet hypotenusa detracta basi faciens cubum. Superest vt & perpendiculum quod est 4 N. detractum ab hypotenusa faciat cubum. Fit autem 1 Q. + 4 − 4 N. æquale cubo. Est autem quadratus à latere 1 N. − 2. si ergo æquemus cubo 1 N. − 2. soluemus quæstionem. Esto æquale 8. fit 1 N. 10. Itaque formabitur triangulum à 10. & 2. & fit hypotenusa 104. Perpendiculum 40. Basis 96. & constat.

IN VI. LIBRVM DIOPHANTI COMMENTARII.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis est, in qua tamen nonnulla occurrunt animaduersione digna. Quare primò aduerte à duobus numeris formari triangulum rectangulum, modo quem demonstrauimus propositione quinta tertij porismatum. Et fit hypotenusa summa quadratorum, basis interuallum eorundem, perpendiculum verò duplum multiplicationis laterum. Hinc apparet cur ab hypotenusa detracto perpendiculo, relinquatur quadratus.

4. 2. poris. [1] Etenim à summa quadratorum auferendo duplum producti laterum, remanet quadratus interualli laterum. Sic in priore positione detractis 6 N. ab 1 Q. + 9. fit quadratus 1 Q. + 9 − 6 N. à latere 1 N. − 3. quod est interuallum numerorum 1 N. & 3. à quibus formatur triangulum. At in secunda positione detractis 4 N. ab 1 Q. + 4. fit quadratus 1 Q. + 4 − 4 N. à latere 1 N. − 2. quod est interuallum ipsorum 1 N. & 2. à quibus effectum est triangulum.

Secundò aduerte lemma quo quæritur cubus quadrati duplus infinitas recipere solutiones, & turpiter allucinari Xilandrum, qui ad sequentem quæstionem asserit nullum alium cubum præter 8. assignari posse quadrati duplum, neque in fractis, cùm infiniti tales cubi assignari possint & in integris & in fractis. Nam vt patet 2 Q. æquari possunt cuilibet cuborum numero cubico. Verbi gratia ponantur 2 Q. æquales $\frac{1}{8}$ C. fiet 1 N. 16. eritq; cubus 512. duplus quadrati 256 Rursus ponantur 2 Q. æquales 8 C. fiet 1 N. $\frac{1}{4}$. Et inuenietur cubus $\frac{1}{8}$. duplus quadrati $\frac{1}{16}$. & sic de aliis. Immò eodem prorsus artificio inuenies cubos infinitos qui ad aliquos quadratos datam habeant rationem, & hinc formatur Canon vniuersalis.

Diuide denominatorem rationis datæ, per cubum aliquem, orietur latus quadrati quæsiti.

Vt si velis cubum qui sit quadrati triplus, diuide 3. per cubum aliquem, puta per 1. vel per 8. vel per 27. fient 3. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{9}$. quorum quadrati 9. $\frac{9}{64}$. $\frac{1}{81}$. quorum tripli, puta 27. $\frac{27}{64}$. $\frac{1}{27}$. sunt cubi, vt requiritur.

Tertiò

Tertiò aduerte cùm quadratus 1 Q. + 4 − 4 N. sit æquandus cubo, rectè Diophantum æquare cubo latus illius, puta 1 N. − 2. Constat enim si latus quadrati sit cubus, & ipsum quadratum fore cubum, quia ex cubo in cubum producitur cubus per tertiam & quartam noni Euclidis. Porro hac etiam ex parte infinitas solutiones quæstio recipit, nam 1 N. − 2. cuilibet vnitatum numero cubico æquari potest, æquauit Diophantus cubo 8. sed si æquasset cubo 1. fuisset 1 N. 3. & fingendo triangulum à 2. & 3. facta essent latera 13. 12. 5. quæ soluunt quæstionem, nam auferendo sigillatim vtramque laterum circa rectum ab hypotenusa, supersunt cubi 1. & 8. Hinc etiam elicitur huiusmodi Canon.

Sume numerum aliquem, ita vt quadratus illius sit semissis cubi; sumpto numero adde cubum quemlibet, tum ab hac summa, & à sumpto numero finge triangulum.

Verbi gratia sume $\frac{1}{4}$ cuius quadratus $\frac{1}{16}$. est semissis cubi $\frac{1}{8}$. Adde cubum 8. ad $\frac{1}{4}$ fiet $\frac{33}{4}$. tum finge triangulum ab $\frac{1}{4}$ & $\frac{33}{4}$. fient latera trianguli $\frac{545}{8}$. $\frac{33}{8}$. $\frac{544}{8}$. quæ soluunt quæstionem, nam sublato vtrouis laterum circa rectum ab hypotenusa, supersunt cubi 8. & 1.

Cæterùm inuento triangulo quæstionem soluẽte, si singula illius latera diuidas vel multiplices per aliquem eundem cubũ, fiet aliud triangulum ęquè proposito satisfaciẽs. Vt si triangulum à Diophanto inuentũ 104. 40. 96. diuidas per 8. fiet aliud triangulum 13. 5. & 12. æquè benè proposito congruens, & ratio est euidens, nam interualla quibus hypotenusa 13. superat latera 5. & 12. fiunt diuidendo per 8. interualla quibus hypotenusa 104. superat latera 40. & 96. Quare cùm hæc interualla sint cubi ex hypothesi, & cubo per cubum diuiso, oriatur cubus, patet & illa interualla quibus 13. superat 5. & 12. fore cubos, quod est propositum.

QVÆSTIO II.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt hypotenusa adsumens alterutrum laterum circa rectum, faciat cubum. Si formemus quæsitum triangulum à duobus numeris vt in præcedente, quærendus erit quadratus cuius duplum sit cubus, est autem is à latere 2. Fingemus ergo triangulum ab 1 N. & à 2. & fiet similiter hypotenusa 1 Q. + 4. vnum autem laterum circa rectum 4 N. alterum denique 4 − 1 Q. Superest vt hypotenusa adscito priore latere faciat cubum; sed & necesse est vt cũ ad positiones veniemus 1 Q. inueniatur minor quàm 4. Proinde 1 N. minor est quàm 2.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ προσλαβὼν τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ κύβον. ἐὰν πλάσσωμεν τὸ ζητούμενον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, ὡς καὶ πρὸ τούτου. γίνεται ζητεῖν τετράγωνόν τινα ὅπως ὁ διπλάσιος αὐτοῦ ᾖ κύβος, καὶ ἔστιν ὁ ἀπὸ πλευρᾶς μ° β. πλάσσομεν οὖν τὸ ζητούμενον ἀπὸ ς° ᾱ. καὶ μ° β̄. καὶ γίνεται ὁμοίως ἡ μὲν ὑποτείνουσα δ^ϒ ᾱ. μ° δ̄. μία δὲ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ςς δ̄. ἡ δὲ λοιπὴ μ° δ̄. λεῖψει δ^ϒ ᾱ. λοιπόν ἐστι τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ προσλαβόντα τὸν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν κύβον. ἀλλὰ καὶ διελθόντας εἰς τὴν ὑπόστασιν εὑρεῖν τὴν δύναμιν ἐλάσσονα μ° δ̄. ὁ ἄρα ς° ἐλάσσων ἐστὶ μ° β̄. καὶ ἀπε-

Ii

γεται εἰς τὸ εὑρεῖν κύβον ἐλάσσονα μ° δ̄. μείζονα δὲ μ° β̄. καὶ ἔστι μ° κζ^{η}. καὶ ἔστω ς° ᾱ. μ° β̄. ἴσος μ° κζ^{η}. καὶ γίνεται ὁ ς° ια^{η}. ἔσται ἄρα ἡ μὲν ὑποτείνουσα τοζ^{ξδ}. τῶν δὲ περὶ τὴν ὀρθὴν, ἡ μὲν ρλε^{ξδ}. ἡ δὲ τνβ^{ξδ}. καὶ μένει.

Eò itaque redacti sumus vt inueniamus cubum minorem quàm 4. maiorem quàm 2. Est autem $\frac{27}{8}$. Quamobrem 1 N. + 2. æqualis esto $\frac{27}{8}$. & fit 1 N. $\frac{11}{8}$. Erit ergo hypotenusa $\frac{377}{64}$. laterum circa rectum alterum $\frac{135}{64}$. alterum $\frac{352}{64}$. & constat.

IN QVAESTIONEM II.

Hic multa infeliciter adnotauit Xilander. Primò enim asserit cubum quadrati duplum nullum esse præter 8. & nullum quadrati triplum præter 27. &c. quod ad præcedentem abunde confutauimus. Deinde putat alterum laterum circa rectum poni debere, vt in præcedente 1 Q. − 4. quod est absurdum, nam ob talem positionem cogitur simul & semel æquare cubo, tum 2 Q. tum 1 N. + 2. Quare deueniendum ei ad duplicatam æqualitatem, quæ quomodo resolui possit, cùm scilicet duo numeri sunt simul æquandi cubo, nec ipse docere potuit, nec vsquam docuit Diophantus. Denique non satis aperit causam cur 1 N. + 2. æquari debeant cubo alicui maiori quàm 2. minori quàm 4. Quamobrem vt omnia sigillatim elucidemus.

Aduerte primò cur sumatur numerus cuius quadratus sit semissis cubi, & ponatur basis trianguli 4 − 1 Q. quæ in præcedente ponebatur 1 Q. − 4. causam esse, quia vult Diophantus per huiusmodi positionem satisfieri vni parti postulati, nam hypotenusæ 1 Q + 4. addendo basim 4 − 1 Q. fit vtique cubus 8. Posse autem basim poni 4 − 1 Q. æquè benè ac 1 Q − 4. patet, quia basis debet esse interuallum quadratorum 1 Q & 4. Quare cùm ignoretur vter eorum maior sit, potest eorum interuallum esse 1 Q. − 4. vel 4 − 1 Q.

Aduerte secundò hypotenusæ 1 Q + 4. addendo perpendiculum 4 N. fieri quadratum 1 Q + 4 N + 4. Quia hypotenusa est summa quadratorum, at perpendiculum est duplum plani sub lateribus, vnde patet hypotenusæ & perpendiculi sum-
4. secundi. mam [1] æquari quadrato summæ laterum 1 N. + 2. Quare sicut in præcedente restat vt æquemus cubo 1 N. + 2. quia si latus hoc sit cubus, erit & quadratus illius,
3. noni. cubus; [2] quandoquidem ex cubo in seipsum producitur cubus.

Aduerte tertiò 1 N + 2. æquari debere cubo qui sit maior quàm 2. minor quàm 4. primum patet, nam à cubo illo auferendo 2. residuum æquari debet 1 N. secundùm sic probatur. Quia basis posita est. 4 − 1 Q. oportet 4. maiorem esse quàm 1 Q. Ergo 2. maior esse debet quàm 1 N. fit autem 1 N. vt dictum est, ab aliquo cubo auferendo 2. Oportet ergo talem esse cubum illum, vt ab eo auferendo 2. residuum sit minus quàm 2. ac proinde oportet cubum huiusmodi, minorem esse quàm 4. Porrò qua ratione inueniendus sit cubus maior quàm 2. minor quàm 4. non docet hîc Diophantus. Sed id facilè consequemur eodem artificio quo ad decimamtertiam quinti reperit author quadratum maiorem quàm 2. minorem quàm 3. Reducantur enim 2. & 4. ad fractionem cubicam eiusdem denominationis, puta ad octauas, fient $\frac{16}{8}$. & $\frac{32}{8}$. Inter quos cadit cubus $\frac{27}{8}$. proposito satisfaciens. Sic infinitos huiusmodi cubos reperies, & quo maior erit denominator ad quē fit reductio, eò plures cubi cadent inter numeros propositos, vt si reducas 2. & 4. ad millesimas, fient $\frac{2000}{1000}$. & $\frac{4000}{1000}$. inter quos cadunt tres cubi proposito apti, puta $\frac{2197}{1000}$. $\frac{2744}{1000}$. $\frac{3375}{1000}$. & sic de aliis.

Aduerte denique hîc contingere vt multiplicando vel diuidendo latera inuenti trianguli, per eundem cubum, fiat aliud triangulum soluens quæstionem Sic loco laterum quæ iuuenit Diophantus, puta $\frac{377}{64}$. $\frac{135}{64}$. $\frac{352}{64}$. ducendo omnia in 64. sumi possunt 377. 135. 352. quod facile est demonstrare.

Cæterùm ratio diuersitatis in solutione & operatione, ex duplici capite ortum ha-

bet. Primò enim, vt docuimus 1 N. + 2. æquari potest infinitis cubis maioribus quàm 2. minoribus quàm 4. quales sunt $\frac{27}{8}$. $\frac{64}{27}$. $\frac{343}{125}$. &c. Deinde triangulum ipsum ab initio fingi potest ab 1 N. & quotlibet vnitatibus, quarum quadratus sit semissis cubi, quales infinitos numeros dari, quicquid dicat Xilander, ad præcedentem ostendimus. Verbi gratia fingatur ab 1 N. & $\frac{1}{4}$. erit hypotenusa 1 Q. + $\frac{1}{16}$. Basis $\frac{1}{2}$ N. perpendiculum $\frac{1}{16}$ − 1 Q. hocque addito ad hypotenusam, fit cubus $\frac{1}{8}$. At basi addita eidem hypotenusæ fit quadratus 1 Q. + $\frac{1}{16}$. + $\frac{1}{2}$ N. cuius latus 1 N. + $\frac{1}{4}$. æquandum est cubo maiori quàm $\frac{1}{4}$. minori quàm $\frac{1}{2}$. quales sunt $\frac{8}{27}$. $\frac{27}{64}$. aliique infiniti. Et vniuersaliter. Cubus quo cum fit vltima æquatio debet esse maior vnitatibus, à quibus cum 1 N. formatum est triangulum, & minor duplo earundem. Quamobrem hinc facilè est elicere Canonem.

Sume quemlibet numerum, cuius quadratus sit semißis cubi, quem aufer ab aliquo cubo qui sit maior ipso, & minor duplo eiusdem; A residuo & à sumpto numero formabis quæsitum triangulum.

Verbi gratia sume 2. quem aufer à cubo $\frac{343}{125}$. remanet $\frac{93}{125}$. à quo & à 2. forma triangulum, vel reducendo ad integros, forma triangulum à 93. & à 250. fient latera 71149. 53851. 46500. & hypotenusa adsumens basim, tum perpendiculum, facit cubos 125000. & 117649. quorum latera 50. & 49.

Quoniã verò in mentẽ alicui venire posset cur non proposuerit Diophantus inuenire triangulum rectangulũ cuius hypotenusa adsumẽs vtrumlibet laterum circa rectũ, faciat quadratum. Vel cuius hypotenusa detracto quolibet laterum circa rectum, relinquat quadratum, non abs re fuerit monere, omissas esse huiusmodi quæstiones, quod sint impossibiles. Id autem, ne quis temerè dictum putet, sic demonstrabitur.

D 4. E 1.
A 5. B 4. C 3.
F 15. G 12. H 9.
K 12. L 3.

Esto triangulum rectangulum A B C. dico siue hypotenusæ A addantur sigillatim latera B. C. siue adimantur, non posse simul fieri duos quadratos. [1] Etenim cùm hypotenusa A componatur ex duobus planis similibus, sint ij D maior, & E minor; erit ergo B duplum medij proportionalis inter D & E cadentis. At C erit interuallum ipsorum D E. Porro ipsi D E vel quadrati sunt, vel quadratorum similes. Ponantur primò quadrati. Cùm ergo A sit summa duorum quadratorum D E. & C sit eorundem interuallum, [2] patet compositum ex duobus A C. esse duplum maioris quadrati D. Ergo si compositus ex A C ponatur quadratus, sequitur ex binario in quadratum D. produci quadratum. Quod est impossibile, cùm binarius non sit quadratus, vt ostendit Clauius ad secundam noni. Rursus si ab A qui est summa quadratorum D E. auferatur C eorundem interuallum, [3] residuum duplum erit minoris quadrati E. Quare si hoc residuum ponatur quadratus, sequitur rursus ex binario in quadratum E. produci quadratum. Quod eadem de causa est impossibile. Quare in hoc casu patet propositum.

4. 3. poris. *23. 1. poris.* *23. 1. poris.*

Iam verò esto triangulum rectangulum F G H. & plani similes K L. ex quibus hypotenusa F componitur, non sint quadrati; dico nihilominus sequi propositum. Nam K L. cùm sint plani similes, [4] habent rationem quadrati ad quadratum; habeant ergo rationem quam quadratus D ad quadratum E. Igitur cùm sint proportionales D. E. K. L. & ab ipsis D E formetur triangulum A B C. ab ipsis K L formetur triangulum F G H. [5] erunt hæc triangula similia. Itaque cùm sit A ad F vt B ad G [6] erit summa duorum A B ad summam ipsorum F G. vt A ad F. Quia verò A est summa quadratorum DE. & B est duplum plani sub lateribus, [7] patet summam ipsorum AB esse quadratum, ac proinde si & summa ipsorum FG ponatur quadtatus, erit A ad F vt quadratus ad quadratum. Sed vt A ad F sic est C ad H ob similitudinem triangulorum, ac proinde vt A ad F, [8] sic est summa antecedentium A C. ad summam consequentium F H. Igitur [9] si summa ipsorum F H sit quadratus, oportet & summam ipsorum AC esse quadratum. Quod impossibile est, vt suprà ostẽdimus. Deinde quia est A ad B vt F ad G. & rursus B ad C vt G ad H. patet argumẽtãdo per conuersionẽ rationis, tum per rationẽ permutatã esse interuallũ ipsorum A B ad interuallum ipsorum F G. itemque interuallũ ipsorũ A C. ad interuallum ipsorũ F H. sicut A ad F. Cùm igitur interuallũ quo A sũma quadratorũ superat B duplũ plani

26. octaui. *9. 3. poris.* *12. septimi.* *4. secundi.* *12. septimi.* *24. octaui.*

sub lateribus, sit quadratus,[a] si & interuallum ipsorum F G ponatur quadratus, erit vtrumque interuallum quadratus. Quare & interuallum ipsorum A C. ad interuallum ipsorum F H. erit in ratione quadrati ad quadratum, ac proinde si interuallum ipsorum F H ponatur quadratus[a] erit & interuallum ipsorum A C quadratus. Quod ostensum est esse impossibile. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

a 2. poris.

a 24 octaui.

Eadem quoque ratio est de cæteris omnibus potestatibus quadratis, vt pote quadratoquadratis, cubocubis &c. Etenim inueniri non potest triangulum rectangulum, cuius hypotenusæ addendo vel adimendo vtrumlibet latus fiat quadratoquadratus, vel cubocubus. Hoc enim si daretur sequeretur dari quadratum duplum quadrati. Quod est impossibile; Aliis autem potestatibus omnibus quæ quadratæ non sunt, quales suot cubi, quadratocubi, quadratoquadratocubi &c. ritè applicabitur quæstio, vt exemplo quadratocubotum facile est demonstrare.

Sit ergo propositum inuenire triangulum rectangulum, cuius hypotenusa adsumens vtrumlibet laterum circa rectum, faciat quadratocubum. Patet si sequamur ductum operationis Diophanti, eò nos adigi, vt inueniamus quadratocubum duplum quadrati, & quia omnis quadratoquadratus est quadratus, soluetur lemma si inueniamus quadratocubum duplum quadratoquadrati. Esto quadratoquadratus 1 QQ. ergo 2 QQ. æquantur quadratocubo, esto 1 QC. fit 1 N. 2. estque quadratoquadratus 16. quadratocubus 32. sumentes igitur latus quadratum ipsius 16. puta 4. effingamus triangulum ab 1 N. & à 4. erit hypotenusa 1 Q. + 16. Basis 16. − 1 Q. Perpendiculum 8 N. & constat addendo basim hypotenusæ fieri quadratocubum 32. Restat vt eidem hypotenusæ addeodo perpendiculum fiat quoque quadratocubus. Fit ergo 1 Q. + 16. + 8 N. æqualis quadratocubo. Ergo latus quadratum ipsius 1 Q. + 16 + 8 N. puta 1 N. + 4. æquabimus quadratocubo, sic enim consequemur intentum, quia ex quadratocubo in quadratocubum fit quadratocubus, vt demonstrauimus in Elementis. Porro 1 N. + 4. sic æquari debet quadratocubo, vt is sit maior quàm 4. minor quàm 8. ob causas supra explicatas. Quara cum reducendo 4. & 8. ad fractionem quadratocubicam, fiant $\frac{128}{32}$. & $\frac{256}{32}$. & inter eos cadat quadtatocubus $\frac{243}{32}$. huic æquabimus 1 N. + 4. fietque 1 N. $\frac{115}{32}$. Igitur effiogemus quæsitum triangulum à 4. & à $\frac{115}{32}$ vel vtroque ad eandem denominationem redacto, & communi abiecto denominatore à 128. & à 115. fietque triangulum 29609. 29440. 3159. quod soluit quæstionem: nam hypotenusæ addendo sigillatim latera, fient quadtatocubi 59049. & 32768. quorum latera 9. & 8.

Eadem arte & quæstio præcedens extendetur ad huiusmodi potestates. Nam sit propositum inuenire triangulum rectangulum, cuius hypotenusa multata quolibet laterum circa rectum, relinquat quadratocubum. Effingemus vt prius triangulum ab 1 N. & à 4. & erit hypotenusa 1 Q. + 16. basis 1 Q. − 16. Perpendiculum 8 N. sic enim satisfit vni parti propositionis. Restat vt 1 Q. + 16. − 8 N. æquetur quadtatocubo. Quare latus 1 N. − 4. æquandum est quadratocubo, esto is 32. fiet 1 N. 36. formetur ergo triangulum à 4. & à 36. erunt latera 1312. 1280. 288. & soluta est quæstio. Nam hypotenusa multata quolibet laterum, relioquit quadratocubos 32. & 1024. à lateribus 2. & 4.

QVÆSTIO III.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ε. καὶ πεπλάσθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ἀριθμῶν γ. ἀριθμῶν δ. ἀριθμῶν ε. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ μονάδων ε.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ eius numerus adsumens datum numerum, faciat quadratum. Esto datus 5. & ponatur triangulum datum specie 3 N. 4 N. 5 N. & fit area adscito 5.

6 Q. + 5. æqualis quadrato. Esto ipsi 9. & auferantur à similibus similia, relinquuntur 3 Q. æquales 5. & oportet speciem ad speciem, rationem habere quæ est quadrati numeri ad quadratum numerum, sed & multitudinem ad multitudinem. Itaque eò deuentum est, vt oporteat inuenire triangulum rectangulum, & quadratum numerum, vt quadratus area trianguli multatus, faciat quintam partem quadrati, quia datus est 5. Formetur triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. & fit area 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. Esto quadrati latus 1 N. & fractio numerica tot vnitatum, quantus est duplus dati numeri, hoc est $\frac{10}{1N}$. & fit quadratus 1 Q. + $\frac{100}{1Q}$ + 20. & si ab eo detrahamus aream, hoc est 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. relinquitur $\frac{101}{1Q}$ + 20. Hæc quinquies, fit $\frac{505}{1Q}$ + 100. æquale quadrato. Et omnia multiplicentur per 1 Q. fiunt 100 Q. + 505. æquales quadrato. Esto latus eius 10 N. + 5. Inuenitur 1 N. $\frac{24}{5}$. Ad positiones. Formabitur ergo triangulum à $\frac{24}{5}$ & $\frac{5}{24}$. Erit autem quadrati latus $\frac{413}{60}$. si ergo triangulum statuamus in numeris, & aream ipsius adscito 5. æqualem faciamus $\frac{170569}{3600}$ Q. reliqua fient manifesta.

δʸ ϛ̄. μ° ε̄. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω δʸ θ̄. καὶ ἀπὸ τῶν ὁμοίων τὰ ὅμοια. λοιπαὶ δʸ γ̄. ἴσαι μ° ε̄. καὶ δεῖ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὀφείλει καὶ τὸ πλῆθος πρὸς τὸ πλῆθος. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅπως ὁ τετράγωνος λείψας τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ τοῦ τριγώνου ποιῇ πέμπτον τετραγώνου. ἐπειδήπερ ὁ δοθεὶς μ° ε̄. ἐστί. πεπλάσθω τὸ [τρίγωνον ἀπὸ] ϛʸ ᾱ. καὶ ᾱ ˣ. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ δʸ ᾱ. λεῖψει ᾱ δʸˣ. ἔστω ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ϛʸ ᾱ. καὶ ἀριθμοστὸν μονάδων τοσούτων ὅσων ἐστὶν ὁ διπλάσιος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τουτέστιν ῑ ˣ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δʸ ᾱ. ρ̄ δʸˣ. μ° κ̄. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἄρωμεν τὸ ἐμβαδὸν, τουτέστι δʸ ᾱ. λεῖψει ᾱ δʸˣ. λοιπὸν γίνεται ρα δʸˣ. μ° κ̄. ταῦτα πεντάκις γίνεται φε δʸˣ. μ° ρ̄. ἴσον τετραγώνῳ, καὶ πάντα ἐπὶ δύναμιν ᾱ. γίνονται δυνάμεις ρ̄. μ° φε̄. ἴσαι τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ἀριθμῶν ῑ. μ° ε̄. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς μ° κδ ε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ κδ ε. καὶ ε κδ. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ υιγ ξ. ἐὰν οὖν τὸ ὀρθογώνιον τάξωμεν ἐν ἀριθμοῖς. καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μετὰ μονάδας ε̄. ποιῶμεν ἴσον δυνάμεσι ιζ. φξθ γχ. ἔσται ἡμῖν τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM III.

Ad quæſtiones omnes huius libri reliquas nihil adnotauit Xilander, earum tum difficultate, tum inſigni deprauatione deterritus. Sed & ſummi vir ingenij Franciſcus Vieta cùm hanc ipſam quæſtionem pertractandam ſuſcepiſſet, Zetetico nono libri quinti parum feliciter eam explicauit; etenim methodum Diophanti minimè percipiens, aliamque viam inire coactus, quod ille vniuerſaliſſimè propoſuerat de quolibet numero ad aream trianguli addendo, ipſe ad ſolos numeros è duobus quadratis compoſitos, reſtrinxit. Itaque nobis ob integram tot pulcherrimorum ſubtiliſſimorumque problematum enodationem, ſolida relicta eſt gloria. Quàm vt non immeritò conſequamur, circa hanc quæſtionem

Aduerte primò triangulum datum ſpecie vocari à Diophanto, illud cuius laterum proportio data eſt tantùm, ipſorum laterum quantitate indefinita manente, quod à tertia definitione datorum Euclidis depromptum eſt. Verè enim triangula omnia quæ latera habent proportionalia eiuſdem ſpeciei cenſeri poſſunt, tum ob laterum ſimilitudinem, tum ob angulorum æqualitatem, vnde & ſimilia vocantur ab Euclide. Idcirco Doipbantus huiuſmodi triangula non exhibet in vnitatibus, quia verbi gratia ſi exponatur triangulum 3. 4. 5. Id iam non in ſpecie, ſed in indiuiduo exhibitum erit. Cùm autem proportio laterum dabitur, ſed ipſa laterum quantitas manebit indefinita, exhibendo ſcilicet triangulum in Numeris, vt facit Diopbantus ſicut 3 N. 4 N. 5 N. vere & propriè exhibitum erit triangulum in ſpecie, cùm hæ poſitiones, ob numeri indeterminationem, applicari poſſint lateribus cuiuſlibet trianguli huius ſpeciei.

Aduerte ſecundò. Cùm per primam operationem reperiatur 6 Q. + 5. æqualis quadrato, æquandum eum eſſe cuilibet quadratorum numero quadrato maiori quàm 6. puta 9 Q. 16 Q. &c. Quare oportet talem deligi quadratorum numerum vt ab eo auferendo 6. reſiduum ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Proinde cùm 6. ſit numerus areæ expoſiti trianguli, patet quærendum aliud triangulum, cuius area ſi auferatur ab aliquo quadrato, reſiduum ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Vnde apparet neceſſitas ſecundæ operationis, qua Diophantus huiuſmodi triangulum & quadratum inueſtigat.

Aduerte tertiò ſubtiliter fingi triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. vnde fit hypotenuſa 1 Q. + $\frac{1}{1Q}$. perpendiculum 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. Baſis verò 2. Quare ducto dimidio baſis in perpendiculum fit area 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. Quadrati verò latus fingitur 1 N. + $\frac{10}{1N}$. Et primò pars illius ponitur 1 N. vt eius quadratus puta 1 Q. elidatur ab 1 Q. qui eſt in area, cùm area ſubtrahetur à quadrato. Deinde pars altera ponitur $\frac{10}{1N}$ vt eius quadratus $\frac{100}{1Q}$. ſit eiuſdem denominationis cum − $\frac{1}{1Q}$. qui reperitur in area, vnde commodiſſimè hic ab illo ſubtrahetur per ſolam additionem 1. ad 100. ob ſigni diuerſitatem, communi retento denominatore, & relinquetur $\frac{101}{1Q}$. Quod ſi diuerſi eſſent harum fractionum denominatores facta ſubtractione, relinquerentur vtique cubi, vel quadratoquadrati, vel aliæ poteſtates, à quibus ſeſe expedire difficillimum eſſet. Tertio in hac ſecunda lateris parte ponuntur vnitates 10. duplum ſcilicet dati numeri 5. vt in quadrato reperiantur 20. vnitates duplum ſcilicet ipſius 10. ac proinde quadruplum ad 5. Quare cùm $\frac{101}{1Q}$. + 20. debeat ad 5. habere rationem quadrati ad quadratum, ac proinde vno in alterum ducto oporteat gigni quadratum, patet productum ex 20. in 5. eſſe quadratum quia ob rationem quadruplam 20. & 5. ſunt plani ſimiles. Porrò $\frac{505}{1Q}$. + 100. (ſeu omnia ducendo in 1 Q. vt tollatur fractio) 505 + 100 Q. nulla ratione poſſet æquari quadrato niſi 100. eſſet quadratus. Vnde colligas in hac ſecunda lateris parte loco 10. poni poſſe quemlibet numerum qui ſit ſemiſſis alterius qui ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Ac proinde ex hoc capite quæſtionem varias recipere ſolutiones. Verbi gratia ponatur latus quadrati 1 N. + $\frac{40}{1N}$. fiet quadratus 1 Q. + $\frac{1600}{1Q}$. + 80. vnde auferendo aream puta 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. remanet $\frac{1601}{1Q}$. + 80. qui ad 5. debet habere rationem quadrati ad quadratum. Quare altero in alterum ducto fit $\frac{8005}{1Q}$. + 400. æqualis quadrato, & omnia in 1 Q. fit 8005 + 400 Q. æquandus quadrato. Quod facilè fiet, quia 400.

est quadratus. Denique omissam à Diophanto solutionem quæstionis afferre non pigebit. Cùm sit 1 N. 24/5. formatur triangulum à 24/5. & à 5/24. fitque hypotenusa 332401/14400. perpendiculum 331151/14400. basis 2. latus autem quadrati est 415/60. quadratus [illegible]. vel in eadem denominatione [illegible]. Itaque ponantur latera quæsiti trianguli 332401/14400 N. 331151/14400 N. 2 N. area adsumens 5. fit 331151/14400 Q. + 5. æqualis quadrato [illegible] Q. & auferendo vtrimque æqualia, manent [illegible]. æqualia 5. fitque 1 Q. 576/1369. At 1 N. 24/37. Erunt ergo latera quæsiti trianguli [illegible]. [illegible]. [illegible]. fitque area [illegible]. cui addendo 5. fit quadratus [illegible]. cuius latus [illegible].

Quoniam verò hinc fortè venit in mentem Francisco Vietæ quæstionem applicari posse solis numeris, qui è duobus quadratis componuntur, quia Diophantus in sua hypothesi sumpserat 5. è duobus quadratis compositum; quamuis ex ipso ductu analyseos Diophantææ satis constet, ad quemlibet numerum extendi problema, ne quis tamen supersit dubitandi locus, placet id etiam experientia comprobare. Sit ergo inueniendum triangulum, cuius area adsumens 6. qui minimè compositus est è duobus quadratis, faciat quadratum. Itaque prius quærendum est triangulum, itémque quadratus, vt area trianguli de quadrato sublata, supersit numerus qui ad 6. habeat rationem quadrati ad quadratum. Fingatur triangulum ab 1 N. & 1/1N. erit vt prius area 1 Q. − 1/1Q. sit autem latus quadrati 1 N. + 12/1N. erit quadratus 1 Q. 144/1Q. + 24. à quo auferendo aream supradictam, superest 145/1Q. + 24. quo ducto in 6. & omnia ducendo in 1 Q. fit tandem 144 Q. + 870. æqualis quadrato. Fingatur latus illius 12 N. + 10. fiet 1 N. 77/24. & latus quadrati 12841/1848. Formetur igitur triangulum abs 77/24 & 24/77. & constituatur in Numeris, erunt latera illius 35484817/3415104 N. 34821265/3415104 N. 2 N. fiet area adsumens 6. 34821265/3415104 Q. + 6. æqualis quadrato à latere supraposito, hoc est quadrato 164891281/3415104 Q. vnde tandẽ fit valor quadrati 20490624/130070016. vel in minimis 5929/37636. ac proinde 1 N. est 77/194. per quam resoluendo hypostases, inueniuntur latera quæsiti trianguli, nimirum 2732330909/662530176. 2681237405/662530176. 77/97. fitque area 206455280185/128530854144. cui addendo 6. fit quadratus 977640405049/128530854144. cuius latus 988757/358512.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ numerus multatus dato numero faciat quadratum. Datus esto 6. & ponatur triangulum datum specie 3 N. 4 N. 5 N. & ob hypothesin 6 Q. − 6. æquantur quadrato. Esto ipsi 4 Q. Et rursus res eò deducitur, vt inueniendum sit triangulum rectangulum, & quadratus numerus, quo de area trianguli sublato, si reliquum sexies sumatur, fiat quadratus. Formetur rursus triangulum ab 1 N. & 1/1N. At latus quadrati sit 1 N. cum defectu fractionis numericæ tot vnitatum, quantus est semissis dati numeri. Hoc est 3/1N. & fit

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λήψας τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ϛ. καὶ πεπλάσθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει [ςς γ. ςς δ. ςς ε.] καὶ διὰ τὴν ὑπόθεσιν Δυ ϛ. λεῖψει μο ϛ. ἴσαι εἰσὶ τετραγώνῳ. ἔστω Δυ δ. καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμόν, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ ἀριθμὸς τετράγωνος, καὶ τὰ λοιπὰ ἑξάκις γενόμενα ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ ς α. καὶ α ς^x. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ς α. [λεῖψει ἀριθμοστοῦ μονάδων τοσούτων ἴσων] ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ πλήθους τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τουτέστι γ ς^x. καὶ

γίνεται ὁ τετράγωνος Δ^Υ α. Θ^{δυ.α} ⋔ μ° ς̄. καὶ ἐὰν αὐτὸν ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ, τουτέστιν ἀπὸ Δ^Υ α. λείψει α^{δυ.α}. λοιπὸς γίνεται μ° ς̄. λείψει ῑ^{δυ.α}. καὶ ταῦτα ἑξάκις, καὶ παρὰ δύναμιν γίνεται Δ^Υ λς̄. λείψει μ° ξ̄. ἴσον τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ςς ς̄. λείψει μ° β̄. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς^ος μ° η̄^γ. πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ η̄^γ. καὶ γ^η. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ λζ̄^{κδ}. καὶ εὑρὼν τὸ τρίγωνον τάσσω ἐν ςς^{οῖς}. καὶ ἀκολουθήσας τῇ προτάσει, εὑρήσω τὸν ς^ον ῥητόν, καὶ μένει.

quadratus 1 Q. + $\frac{9}{1Q}$. - 6. Hunc si ab area detrahamus, hoc est ab 1 Q. - $\frac{1}{1Q}$. relinquitur 6 - $\frac{10}{1Q}$. & omnia sexies, & in 1 Q. ducantur. Fiunt 36 Q. - 60. æquales quadrato. Esto latus eius 6 N. - 2. inuenietur 1 N. $\frac{8}{3}$. Formabitur ergo triangulum à $\frac{8}{3}$ & $\frac{3}{8}$. Eritque quadrati latus $\frac{37}{24}$. & cùm inuenero triangulum, statuam illud in numeris, secutusque propositionem, inueniam numerum rationalem. Et constat.

IN QVAESTIONEM IV.

Ex dictis ad præcedentem, omnia quæ hîc peraguntur fiunt perspicua. Apparet sane fingi quadratum à latere 1 N. - $\frac{3}{1N}$. Vt in quadrato reperiantur vnitates - 6. vnde omnia per 6. multiplicando, fiat quadratus 36. Alioquin enim numerus 36 Q. - 60. quadrato æquari non posset, si 36. non esset quadratus. Quamobrem etiam patet, loco ipsius 3. in latere poni potuisse quemlibet alium vnitatum numerum, cuius duplum ad 6. habeat rationem quadrati ad quadratum. Verbi gratia 12. fieretque latus 1 N. - $\frac{12}{1N}$. & sic de aliis.

Porrò non pigebit in tyronum gratiam integram apponere quæstionis solutionem quam prætermisit Diophantus. Cùm fiat 1 N. $\frac{8}{3}$ & latus quadrati $\frac{37}{24}$. formetur triangulum ab $\frac{8}{3}$ & $\frac{3}{8}$ & latera statuantur in numeris, fient $\frac{4177}{576}$ N. $\frac{4015}{576}$. N. 2 N. Est ergo area multata numero 6. $\frac{4015}{576}$ Q. - 6. æqualis quadrato à latere $\frac{37}{24}$ N. puta quadrato $\frac{1369}{576}$ Q. Vnde fit valor quadrati $\frac{64}{49}$. ac proinde valor numeri $\frac{8}{7}$ per quem resoluendo hypostases, fiunt quæsiti trianguli latera $\frac{4177}{504}$. $\frac{4015}{504}$. $\frac{16}{7}$. Estque area $\frac{4015}{441}$. vnde auferendo datum numerum 9. superest quadratus $\frac{1369}{441}$. à latere $\frac{37}{21}$.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ° ῑ. καὶ πάλιν τετάχθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ςς γ̄. ςς δ̄. ςς ε̄. γίνεται μ° ῑ. ⋔ Δ^Υ ς̄. ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ ἐὰν ποιῶμεν ἴσας δυνάμεσι τετραγωνικαῖς, ἀπάγεται πάλιν εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ detractus à dato numero faciat quadratum. Esto datus 10. & rursum statuatur triangulum abs 3 N. 4 N. 5 N. fiunt 10 - 6 Q. æquales quadrato, & si æquales faciamus numero quadratorum quadrato, eò rursus deuentum est, vt inueniatur triangulum rectangulum & quadratus numerus,

ita vt quadratus adsumpto areæ numero faciat decimam partem quadrati. Formetur triangulum abs $\frac{1}{1N}$. & 1 N. At quadrati latus esto $\frac{1}{1N}$. + 5 N. & fit compositus ex area, & ex quadrato 26 Q. + 10. Hæc decies, fiunt 260 Q. + 100. æqualia quadrato, & quadrans horum 65 Q. + 25. æquatur quadrato. Cuius latus esto 5 + 8 N. vnde inuenitur 1 N. 80. Ad positiones. Et inueniemus vt in præcedentibus.

ἴ, πως ὁ τρίγωνος προσλαβὼν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ δέκατον τετραγώνου. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ἀ^{ριθμοστοῦ} α. καὶ ς α. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ἀ^{ριθμοστοῦ} α. καὶ ς ε. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τοῦ τετραγώνου Δ^Υ κς. μ° ι. ταῦτα δεκάκις, γίνεται Δ^Υ σξ. μ° ρ. ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ τὰ τέταρτα, γίνονται Δ^Υ ξε. μ° κε. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μ° ε. ς η. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς μ° π. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ ὁμοίως τοῖς περὶ τούτου εὑρήσομεν.

IN QVAESTIONEM V.

HIc fingens triangulum Diophantus ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. ponit hypotenusam 1 Q + $\frac{1}{1Q}$. At perpendiculũ 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. basim 2. vnde fit area 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. Tum fingit quadratum à latere $\frac{1}{1N}$. + 5 N. fitque quadratus $\frac{1}{1Q}$. + 25 Q. + 10. cui addendo aream, fit 26 Q + 10. quo ducto in 10. fit 260 Q + 100. æquandus quadrato. Vnde patet cur in quadrati latere posuerit 5. vt scilicet in quadrato reperiatur 10. qui ad datum numerum 10. sit in ratione quadrati ad quadratum. Fecit autem idem latus $\frac{1}{1N}$. + 5 N. non sicut in præcedentibus 1 N. + $\frac{5}{1N}$. vt latera & aream trianguli retineret eadem quæ prius. Nam si posuisset latus quadrati 1 N. + $\frac{5}{1N}$. ponendũ fuisset perpendiculũ trianguli $\frac{1}{1Q}$ − 1 Q. vt etiam area fieret $\frac{1}{1Q}$ − 1 Q. res tamẽ æquè benè succederet, & inueniretur 1 N. $\frac{1}{80}$. alter scilicet numerorũ, à quo formari debet triangulum, cùm per operationem Diophanti alter reperiatur pura 80. Omisit autem hîc etiam Diophantus integram quæstionis solutionem labori se subtrahens, ob molestas fractiones? sed hunc laborem suscipere non grauabimur. Cùm 1 N. fit 80. & latus quadrati $\frac{32001}{80}$. formetur triangulum abs 80. & $\frac{1}{80}$. & statuantur latera in numeris, fient $\frac{40960001}{6400}$ N. $\frac{40959999}{6400}$ N. 2 N. fitque area $\frac{40959999}{6400}$ Q. qua detracta de numero 10. fit 10 − $\frac{40959999}{6400}$ Q. æqualis quadrato, esto quadrato à latere $\frac{32001}{80}$ N. puta quadrato $\frac{1024064001}{6400}$ Q. fient tandem 10. æquales $\frac{1065024000}{6400}$ Q. vnde fit valor quadrati $\frac{64000}{1065024000}$. seu in minimis $\frac{1}{16641}$. vnde 1 N. est $\frac{1}{129}$. Ad positiones erunt latera quæsiti trianguli. $\frac{40960001}{825600}$. $\frac{40959999}{825600}$. $\frac{2}{129}$. est area $\frac{40959999}{106502400}$. qua detracta de 10. remanet quadratus $\frac{1024064001}{106502400}$. à latere $\frac{32001}{10320}$.

Non adeo molestos numeros habebimus si numeri 65 Q. + 25. latus statuamus 5 + 5 N. Nam fiet 1 N. $\frac{5}{4}$. latus quadrati $\frac{141}{20}$. Quare formabitur triangulum à $\frac{5}{4}$. & $\frac{4}{5}$. eruntque latera in Numeris $\frac{881}{400}$ N. $\frac{369}{400}$ N. 2 N. & area detracta de 10. fit 10. − $\frac{369}{400}$ Q. æqualis quadrato $\frac{19881}{400}$ Q. vnde fit tandem 1 Q. $\frac{16}{81}$. At 1 N. $\frac{4}{9}$. per quem resoluendo hypostases, fiunt latera trianguli quæsiti $\frac{881}{900}$. $\frac{369}{900}$. $\frac{8}{9}$. Area est in minimis $\frac{41}{225}$. quam auferendo à 10. remanet quadratus $\frac{2209}{225}$. à latere $\frac{47}{15}$.

QVÆSTIO VI.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adsumens vnum laterum circa rectum, faciat datum nu-

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ προσλαβὼν τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ

δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ζ̄. τετάχθω πάλιν ὁ τρίγωνος δεδομένου τῷ εἴδει ςς γ̄. ςς δ̄. ςς ε̄. καὶ γίνονται δυ ς̄. ςς γ̄. ἴσαι μο ζ̄. καὶ δεῖ τὴν ἀριθμῶν τῶν ἡμίσει ἐφ' ἑαυτῷ προσθεῖναι τὰς δυνάμεις [ἑπτάκις γινομένας] καὶ ποιεῖν τετράγωνον. οὐ ποιεῖται δὲ, ὥστε δεήσει εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ἡμίσεως μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, προσλαβὼν τὸ ἑπταπλάσιον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἀριθμοῦ ᾱ. ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ μο ᾱ. καὶ γίνονται ἀριθμοὶ γ̄. ᾱ 𐅵. μο ᾱ δ. καὶ πάντα τετράκις γίνονται ςς ιδ̄ μο ᾱ. ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἵνα τὸ ὀρθογώνιον ῥητὸν κατασκευάσωμεν δεῖ καὶ δύναμιν ᾱ μονάδα ᾱ. ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. ἡ ὑπεροχὴ γίνεται δυ ᾱ λεῖψει ςς ιδ̄. ἡ μέτρησις ἀριθμοῦ ᾱ κατὰ ς ᾱ λεῖψει μο ιδ̄. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται μο μθ̄. ἴσαι τῷ ἐλάσσονι, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς κδ ζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. τάσσω οὖν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ τριγώνου κδ ζ. τὴν δὲ ἑτέραν μο ᾱ. καὶ πάντα ἑπτάκις, [καὶ ἐν ἀριθμοῖς] γίνεται ἡ μὲν ἀριθμῶν κδ̄. ἡ δὲ ἀριθμῶν ζ̄. ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἀριθμῶν κε̄. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ δευτέραν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δυ πδ̄ ςς ζ̄. ταῦτα ἴσα μο ζ̄. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς εὑρίσκεται [ᾱ δ. αἱ δὲ τοῦ τριγώνου πλευραὶ] μο ς̄. μο ζ δ. μο κε δ. καὶ μένει.

merum. Esto datus 7. statuatur rursus triangulum datum specie 3 N. 4 N. 5 N. & fiunt 6 Q. + 3 N. æquales 7. & oportet semissem numerorum in se ductum adsumere quadratos per 7. multiplicatos, & facere quadratum. Non facit autem. Oportet igitur inuenire triangulum rectangulum, vt quadratus semissis vnius laterum circa rectum adsumens septuplum areæ, faciat quadratum. Esto vnum laterum circa rectum 1 N. alterum 1. & fiunt 3 1/2 N. + 1/4. & omnia quater, fiunt 14 N. + 1. æqualia quadrato. Vt autem etiam triangulum rectangulum rationale constituamus, oportet, & 1 Q. + 1. æquari quadrato. Horum interuallum est 1 Q. - 14 N. mensuratio 1 N. secundum 1 N. - 14. Istorum interualli semissis in se facit 49. quod æquatur minori, & fit 1 N. 24/7. Ad positiones. Pono igitur vnum laterum circa rectum trianguli 24/7. alterum 1. & omnia septies & in numeris, fiet illud 24 N. hoc verò 7 N. At hypotenusa 25 N. & fit area adsumens latus secundum 84 Q. + 7 N. Hoc æquatur 7. vnde 1 N. inuenitur 1/4. suntque latera trianguli 6. 7/4. & 25/4. & constat.

IN QVAESTIONEM VI.

HIC deuenitur ad regulas compositas, vt liquet tum ex prima operatione, in qua 6 Q. + 3 N. æquâtur 7. tum ex secunda, in qua 84 Q. + 7 N. æquantur 7. has autem æquationes resoluit Diophantus modo sibi familiari quem explicauimus ad trigesimam tertiam primi, sumendo scilicet quadratum semissis numeri Numerorum, (qui numerus est vnum laterum circa rectum sumpti trianguli) & huic quadrato addendo productum ex dato numero 7. in numerum quadratorum, qui est numerus areæ. Quamobrem rectè infert. Inueniendum esse triangulum, vt quadratus semissis vnius laterum circa rectum, adsumens septuplum areæ, faciat quadratum. Huius trianguli latera circa rectum ingeniosè ponuntur 1 N. & 1. vnde fit area $\frac{1}{2}$ N. cuius septuplum 3 $\frac{1}{2}$ N. cui addendo quadratum semissis secundi lateris, fit 3 $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. æqualis quadrato, & omnia in 4. ad tollēdas fractiones, fit 14 N. + 1. æqualis quadrato. Porrò vt tria latera trianguli sint rationalia, cùm latera circa rectum posita sint 1 N. & 1. oportet vt eorum quadrati simul faciant quadratum hypotenusæ. Quare oportet vt 1 Q. + 1. sit æqualis quadrato. Iam ergo duplicata occurrit æqualitas, cùm æquandi sint quadrato tum 14 N. + 1. tum 1 Q. + 1. Reliqua sunt manifesta. Cur in lemmatis solutione abiiciantur denominatores, ratio est quia inuento triangulo soluente lemma propositum, si sumatur quodlibet aliud simile, id æquè benè proposito satisfaciet, vt demonstrare in promptu est. Sint A B latera circa rectum trianguli rectanguli, & sit D. quadratus semissis ipsius A. sitque E area trianguli, & datus numerus C. quo ducto in E fiat F. additisque simul F D. fiat G. quadratus. Tum sumantur H K latera circa rectum alterius trianguli similis priori, cuius area sit M. qua ducta in C. fiat N. & sit L. quadratus semissis ipsius H. additisque L N. fiat P. dico P. esse quadratum. Quia enim vt A ad H. sic est semissis ipsius A. ad semissem ipsius H. [1] At quadrati D L. sunt in duplicata ratione laterum, patet D ad L. duplicatam esse rationem rationis A ad H. [2] sed & ob similitudinem triangulorum area E ad aream M. est in duplicata ratione lateris A ad latus H. est ergo D ad L. vt E ad M. Quia verò idem C ductus in E & in M. producit F & N. [3] est F ad N. vt E ad M. ergo est etiam F ad N. vt D ad L. Quamobrem [4] & antecedentium summa puta G. est ad summam consequentium P. sicut vnus antecedentium D ad vnum consequentium L. sed D L sunt quadrati. Ergo G ad P. habet rationem quadrati ad quadratum, [5] ac proinde cùm G sit quadratus ex hypothesi, erit & P. quadratus. Quod erat demonstrandum.

F 2352. G 2401.
D 49. E 336.
A 14. B 48.
C 7.
H 28. K 96.
L 196. M 1344.
N 9408. P 9604.

[1] 11. *octaui.*
[2] 2. 3. *poris.*
[3] 17. *septimi.*
[4] 12. *septimi.*
[5] 24. *octaui.*

Facile quoque est examinare an numeri à Diophanto inuenti soluant quæstionem sunt enim latera trianguli 6. $\frac{7}{4}$. $\frac{25}{4}$. est autem area $\frac{21}{4}$. cui si addas alterum latus, puta $\frac{7}{4}$. fit vtique præscriptus numerus 7.

QVÆSTIO VII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus vno laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 7. Et rursum si statuamus triangulum datum specie, res eò deducitur vt inueniendum sit triangulum rectangulum, vt vnius laterum circa rectum semissis in se ductus, & adsumens septuplum

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ζ. καὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γενόμενον, καὶ προσλαβὼν τὸ

ἐπταπλάσιον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ εὕρηται, ὁ ὢν ζ. κδ. κε. τάσσω οὖν ἐν ςς. καὶ τὸ ἐμβαδὸν λήψας ἐκ τὸ ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γίνονται δυνάμεις πδ. λεῖψει ἀριθμῶν ζ. ταῦτα ἴσα μο ζ. καὶ γίνεται ὁ ς α γ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

areæ faciat quadratum. Et inuentum est, nempe 7. 24. 25. statuo ergo in numeris, & area multata vno laterum circa rectum facit 84 Q - 7 N. Hæc æquantur 7. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$ Ad positiones.

IN QVAESTIONEM VII.

Ex dictis ad præcedentem hîc omnia fiunt manifesta, cùm ab eodem lemmate pendeat solutio quæstionis. Fit autem 1 N. $\frac{1}{3}$. ac proinde quæsiti trianguli latera sunt $\frac{7}{3}$. 8. $\frac{25}{3}$. Area est $\frac{28}{3}$. vnde si auferas alterum latus, puta $\frac{7}{3}$. remanet vtique datus numerus 7.

QVÆSTIO VIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν ἑκατέραν συναμφοτέρας τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μο ς. καὶ πάλιν τετάχθω δεδομένος τῷ εἴδει, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ μετὰ τοῦ ἑξαπλασίου τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ τετράγωνον. καὶ πάλιν ὑποκείσθω μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ς α. ἡ δὲ ἑτέρα μο α. καὶ γίνεται ζητεῖν δυ α δ. ςς ζ β. μο α δ. ἴσα τετραγώνῳ. καὶ πάντα τετράκις, γίνεται δύναμις α. ςς ιδ. μο α. ἴσα τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ δυ α. μο α. ἴση τετραγώνῳ. ἡ ὑπεροχὴ ςς ιδ. ἡ μέτρησις ςς β. κατὰ μο ζ. τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται δύναμις α. μο ιβ. α δ. λεῖψει ἀριθμῶν ζ. ἴσοι δυνάμει α. μο α. καὶ γίνεται ὁ ς μο με κη. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον μο με κη. μο α. μο νγ κη. καὶ πάντα εἰς κη. γίνεται ἄρα τὸ

INVENIRE triangulum rectangulum, vt area adsumens vtrumque laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 6. Et rursum statuatur triangulum datum specie. Et rursum eo res deducitur vt inueniatur triangulum rectangulum, vt summæ laterum circa rectum semissis in se ductus, & adsumens sextuplum areæ faciat quadratum. Ponamus denuo vnum laterum circa rectum 1 N. alterum 1. & fit vt quæramus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{7}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. æqualia quadrato, & omnia quater. Fit 1 Q. + 14 N. + 1. æquale quadrato. Sed & 1 Q. + 1. æquari debet quadrato. Horum interuallum est 14 N. mensuratio 2 N. secundum 7. Istorum interualli semissis in se facit 1 Q. + 12 $\frac{1}{4}$ - 7 N. æquale 1 Q. + 1. & fit 1 N. $\frac{45}{28}$. est ergo triangulum $\frac{45}{28}$. 1. & $\frac{53}{28}$. & omnia per 28. fit igitur triangu-

triangulum 45 N. 28 N. 53 N. & fit area adſumens vtrumque latus circa rectum 630 Q. + 73 N. quod æquatur 6. & fit 1 N. rationalis. Ad poſitiones.

τρίγωνον ἀριθμῶν με. ἀριθμῶν κη. ἀριθμῶν νγ. καὶ γίνεται τὸ ἐμβαδὸν μετὰ συναμφοτέρας τῆς περὶ τὴν ὀρθὴν δυνάμεων χλ. ἀριθμῶν ογ. ἴσα μο ς. καὶ γίνεται ὁ ς ῥητός. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

IN QVAESTIONEM VIII.

RVRSVS ex adnotatis ad ſextam, operationis Diophanti ratio ſatis innoteſcit, ne tamen illius breuitas, tyronibus pariat obſcuritatem, age paulò fuſius eam explicemus. Quærentes triangulum, vt quadratus ſemiſſis ſummæ laterum adſumens ſextuplum areæ faciat quadratum, ponimus latera circa rectum 1 N. & 1. vnde fit area $\frac{1}{2}$ N. cuius ſextuplum 3 N. At ſemiſſis ſummæ ſuprapoſitorum laterum eſt $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$. cuius quadratus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. cui addendo 3 N. fit $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{7}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. & omnia quadruplicando fit 1 Q. + 14 N. + 1. æquandus quadrato. Sed etiam vt hypotenuſa ſit rationalis oportet 1 Q. + 1. æquari quadrato. Ergo duplicata occurrit æqualitas. Interuallum itaque numerorum eſt 14 N. & numeri quorum mutuo ductu id fit ſumuntur 2 N. & 7. cautè, qualia multa fieri animaduertimus paſſim libro tertio. vnde tandem fit 1 N. $\frac{45}{28}$. alterum laterum circa rectum, nam alterum poſitum eſt 1. Quare hypotenuſa erit $\frac{53}{28}$. & abiectis denominatoribus conſtituitur triangulum ſpecie, 45 N. 28 N. 53 N. fitque area 630 Q. cui addendo ſummam laterum circa rectum, fit 630 Q. + 73 N. æqualis 6. vnde fit 1 N. $\frac{1}{18}$. ſunt ergo latera circa rectum quæſiti trianguli $\frac{5}{2}$. & $\frac{14}{9}$. hypotenuſa $\frac{53}{18}$. vnde fit area $\frac{105}{54}$. cui addendo ſummam laterum circa rectum, fit $\frac{324}{54}$. ſeu 6. vt requirebatur.

QVÆSTIO IX.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus ſumma laterum circa rectum faciat datum numerum. Eſto datus 6. Et rurſus ſi ſtatuamus quæſitum triangulum datum ſpecie, fit vt quærendum ſit triangulum rectangulum, vt ſummæ laterum circa rectum ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens ſextuplum areæ, faciat quadratum. Hoc autem iam antè eſt demonſtratum. & eſt 28. 45. 53. Pono itaque hæc in numeris, & fit tandem 630 Q. − 73 N. æquale 6. vnde inuenitur 1 N. $\frac{6}{35}$. Ad poſitiones.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν ἐν συναμφοτέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς ς. καὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει, γίνεται ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ προσλαβὼν τὸν ἑξαπλάσιον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται. καὶ ἔστιν κη. με. νγ. τάσσω οὖν αὐτὰ ἐν ἀριθμοῖς. καὶ πάλιν γίνεται δυνάμεις χλ. λείψει ςς ογ. ἴσαι μο ς. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς μο ς λε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

IN QVAESTIONEM IX.

Ex præcedentium explicatione, satis hæc fit dilucida. Integram solutionem omisit Diophantus, quæ talis est. fit 1 N. $\frac{6}{35}$. Quare latera quæsiti trianguli reperiuntur $\frac{24}{7}$. $\frac{54}{7}$. & $\frac{312}{35}$. Area verò est $\frac{648}{35}$. vnde si detrahas summam laterum circa rectum, remanet $\frac{210}{35}$. seu 6. vt postulabatur.

QVÆSTIO X.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν συναμφοτέρᾳ, τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μ° δ̄. καὶ πάλιν τάξομεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει. ἀπάγεται πάλιν εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ [προσλαβὼν τὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τετραπλασίονα, ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ς° ᾱ. καὶ ἀπὸ ς° ᾱ. μ° ᾱ. καὶ ποιεῖ συναμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ᾽ ἑαυτὸ] δδ ᾱ. κ° δ̄. δ° ϛ̄. ςς οἱ δ̄. μ° ᾱ. ὁ δὲ τετραπλασίων τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ κ° η̄. δ° ιβ. ςς δ̄. ὥστε δεήσει ζητεῖν δδ ᾱ. κ° ιβ. δ° ιη. ςς οἱ η̄. μ° ᾱ. ἴσους τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δ° ᾱ. ςς ϛ̄. ⋔ μ° ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς° ε δ. πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ ε δ. καὶ θ δ. καὶ ἅπαντα τετρακι πλασθήσεται πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ θ̄. καὶ ε̄. καὶ λαβὼν τὰ ἐλάσσονα τῶν ὁμοίων τάσσω αὐτὸν ἐν ςς οἷς, γίνεται ςς κη. ςς με. ςς νγ. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ συναμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δ° χλ. ςς πᾱ. ἴσος μ° δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς° δ ρε. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

Invenire triangulum rectangulum, vt areæ numerus adsumens summam hypotenusæ & alterius laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 4. Rursus statuemus triangulum datum specie, & eo reducimur, vt inueniamus triangulum rectangulũ, vt numerorum hypotenusæ & alterius laterum circa rectum summæ semissis in se ductus, & adsumens quadruplum areç faciat quadratum. Formetur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. & summæ hypotenusæ & alterius laterum circa rectum semissis in se, fit 1 QQ. + 4 C. + 6 Q. + 4 N. + 1. Quadruplũ autem areæ est 8 C. + 12 Q. + 4 N. Itaq; oportet quærere 1 QQ. + 12 C. + 18 Q. + 8 N. + 1. æqualia quadrato. Esto latus eius 1 Q. + 6 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. formabitur ergo triangulum ab $\frac{5}{4}$. & $\frac{9}{4}$. & omnia quater. Formabitur rursum triangulum à 9. & 5. & sumens minima similium, statuo ipsum in numeris, fit 28 N. 45 N. 53 N. Et est numerus areæ adsumens summam hypotenusæ & alterius laterum circa rectũ 630 Q. + 81 N. æqualis 4. & fit 1 N. $\frac{4}{105}$. Ad positiones.

IN QVAESTIONEM X.

IMPRIMIS monendus est lector, hanc & sequentem propositionem in codice Xilandri malè ordinem immutare, cùm sequens statuatur ibi decima, & hæc vndecima. Rectius in codice regio suum quemque obtinet locum, in quo vno codex ille nobis hucusq; fuit auxilio, in reliquis omnibus nimis infeliciter cum codice Xilandri consentiens. Sed & euidens est Diophantum in sequente quæstione vndecima, supponere totam fere decimæ huius cõstructionem, vt de harũ propositionũ ordine nullus supersit dubitandi locus. Hic porro cùm inueniendũ sit triangulum, vt quadratus semissis cõpositi ex hypotenusa, & ex altero laterũ circa rectum, adsumẽs quadruplum areæ faciat quadratum, formatur triangulũ ab 1 N. & ab 1 N. + 1. fitque hypotenusa 2 Q. + 2 N. + 1. basis 2 N. + 1. perpẽdiculũ 2 Q. + 2 N. Area verò est 2 C. + 3 Q. + 1 N. cuius quadruplum 8 C. + 12 Q. + 4 N. summa autem hypotenusæ & baseos est 2 Q. + 4 N. + 2. cuius semissis 1 Q. + 2 N. + 1. cuius quadratus fit 1 QQ. + 4 C. + 6 Q. + 4 N. + 1. cui addendo quadruplum areæ, fit 1 QQ. + 12. C. + 18 Q. + 8 N. + 1. æquandus quadrato. Huius autem latus cur ponatur a Diophanto 1 Q. + 6 N. − 1. satis superque docuimus ad vigesimam nonam quarti, nimirum hac ratione tolluntur quadratoquadrati, cubi & vnitates, maneque æquatio inter duas proximas species quadratos & numeros. Nam fiunt 16 Q. æquales 20 N. vnde fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Quare formandum est triangulum à $\frac{5}{4}$. & $\frac{9}{4}$. & omnia per 4. multiplicando, fingitur triangulum à 5. & 9. funtque latera 106. 56. 90. quæ diuidendo per 2. vt habeatur nimirum triangulum eiusdem speciei in integris, fiunt 53. 28. 45. cuius rei ratio ex demonstratis ad sextam satis liquet. Ponuntur ergo latera quæsiti trianguli 53 N. 28 N. 45 N. & est area 630 Q. cui addendo summam hypotenusæ 53 N. & lateris 28 N. fit 630 Q. + 81 N. æqualis 4. vnde fit 1 N. $\frac{4}{105}$ per quem resoluendo hypostases, fiunt latera quæsiti trianguli $\frac{212}{105}$. $\frac{16}{15}$. $\frac{12}{7}$. Area est $\frac{96}{105}$. cui si addas summam hypotenusæ & primi lateris fit $\frac{420}{105}$. seu 4. vt requirebatur.

Cæterùm eodem prorsus artificio soluetur quæstio quæ à Diophanto prætermissa est, cùm tamen ad hanc tractationem pertineat, nimirum.

Inuenire triangulum rectangulum, vt areæ numerus adsumens hypotenusam datum faciat numerum. Esto datus 4.

Patet quærendum prius triangulum, vt quadrato semissis hypotenusæ addendo quadruplum areæ, fiat quadratus. Fingatur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. erit semissis hypotenusæ 1 Q. + 1 N. + $\frac{1}{2}$. cuius quadratus 1 QQ. + 2 C. + 2 Q. + 1 N. + $\frac{1}{4}$. cui addendo quadruplũ areæ, puta 8 C. + 12 Q. + 4 N. fit 1 QQ. + 10 C. + 14. Q. + 5 N. + $\frac{1}{4}$. æqualis quadrato. Ponatur latus illius 1 Q. + 5 N. − $\frac{1}{2}$. fient tandem 10 N. æquales 10 Q. Quare 1 N. est 1. & fingendum est triaogulum ab 1. & à 2. fiuntque latera 5. 3. 4. quæ si statuantur in numeris, fiet area cum hypotenusa 6 Q. + 5 N. æqualis 4. vnde fit 1 N $\frac{1}{2}$. sunt ergo quæsiti trianguli latera 2 $\frac{1}{2}$. 2. 1 $\frac{1}{2}$. fitque area 1 $\frac{1}{2}$. cui si addas hypotenusam fit numerus 4. vt postulabatur.

QVÆSTIO XI.

INVENIRE ttiangulum rectangulum, vt numerus ateæ multatus summa hypotenusæ & alterius latetum circa rectum, faciat datum numetum. Esto datus 4. Rursum si statuamus triangulum datum specie, eò

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λήψας τὸν συναμφότερα τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω· ὁ δοθεὶς μονάδες δ. καὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει,

ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ τετράκις γενόμενος πρὸς συναμφοτέρων τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ποιῇ τετράγωνον. καὶ δειχθήσεται ὅτι ἐστὶν κη. με. νγ. τάσσω αὐτὸν ἐν ςς^{ois} καὶ γίνονται δυ^{v} χλ. λεῖψει ςς$^{\bar{}}$ πα. ἴσαι μο^{o} δ. καὶ γίνεται ὁ ς^{o} α ς^{x}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

ducimur vt inueniamus triangulum rectangulum, vt quadruplum areæ additum quadrato semissis summæ ex hypotenusa, & altero laterum circa rectum, faciat quadratum. & demonstratum est esse 28. 45. 53. Pono illud in numeris, & fiunt 630 Q. – 81 N. æquales 4. & fit 1 N. $\frac{1}{6}$. Ad positiones.

IN QVAESTIONEM XI.

HVIVS quæstionis solutio pēdet omnino à lemmate ad præcedētem assumpto. Nam inuento triangulo vt quadruplum areæ additum quadrato semissis compositi ex hypotenusa & altero laterum, faciat quadratum, constituitur in Numeris, puta 53 N. 28 N. 45 N. & fiunt tandem 630 Q. – 81 N. æquales 4. vnde 1 N. fit $\frac{1}{6}$. Quare quæsiti trianguli latera reperiuntur $\frac{53}{6}$. $\frac{14}{3}$. $\frac{15}{2}$. Area est $\frac{105}{6}$. vnde auferēdo summam hypotenusæ & baseos, puta $\frac{81}{6}$. remanet $\frac{24}{6}$. seu 4. vt postulabatur.

Eodem etiam artificio soluetur hæc quæstio.

Inuenire triangulum rectangulum, vt area, detracta hypotenusa, faciat datum numerum.

Datus esto 4. Quæretur triangulū, vt prius, vt quadruplū areæ additum quadrato semissis hypotenusæ, faciat quadratum, quale inuentum est ad præcedentem 5. 4. 3. statuatur ergo in Numeris, & sint quæsiti trianguli latera 5 N. 4 N. 3 N. fient ergo 6 Q. – 5 N. æquales 4. vnde fit 1 N. $\frac{4}{3}$. Ad hypostases. Sunt quæsiti latera trianguli $\frac{20}{3}$. 4. $\frac{16}{3}$. Estque area $\frac{32}{3}$. vnde si aufetas hypotenusam, remanet $\frac{12}{3}$ seu 4. vt postulabatur.

QVÆSTIO XII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ ὁ ἐν τῇ μείζονι τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ τετράγωνος. ἔτι δὲ ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ μετὰ ἐλάσσονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω τρίγωνος ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, καὶ ὑποκείσθω ἡ μείζων τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γενομένη ἐκ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν. δεῖ οὖν εὑρεῖν δύο ςς^{ous} ὅπως ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος. καὶ ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ποιῇ τετράγωνον.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt & interuallum laterum circa rectum, & ipsum maius latus, sit quadratum. Et præterea area eum minore laterum circa rectum, faciat quadratum. Formetur triangulum à duobus numeris, & supponatur maius laterum circa rectum fieri ex duplo producti multiplicationis ipsorum. Oportet ergo inuenire duos numeros, vt duplum multiplicationis eorum sit quadratus, & excessus dupli multiplicationis eorū super interuallum quadratorū ab ipsis ortorum, faciat quadratū.

Hoc autem accidit duobus quibusuis numeris, quando maior minoris est duplus. Formetur ergo triangulum abs 1 N. & 2 N. & satisfit duabus propositi partibus. Superest vt videamus an area trianguli cum minore laterum circa rectum faciat quadratum fit autem 6 QQ. + 3 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur. Fiunt 6 Q. + 3. æqualia quadrato. Quæremus igitur aliquem numerum, cuius sex quadrati adsumpto ternario faciant quadratum. Huiusmodi autem est 1. & alij infiniti numeri. Ergo quæsitum triangulum rectangulum formabitur ab 1. & 2.

Lemma.

Duobus datis numeris, quorum summa sit quadratus. Inuenientur infiniti quadrati, quorum quilibet ductus in vnum datorum & adsumens alterum, faciet quadratum. Sint duo dati numeri 3. & 6. & oporteat inuenire quadratum, qui ductus in 3. & adsumens 6. faciat quadratum. Esto quæsitus quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. & fiunt 3 Q. + 6 N. + 9. æqualia quadrato. & solui potest infinitis modis, quia vnitates sunt quadratæ. Esto igitur latus quadrati 3 − 3 N. & fit 1 N. 4. erit igitur quadrati latus 5. & alij infiniti inuenientur.

τοῦτο δὲ ἐν πᾶσι δυσὶν ἀριθμοῖς, ὅταν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ᾖ διπλασίων. [πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ς^ο α. καὶ ςς^ο β. καὶ λύεται δύο τῶν ἐπιταγμάτων] λοιπὸν ζητοῦμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου μετὰ τῆς ἐλάσσονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετράγωνον. [γίνεται δὲ ΔΥΔ ς. ΔΥ γ. καὶ πάντα παρὰ δύναμιν, γίνεται ΔΥ ς. Μ° γ. ἴσαι τετραγώνῳ.] ζητήσομεν ἄρα ἀριθμόν τινα, ὅπως οἱ ἓξ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι μετὰ Μ° γ. ποιῶσι τετράγωνον. ἔστι δὲ ἡ μονὰς α. καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί. ὥστε τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον ἔσται πεπλασμένον ἀπὸ Μ° α. καὶ Μ° β.

[Λῆμμα.]

Δύο δοθέντων ἀριθμῶν ὧν τὸ σύνθεμα ποιῇ τετράγωνον, εὑρίσκονται ἄπειροι τετράγωνοι, ὧν ἕκαστος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τῶν δοθέντων, [καὶ προσλαβὼν τὸν ἕτερον] ποιεῖ τετράγωνον. ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δύο ὅ τε γ. καὶ ὁ ς. καὶ δέον ἔστω προσευρεῖν τετράγωνον. ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν γ. καὶ προσλαβὼν τὸν ς. ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος ΔΥ α. ςς β. Μ° α. καὶ γίνονται ΔΥ γ. ςς^οι ς. Μ° θ. ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ δυνατόν ἐστι ἀπειραχῶς εὑρεῖν διὰ τὸ τὰς μονάδας εἶναι τετραγωνικάς. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ πλευρᾶς Μ° γ. λεῖψει ςς γ. καὶ γίνεται ὁ ς^ος Μ° δ. ἔσται ἄρα ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ Μ° ε. καὶ ἕτεροι ἄπειροι εὑρίσκονται.

IN QVAESTIONEM XII.

SVPPONIT in primis Diophantus huiusmodi Theorema.

Si fuerint duo numeri in proportione dupla, tam duplum producti eorum multiplicatione, quàm excessus eiusdem dupli producti super interuallum quadratorum, quadratus est.

Quod ita demonstratur. Sint in ratione dupla A minor & B maior, quorum quadrati C D. quorum interuallum G. dico tum duplum producti ex A in B. tum excessum eiusdem dupli producti super G. esse quadratum, etenim quia B est duplus ad A. patet D esse quadruplum ipsius C. eo quod quadrati sunt in duplicata ratione laterum. Sed productum ex A in suum duplum B æquatur duplo quadrati ipsius A. ac proinde duplum producti ex A in B. æquatur quadruplo quadrati ipsius A. hoc est quadruplo ipsius C. Igitur quadratus D. est duplum producti ex A in B. Quod erat primo probandum. Deinde patet ex hypothesi excessum D super G esse ipsum quadratum C. Quare ex omni parte constat propositum. Idcirco Diophantus fingit triangulum ab 1 N. & 2 N. vt duabus propositi partibus satisfiat; nam latera circa rectum sunt 4 Q. & 3 Q. quorum maius est quadratus vt patet; excessus verò illius super minus, est etiam quadratus puta 1 Q. Restat ergo vt area minore latere adsumpto faciat quadratum, facit autem 6 QQ. + 3 Q. æquale quadrato, & omnia per 1 Q. diuidendo, fit 6 Q. + 3. æquandus quadrato.

A 3. B 6. C 9. D 36. G 27.

Hic sanè Diophantus non vsitata prius ratione, quadrato æquat numerum ex duabus speciebus non proximis compositum, quales sunt quadrati & vnitates, quamuis neutra ipsarum numero exprimatur quadrato. Vt autem hoc fieri possit, quærendus est quadratus quo per 6. multiplicato, & producto addendo 3. fiat quadratus. Quod quidem possibile est, quia 6. & 3. simul conficiunt quadratum, & res absoluitur per assumptum lemma. Quia verò vnitas quadratus est, & non mutat numerum quem multiplicat, sequitur ex eo quod 6. & 3. conficiunt quadratum 9. vnitatem sumi posse loco quadrati quæsiti. Vnde fit etiam 1 N. 1. Quamobrem fingitur triangulum ab 1. & 2. & fiunt latera 5. 4. 3. quæ soluunt quæstionem.

Porrò facile est auxilio lemmatis assumpti alias reperire solutiones. Ponamus enim quadratum quæsitum 1 Q. + 2 N. + 1. quo ducto in 6. & producto addendo 3. fit vtique 6 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus cùm infinitis modis fingi possit, quia vnitatum numerus quadratus est, patet infinitas reperiri posse solutiones. Verbi gratia ponatur latus hoc 3 − 3 N. fiet 1 N. 10. Quamobrem quæsitus quadratus est 121. quo ducto in 6. fit 726. cui addendo 3. fit 729. quadratus à latere 27. Quare si 6 Q. + 3. æquemus quadrato 729. fiet 1 N. 11. Ac proinde fingatur triangulum ab 11. & 22. eruntque latera 605. 484. 363. quæ soluunt quæstionem, nam maius laterum circa rectum puta 484. est quadratus à latere 22. & illius excessus super 363. est 121. quadratus à latere 11. Area verò addito minore latere facit 88209. quadratum à latere 297. Itaque notandus est modus iste, quo æquabimus quadrato quemlibet quadratorum & vnitatum numerum, quamuis neuter sit quadratus, dummodo vterque simul conficiat quadratum.

Et vt aliquid addamus Diophanto, aio æquationem quoque explicari posse quamuis quadratorum, & vnitatum numeri simul non conficiant quadratum, dum reperiatur quadratus aliquis qui ducto in numerum quadratorum, & producto addendo numerum vnitatum fiat quadratus, quod sanè perficiemus per huiusmodi lemma.

Datis duobus numeris, si altero per quadratum multiplicato, altero ad productum addito fiat quadratus, inuenientur alij quadrati idem præstantes.

Sint dati 5. & 16. Nam ducto quadrato 4. in 5. & producto addendo 16. fit quadratus 36. Quærendus ergo est alius quadratus quàm 4. qui hoc idem præstet. Esto latus illius 2 + 1 N. fiet quadratus 4 + 4 N. + 1 Q. quo ducto in 5. & producto adiiciendo 16. fit 36 + 20 N. + 5 Q. æqualis quadrato. Hîc autem infinitæ dari possunt solutiones, quia vnitatum numerus est quadratus. Fingatur verbi gratia latus huius quadrati 6 – 3 N. fiet 1 N. 14. eritque quæsiti quadrati latus 16. ipse quadratus 256. quo ducto in 5. & producto adiiciendo 16. fit 1296. quadratus à latere 36.

Immò quod de multiplicatione dictum est, intelligendum quoque de diuisione, & scias eadem arte solui huiusmodi lemma.

Datis duobus numeris, si altero per quadratum diuiso, & altero ad quotientem addito fiat quadratus, inuenientur alij infiniti quadrati idem præstantes.

Sint dati numeri 96. & 12. Nam diuiso 96. per quadratum 4. fit quotiens 24. cui addendo 12. fit quadratus 36. Quærendus ergo alius quadratus quàm 4. qui præstet idem ponatur eius latus vt prius 2 + 1 N. erit quadratus 4 + 4 N. + 1 Q. per quem diuidendo 96. fit quotiens $\frac{96}{4 + 4 N + 1 Q}$. & huic addendo 12. fit $\frac{144 + 48 N + 12 Q}{4 + 4 N + 1 Q}$. æqualis quadrato. Est autem denominator quadratus. Quare superest vt numerator 144 + 48 N. + 12 Q. æquetur quadrato, quod facilè fit, quia 144. est quadratus, & fingetur latus illius 12 – 6 N. & fiet 1 N. 8. Quare latus quæsiti quadrati est 10. ipse quadratus 100. per quem diuidendo 96. fit quotiens $\frac{24}{25}$. cui addendo 12. fit $\frac{324}{25}$. quadratus à latere $\frac{18}{5}$. Quòd autem 144. necessariò sit quadratus, patet, ex eo quòd 144. fit addendo ad 96. productum ex 4 in 12. Quare cùm ex hypothesi 24. & 12. simul faciant quadratum 36. si vterque per aliquem quadratum multiplicetur, erit & summa productorum quadratus. Atqui ducto 4. in 24. fit 96. & ducto eodem 4. in 12. fit 48. Igitur summa ipsorum 96. & 48. puta 144. quadratus est, ille scilicet qui fit ducto 4. in 36.

Hoc autem lemmate mirificè iuuatur operatio Diophanti, quæ aliter fortuita videatur. Nam si finxisset triangulum ab aliquibus aliis numeris in ratione dupla constitutis, puta à 2 N. & 4 N. fuissent latera 20 Q. 16 Q. 12 Q. vbi laterum quidem circa rectum interuallum, itemque maius ipsorum, quadratus est, sed area minore assumpto. Fit 96 QQ. + 12 Q. & omnia diuidendo per 1 Q. fit 96 Q. + 12. æqualis quadrato. Atqui 96. & 12. simul non conficiunt quadratum. Quare per ea quæ tradit author, non constat quomodo 96 Q. + 12. possit æquari quadrato, & eius lemma hîc vsui esse non potest. Per nostrum autem lemma facilè res expedietur, nam si diuidas 96. per quadratum 4. fit 24. cui addendo 12. fit quadratus 36. Quare per allatum lemma inuenientur infiniti quadrati ab ipso 4. diuersi qui præstabunt idem, & infinitas exhibebunt solutiones. Nam inuento verbi gratia quadrato 100. per quem diuidendo 96. fit $\frac{24}{25}$. quo addito ad 12. fit quadratus $\frac{324}{25}$. æquabimus 96 Q. + 12. quadrato $\frac{324}{25}$. vnde fiet 1 N. $\frac{1}{10}$. Quare formabitur triangulum ab $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{5}$. & erunt latera circa rectum $\frac{3}{25}$. $\frac{4}{25}$. quorum maius, itemque interuallum ipsorum quadratus est. Area verò est $\frac{6}{625}$. cui addendo minus latus $\frac{3}{25}$. fit quadratus $\frac{81}{625}$. à latere $\frac{9}{25}$.

Tota tamen hæc operatio, adhuc labare videtur, nisi probetur aream trianguli sic diuidi posse per aliquem quadratum, vt quotienti addendo, minus laterum circa rectum, fiat quadratus. Quamobrem ne hîc scrupulus hæreat, sic pronuncio.

Si à datis duobus numeris in proportione dupla formetur triangulum rectangulum, eius area per quadratum minoris datorum diuisa, fit quotiens, quo addito minori laterum circa rectum, conflatur quadratus noncuplus ad priorem quadratum.

A 2. B 4.
C 4. D 16.
E 96. F 12.
G 24.

Sint in ratione dupla A minor & B maior, quorum quadrati C D. quorum interuallum F. ergo cum vt probatum est in adnotatis ab initio D sit duplum producti ex A in B. sunt D F latera circa rectum trianguli. Quare ducto semisse ipsius D in F fiat area E. qua diuisa per C. sit quotiens G. dico summam duorum F G esse quadratum noncuplum ad ipsum C. Etenim quia vt probatum est ab initio D quadtuplus est ad C. sequitur subtracto C ab ipso D. residuum F esse triplum ad C. Quare cùm semissis ipsius D ducitur in F. ducitur duplum ipsius C in triplum eiusdem. Igitur E continet sexies quadratum ipsius C. itaque diuidendo E per C. quotiens G est sextuplus ad C. cui si addatur F. triplus ad eundem C. fiet vtique summa ipsorum F G noncupla ad C. ac proinde quadratus, cùm sit noncuplum quadrati C. Quod demonstrandum erat.

Superest vt moneam, verba illa postrema quæ virgulis inclusimus, γίνεται δὲ δυ δυ &c. à nobis suffecta esse in locum istorum quæ in codice manu exarato corruptissima leguntur. γίνεται δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δ. ϛ. τῆς ἀπὸ τοῦ ςς δυ δυ. ὅθεν τῷ τὸν ... ἐκ τριῶν τὸν ἀπὸ ἐλάσσονος τετράγωνον, καὶ πάντα παρὰ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον. A quibus tamen si quis commodum sensum elicere potuerit, per me licet, vt nostra deleat, & meliora reponat.

QVÆSTIO XIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν ἀριθμὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ςς ε. ςς ιβ. ςς ιγ. καὶ γίνεται δυ λ. ςς ιβ. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ ἔστω δυ λς. καὶ γίνεται ὁ ς β. καὶ τοῦ ς ὄντος μο β. δεήσει καὶ δυ λ. ςς ε. εἶναι τετράγωνον. οὐκ ἔστι δέ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τετράγωνόν τινα ὃς λείψας τὸν λ. ἀριθμόν, παρὰ τὸν λοιπὸν μερισθῇ ὁ ιβ. καὶ ὁ γινόμενος ἀριθμὸς ἐφ' ἑαυτὸν τριακοντάκις καὶ προσλαβὼν τὸν πενταπλασίονα τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος δυ α. [καὶ ἐὰν λείψῃ ἀριθμὸν λ. καὶ παρὰ τὸν λοιπὸν μερισθῇ ὁ ιβ. γίνεται] μο ιβ. ἐν μορίῳ δυνάμεως α. λείψει μο λ. ὁ τετράγωνος γίνεται ρμδ. ἐν μορίῳ δυδυ α. μο ϡ. λείψει δυνάμεων ξ. ταῦτα τριακοντάκις μετὰ τοῦ πενταπλασίονος τῆς

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adsumens alterutrum laterum circa rectum, faciat quadratum. Statuatur triangulum datum specie 5 N. 12 N. 13 N. & fit 30 Q. + 12 N. æquandus quadrato, esto quadrato 36 Q. & fit 1 N. 2. & cùm 1 N. sit 2. oportebit vt etiam 30 Q. + 5 N. sit quadratus. At non est. Itaque eo compellimur, vt inueniamus quadratum aliquem quo multato numero 30. & per residuum diuiso 12. & quotientis quadrato per 30 multiplicato, & adsumente quincuplú sui lateris fiat quadratus. Esto quæsitus quadratus 1 Q. & si inde auferatur 30. & per residuum diuidatur 12, fit 12. denominatione partis 1 Q. - 30. cuius quadratus est 144. denominatione partis 1 QQ. + 900 - 60 Q. Hoc tricies cum quin-

tuplo sui lateris, facit 60 Q. + 2520. sub denominatione parris 1 QQ. + 900 - 60 Q. æquale quadrato, & est pars quadratus. Oportet igitur & 60 Q. + 2520. quadratum esse, hoc est oportet quadratum aliquem ductum in 60. & adsumentem 2520. facere quadratum. Si ergo formantes rectangulum, curauissemus vt 60. adscito 2520. faceret quadratum, soluta esset quæstio. Fit autem 60. ex mutuo ductu laterum circa rectum. At 2520. est solidus contentus sub maiore laterum circa rectum, & sub interuallo laterum circa rectum, & sub area. Eoque res rediit, vt inueniendum sit triangulum rectangulum, vt qui fit mutuo ductu laterum circa rectum adscito solido sub maiore laterum circa rectum, interuallo eorundem, & area contento, faciat quadratum. Et si constituamus maius laterum circa rectum, quadratum numerum, & omnia per ipsum diuidamus, quætemus minus laterum circa rectum additum plano sub area & interuallo laterum circa rectum contento, esse quadratum. Oportet igitur datis duobus numeris, areæ scilicet, & minoris laterum circa rectum, ipsis adinuenire quadratum aliquem, qui ductus in vnum datorum, & adsumens alterum, faciat quadratum. Hæc autem lemmata suprà sunt demon-

ἑαυτοῦ πλευρᾶς γίνεται δυνάμεις ξ. μ° ͵βφκ. ἐν μορίῳ δυναμοδυνάμεως α. μ° ϡ. λείψει δυνάμεων ξ. ἴσον τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μόριον τετράγωνος. καὶ δεήσει ἄρα δυνάμεις ξ. μ° ͵βφκ. εἶναι τετράγωνον. * τουτέστιν δεῖ τετράγωνόν τινα ἑξηκοντάκις γινόμενον, καὶ προσλαβόντα μ° ͵βφκ. ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν οὖν πλάσσοντες τὸ ὀρθογώνιον * κατασκευάσωμεν τὸν ξ. μετὰ τοῦ ͵βφκ. ποιεῖν τετράγωνον. λύσομεν τὸ ζητούμενον. γίνεται δὲ ὁ μὲν ξ. ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. ὁ δὲ ͵βφκ. ἐκ τοῦ στερεοῦ περιεχομένου ἐκ τῆς μείζονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν στερεὸν, τὸν περιεχόμενον ἔκ τε τῆς μείζονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὴν μείζονα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἅπαντα παραβάλωμεν παρ' αὐτὴν, ζητήσομεν τὸν ἐν τῇ ἐλάσσονι τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, μετὰ τοῦ ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, τετράγωνον. * ἀπάγεται εἰς τὸ δύο ἀριθμῶν δοθέντων τοῦ τε ἐμβαδοῦ, καὶ τῆς ἐλάσσονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, * αὐτοῖς ζητεῖν τετράγωνόν τινα, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τῶν δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τὸν ἕτερον ποιῇ τετράγωνον. ταῦτα δὲ λήμματα προεί-

διχθῇ. καὶ ἔστι τὸ ὀρθογώνιον γ. δ. ε. τάσσω αὐτὸν ἐν ςς^{οῖς}, καὶ γίνεται ζητεῖν Δ^Υ ϛ. ςς^{οὺς} δ. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ Δ^Υ ϛ. ςς^{οὺς} γ. ἴσους τετραγώνῳ. καὶ πάλιν ἐὰν ἀπολύσωμεν τὴν μείζονα ἰσότητα γίνεται ὁ ς^ο Μ^ο δ. ἐν μορίῳ Δ^Υ α ⋔ Μ^ο ϛ. ἡ ἄρα δύναμις γίνεται Μ^ο ιϛ. ἐν μορίῳ Δ^Υ Δ α Μ^ο λϛ λεῖψει Δ^Υ ιβ. ἔσται ἄρα δυνάμεως ἑξαπλασίων μετὰ ςς^{ῶν} τεσσάρων. Δ^Υ ιβ. Μ^ο κδ. ἐν μορίῳ Δ^Υ Δ α. Μ^ο λϛ ⋔ Δ^Υ ιβ. δυνάμεις ἄρα ιβ Μ^ο κδ. ὀφείλουσι ἴσαι εἶναι τετραγώνῳ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τετράγωνον, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐλάσσονα τῶν δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον. ἔστι δὲ ὁ κε. ὥστε ἡ δύναμις γίνεται Μ^ο κε. ὁ ἄρα ς^ο ἔσται Μ^ο ε. ζητοῦντες οὖν Δ^Υ ϛ ςς^{οὺς} δ. ἴσους τετραγώνῳ. ποιοῦμεν ἴσον Δ^Υ κε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ^{ιθ}. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον ιβ^{ιθ}. ιϛ^{ιθ}. κ^{ιθ}. καὶ μένει.

strata. Et est rectangulum 3. 4. 5. statuo id in numeris, sitque vt quæram 6 Q. + 4 N. æquales quadrato, & 6 Q. + 3 N. æquales quadrato. Et rursum si absoluamus maiorem æqualitatem, fit 1 N. 4. denominatione partis 1 Q. - 6. ergo quadratus erit 16. denominatione partis 1 QQ. + 36 - 12 Q. Quamobrem sextuplum quadrati adscitis 3 N. erit 12 Q. + 24. denominatione partis 1 QQ. + 36 - 12 Q. Proinde 12 Q. + 24. æquari oportet quadrato. Et res eò rediit vt inueniatur quadratus, qui ductus in minorem datorum, & adsumens maiorem, faciat quadratum. Est autem 25. Quare 1 Q. est 25. & 1 N. 5. Igitur quærentes æquare quadrato 6 Q. + 4 N. æquabimus quadrato 25 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{19}$. Est ergo triangulum $\frac{12}{19}$. $\frac{16}{19}$. $\frac{20}{19}$. & constat.

IN QVAESTIONEM XIII.

MVLTA sunt hîc obseruatu dignissima. Sed cùm tres operationes instituat Diophantus, eas sigillatim percurrendo, omnia dilucidabimus.

In prima operatione sumit quemlibet triangulum datum specie, puta 5 N. 12 N. 13 N. sitque area 30 Q. cui addendo sigillatim latera circa rectum, fiunt 30 Q. + 12 N. & 30 Q. + 5 N. simul æquandi quadrato. Non est autem locus duplicatæ æqualitati, quoniam quadratorum numerus 30. non est quadratus. Quamobrem alio, & sanè mirabili artificio vtitur Diophantus. Sumit enim alterum numerorum quadrato æquandorum, puta 30 Q. + 12 N. quem facit quadrato æqualem. Id autem facillimum est sumendo quemlibet quadratorum numerum quadratum, maiorem quàm 30. vt 36 Q. vnde fit 1 N. 2. & sanè per hunc Numeri valorem resoluendo 30 Q. + 12 N. fit quadratus. Sed vt valida sit æquatio, oportet vt per eundem valorem Numeri resoluendo quoque 30 Q. + 5 N. fiat quadratus. Quod non accidit, nam cùm 1 N. sit 2. quadratus est 4. atque adeo 30 Q. sunt 120. cui addendo 5 N. seu 10. fit 130. qui neutiquam quadratus est.

Necessitas ergo secundæ operationis hinc innotescit. Nam vt æquemus quadrato 30 Q. + 12 N. sumimus aliquem quadratum maiorem quàm 30. à quo auferendo 30. & per residuum diuidendo 12. fit valor Numeri. Quare vt alter

numerus 30 Q. + 5 N. fit æqualis quadrato, oportet vt quotientis illius quadratus tricies sumptus, adscito quincuplo eiusdem quotientis, fiat quadratus. Ponit itaque quæsitum quadratum 1 Q. vnde auferendo 30. fit 1 Q. − 30. per quem diuidendo 12. fit quotiens $\frac{12}{1 Q. - 30}$. huius quadratus est $\frac{144}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. cuius trigecuplum est $\frac{4320}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. cui addendo quincuplum ipsius lateris $\frac{12}{1 Q. - 30}$. puta $\frac{60}{1 Q. - 30}$. fit $\frac{60 Q. + 2520}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. fit autem hæc additio reducendo $\frac{60}{1 Q. - 30}$. ad denominationem alterius numeri cui additur, nempe ducendo 60. in 1 Q. − 30. vnde fit 60 Q. − 1800. quo addito ad 4320. fit numerator fractionis quæ est summa numerorum additorum, puta 60 Q. + 2520. manetque idem denominator, puta 1 QQ. − 60 Q. + 900. Igitur vt consequamur quod hac secunda operatione intenditur, oportet vt $\frac{60 Q. + 2520}{1 QQ. - 60 Q. + 900}$. æquetur quadrato, & quidem denominatorem satis constat esse quadratum, cùm factus sit à latere 1 Q. − 30. Numerator autem restat æquandus quadrato, quod quidem optimè fieret per lemmata ad præcedentem tradita, si summa ipsorum 60. & 2520. esset quadratus, vel si reperiretur quadratus per quem multiplicando vel diuidendo 60. & producto, quotientive addendo 2520. fieret quadratus. Quod cùm fieri non possit, apparet necessitas tertiæ operationis. Sed prius considerandum est vnde prouenaint 60. & 2520. & quidem manifestum est 60. produci ex mutua multiplicatione laterum circa rectum, nempe ex 12. in 5. At 2520. ait Diophantus esse solidum sub maiore laterum circa rectum, sub ipsorum interuallo laterum, & sub area contentum, quod quidem ita se habere non statim apparet. Quare id demonstrandum est. Hoc autem nil aliud est, quàm huiusmodi Theorema.

Datis duobus numeris inæqualibus, & tertio quocunque, si tertius ducatur in quadratum maioris duorum datorum, fit numerus æqualis solido sub tribus datis contento, & solido sub maiore duorum datorum, interuallo eorundem, & tertio dato.

Sint dati numeri A maior & B minor, & tertius quicunque C. ipsorum autem A B. interuallum esto D. & ipsius A quadratus fit E. Quo ducto in C fiat F. Tum ducatur A in B & fiat K. quo ducto in C. fiat G. solidus sub tribus C A B. Ducto autem C in A fiat H. quo ducto in D. fiat L. solidus sub tribus C A D. dico F æqualem esse duobus solidis G L.

F 4320. E 144. D 7.
C 30. A 12. B 5.
G 1800. H 360. K 60.
L 2520.

Nam sumptis tribus numeris A bis, & C semel [1] idem fiet numerus, quouis ordine ij inter se ducantur. At ex A in A fit E. quo ducto in C fit F. ergo idem F fiet ducendo A in C. & productum H in A. Quare ex H in A fit F. solidus item G. sub tribus C A B contentus, fiet ducendo C in A & productum H in B. Quare G fit ex H in B. At ex constructione ex eodem H in D fit solidus L. Cùm ergo B D. simul æquentur ipsi A. [2] numeri G L. producti ex H in ipsos B D. æquabuntur producto ex H in ipsum A. At ex H in A producitur F. vt ostensum est. Igitur solidi G L simul æquantur ipsi F. Quod erat demonstrandum.

[1] 3.1. porism.

[2] 1. secundi.

Hinc porrò sequi quod ait Diophantus manifestum est, si operatio illius diligenter consideretur, & A B statuantur latera circa rectum trianguli, & C ponatur area. Itaque in tertia operatione quærendum est triangulum rectangulum, vt planus contentus sub lateribus circa rectum, adiecto solido sub maiore laterum, interuallo eorundem laterum, & area contento, fit quadratus. Sic autem ratiocinatur Diophantus. Si concipiamus tam planum, quàm solidum supradictum diuidi per maius latus, orietur inde minus latus, hinc verò planus sub area & interuallo laterum contentus. Quare si maius latus ponatur quadratus, sufficiet vt summa minoris lateris, & plani sub interuallo & area contenti, fit quadratus, sic enim ex quadrato in quadratum, fiet quadratus. Igitur oportet constituere triangulum rectangulum, ita vt maius laterum circa rectum fit quadratus, & præterea planus sub interuallo laterum & area contentus, adscito minore latere faciat quadratum, vel certè (quod omisit Diophantus) idem planus per aliquem qua-

dratum diuisus, det quotientem cui adiiciendo minus latus, fiat quadratus. Id autem præstabit, quoduis triangulum per præcedentem inuentum, nam & maius laterum, circa rectum erit quadratus, & ipsum interuallum laterum, quadratus erit; & area adscito minore latere faciet quadratum. Quare cùm planus sub area & interuallo laterum contentus, diuidetur per quadratum illum qui est interuallum laterum, quotiens fiet ipsa area quæ adsciscens minus latus faciet quadratũ ex hypothesi; ac proinde per lemma quod vltimum attulimus ad præcedentem, planus sub area & interuallo laterum contentus, adsciscens minus latus, infinitis modis æquari poterit quadrato.

Hæc ad integram quæstionis huius intelligentiam dicta sufficerent. Sed libet præterea in tyronum gratiã, tertiam Diophanti operationem, quam ille breuiter perstrinxit, fusius explicare. Sumo triangulum per præcedentem inuentum, & constituo illud in Numeris, puta 5 N. 4 N. 3 N. fitque area 6 Q. cui addendo sigillatim latera circa rectum, fiunt 6 Q. + 4 N. & 6 Q. + 3 N. æquandi quadrato. Quare per ea quæ diximus de necessitate secundæ operationis, oportet inuenire quadratum, à quo auferendo 6. & per residuum diuidendo 4. fiat quotiens, cuius quadratus sexies sumptus, & adsumens triplum sui lateris faciat quadratum. Quadratus ille esto 1 Q. hic dempto 6. & per residuum diuidendo 4. fit $\frac{4}{1 Q. - 6}$. cuius quadratus $\frac{16}{1 QQ. - 12 Q. + 36}$. cuius sextuplum $\frac{96}{1 QQ. - 12 Q. + 36}$. cui addendo triplum lateris, puta $\frac{12}{1 Q. - 6}$. vel sub eadem denominatione $\frac{12 Q. - 72}{1 QQ. - 12 Q. + 36}$ fit vtique summa $\frac{12 Q. + 24}{1 QQ. - 12 Q. + 36}$. quam æquare oportet quadrato, & cùm denominator sit quadratus, superest vt æquemus quadrato numeratorem 12 Q. + 24. Quod facilè fit quia 12. & 24. simul efficiunt quadratum 36. & vtendum lemmate quod ad præcedentem attulit Diophantus. Quia enim quadratus quæsitus debet esse maior quàm 6. (vt æquari possit 6 Q. + 4 N.) oportet quærere quadratum maiorem quàm 6. qui ductus in 12. & adsumens 24. faciat quadratum sit eius latus 1 N. + 1. fiet quadratus ductus in 12. & adsumens 24. 12 Q. + 24 N. + 36. cuius latus esto 6 + 3 N. fit 1 N 4. Ergo latus quadrati est 5. ipse quadratus 25. Quare 6 Q. + 4 N. æquantur 25 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{19}$. estque triangulum quæsitum $\frac{12}{19}$. $\frac{16}{19}$. $\frac{20}{19}$. fitque area $\frac{96}{361}$. cui addendo sigillatim latera circa rectum, fiunt quadrati $\frac{324}{361}$. & $\frac{400}{361}$. à lateribus $\frac{18}{19}$. & $\frac{20}{19}$. Possunt autem infinitæ dari solutiones, vtendo eodem triangulo 3. 4. 5. Quia per lemma præcedentis loco 25. inueniri possunt alij infiniti quadrati, verbi gratia si numeri 12 Q. + 24 N. + 361. ponas latus 6 − 4 N. fiet 1 N. 18. eritque latus quadrati 19. ipse quadratus 361. Quare 6 Q. + 4 N. æquabitur 361 Q. & fiet 1 N. $\frac{4}{355}$. erunt igitur latera trianguli $\frac{12}{355}$. $\frac{16}{355}$. $\frac{20}{355}$. Area $\frac{96}{126025}$. cui addendo latera circa rectum, fiunt quadrati $\frac{4356}{126025}$. & $\frac{5776}{126025}$. à lateribus $\frac{66}{355}$. & $\frac{76}{355}$.

Cæterùm moneo, casu accidere in hypothesi Diophanti, vt planus sub lateribus, puta 12. adsumens 24. solidum sub maiore laterum, interuallo laterum & area contentum, faciat quadratum, quod accidit quia interuallum laterum 3. & 4. est vnitas; sed si aliud sumatur triangulum præcedenti satisfaciens, id non continget. Quare vt vniuersalis reddatur operatio Diophanti, in alio triangulo libet rem experiri. Sumatur triangulũ per præcedentẽ inuentum 363 N. 484 N. 605 N. fiet area adsumens sigillatim latera circa rectũ 87846 Q. 484 N. & 87846 Q. + 363 N. & vtrũque oportet æquare quadrato. Quare inueniendus est quadratus à quo detrahẽdo 87846. & per residuum diuidendo 484. fiat quotiens, cuius quadratum ducendo in 87846. & producto addendo quod fit ex eodem quotiente in 363. fiat quadratus. Et vt rem compendio absoluam, eò redactus ero vt æquem quadrato 175692 Q. + 5144613144. & numerus quadratorum est planus sub lateribus circa rectũ 484.. & 363. contentus. At numerus vnitatum est solidus sub maiore latere 484. sub interuallo laterum 121. & sub area 87846. contentus. Porro vtriusque numeri summa minimè quadratum facit. Sed quia quadrato per quadratum diuiso fit quadratus, diuido vtrumque numerum per maius laterum circa rectum, puta per 484. qui quadratus est ex lege præcedentis, & fit 363 Q. + 10629366. æquandus quadrato. Vbi quoque quadratorum & vnitatum numeri simul additi non conficiunt

qua-

quadratum. Sed quia quadratotum numerus 363. est minus laterum circa rectum, at vnitates 10629366. conficiunt planum sub area 87846. & sub interuallo laterum 121. (qui quadrarus est ex lege praecedentis) & summa areæ & minoris lateris, conficit etiam quadratum ex eiusdem praecedentis lege. Patet cùm 363. & 87846. simul faciant quadrarum, si quadratus 121. ducatur in vtrumque, & productorum summam fore quadratum, at ex 121. in 87846. fit 10629366. vt dictum est. Igitur si & 121. ducatur in 363. & producto adiiciatur 10629366. fit quadratus. Quare per lemma praecedentis à nobis ampliatum 363 Q. + 10629366. infinitis modis æquari poterit quadrato, sic autem æquari debet quadraro, vt valor quadrati excedat 87846. quia quadratus ille æquari debet 87846 Q. + 484 N. Ponatur ergo quadrati latus 1 N. + 11. fiet ipse 121 + 22 N. + 1 Q. Quo ducto in 363. & producto addendo 10629366. fit 10673289 + 7986 N. + 363. Q. æquandus quadrato, & facilè fit, quia vnitates sunt quadratæ. Ponatur ergo latus illius 3267 + 19 N. fiet 1 N. 58080. cui addendo 11. fit latus quadrati 58099. ipse quadratus 3374564281. Igitur 87846 Q. + 484 N. æquabimus 3374564281 Q. & fiet 1 N. $\frac{4}{27888235}$. per quem resoluendo latera trianguli quæ posita erant 363 N. 484 N. 605 N. fiet quæsitum triangulum $\frac{1452}{27888235}$. $\frac{1936}{27888235}$. $\frac{2420}{27888235}$. eius area est $\frac{1405536}{777753651415225}$. Quæ adsumens sigillatim latera circa rectum, facit quadratos $\frac{40495122756}{777753651415225}$. & $\frac{53993028496}{777753651415225}$. quorum latera $\frac{201234}{27888235}$. & $\frac{232364}{27888235}$.

Superest vt moneam loco verborum quæ primò asteriscis inclusimus, legi in codice manuscripto: καὶ ἔστιν ὁ ξ. ἐκ τετραγώνου τινὸς δυνάμει ἑξαπλασίαι γενόμενον, καὶ προσλαβόντα μονάδας φμ. καὶ ποιεῖ τετράγωνον. ἐὰν οὖν ἐλάσσω τῶν ὀρθογωνίῳ κατασκευάσομεν, &c. Secundo verò loco legebatur, ἀπάγεται εἰς τὸ β. ἀριθμοὺς ὄντας τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τὸν ἐκ αὐτῆς ζητεῖν, &c.

QVÆSTIO XIIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus alterutro laterum circa rectum, faciat quadratum. Rursum si constituamus id datum specie sicut in præcedente, eò res redit vt inueniendum sit triangulum rectangulum simile huic 3. 4. 5. Ponatur ergo in numeris, & fit 3 N. 4 N. 5 N. Et 6 Q. − 4 N. æquantur quadrato. Et si statuamus quadratum minorem quàm 6. fiet 1 N. 4 sub denominatione partis excessus quo 6. superat quadratum aliquem. Et si ponamus quadratum 1 Q. opus erit tali existente numero, æquare etiam quadrato 6 Q. − 3 N. & 1 Q. sexies sumptus est 96.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμὸς λείψας ἕνα τῶν ἐν ἑκατέρα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει ὁμοίως τῷ περὶ τούτου ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅμοιον τῷ γ. δ. ε. τετάχθω οὖν ἐν ἀριθμοῖς, καὶ γίνεται ἀριθμῶν γ. ἀριθμῶν δ. ἀριθμῶν ε. καὶ δεῖ ς. λεῖψει ςς δ. ἴσους τετραγώνῳ. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὸν τετράγωνον, ἐλάττονα δυνάμεων ς. ἔρχεται ὁ ς μο δ. ἐν μορίῳ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ ς. τετραγώνου τινός. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὸ τετράγωνον δυν α. γίνεται τηλικούτου ὄντος τοῦ ς δεῖ ς ↑ ςς γ. ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ. ἀλλ' ἡ μὲν δύναμις ἑξάκις ἐστὶ μο λς:

ἐν μορίῳ δ^ν δ^ν α μονάδες λϛ λείψει ἀρ. ιβ. τῆς δὲ πλευρᾶς τριπλασίων μ ιβ. ἐν μορίῳ μ ϛ. λείψει δ^ν α. τουτέστι μ οβ. λείψει δ^ν ιβ. ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ καὶ ἐὰν ταῦτα ἀφέλωμεν ἀπὸ μ ϟϛ. ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ λοιπαί εἰσι δ^ν ιβ. μ κδ. ἐν μορίῳ δ^ν δ^ν α. μ λϛ. λείψει δ^ν ιβ. καὶ ἔστι τὸ μόριον τετράγωνον. ὥστε καὶ δεῖ δ^ν ιβ. μ κδ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ καὶ ἔστιν ὁ ς μ α. πάσσω οὖν δ^ν ϛ. λείψει ςς δ. ἴσον δ^ν α. καὶ γίνεται ὁ ς μ δ^ε. ἔσονται οὖν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου πλευραὶ ιβ^ε. ιϛ^ε. δ. καὶ ἐὰν μὴ θέλῃς χρήσασθαι τῇ μονάδι. τάξον τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ς α. μ α. ὥστε ὁ τετράγωνος τρίς, καὶ μονάδες ϛ. ποιοῦσι δ^ν γ. ςς ϛ. μ θ. καὶ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ποιεῖν ῥᾴδιόν ἐστι, καὶ εὑρεθήσεται ὁ ς οὐ μείζων ιγ^ϛ. ἡ δὲ τοῦ τετραγώνου πλευρά, ἡ ἐστιν ς α. μ α. ἔσται οὐ μείζων κβ^ϛ. καὶ ὁ ἀπὸ τούτων τετράγωνος ἀρθεὶς ἀπὸ μ ϛ. ποιεῖ ς ῥητόν.

ſub denominatione partis 1 QQ. + 36 − 12. Q. lateris autem triplum eſt 12. ſub denominatione partis 6 − 1 Q. hoc eſt 72 − 12 Q. ſub denominatione partis eiuſdem, & ſi hoc auferamus à 96. ſub denominatione eiuſdem partis, relinquuntur 12 Q. + 24. ſub denominatione partis 1 QQ. + 36 − 12 Q. & eſt pars quadratus. Proinde oportet æquare quadrato 12 Q. + 24. & eſt 1 N. 1. Pono igitur 6 Q. − 4 N. æquales 1 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$. Erunt igitur quæſiti rectanguli latera $\frac{12}{5}$. $\frac{16}{5}$. 4. & ſi nolis vti vnitate, ſtatue quadrati latus 1 N. + 1. Itaq; triplũ quadrati adſcito 6. fit 3 Q. + 6 N. + 9. æquandus quadrato. Hoc autem facile eſt, & inuenietur 1 N. non maior quàm $\frac{13}{6}$. At quadrati latus quod eſt 1 N. + 1. non erit maius quàm $\frac{22}{6}$. Et inde ortus quadratus ſublatus de 6. faciet numerum rationalem.

IN QVAESTIONEM XIIII.

Ex adnotatis ad præcedentem, omnium quæ hîc aguntur rationem reddere facillimum eſt. Mirum fortaſſe alicui videre poſſit, cùm in hac quæſtione vtendum ſit ſubtractione loco additionis qua vtendum erat in præcedente, cur tamen ad extremum maneat idem numerus 12 Q. + 24. æquandus quadrato. Huius autem ſymptomatis cauſa eſt, contrarietas additionis & ſubtractionis vnà cum admixtione contrariorum ſignorum pluris & minoris. Nam in præcedente oportebat addere 12 Q. − 72. ad 96. in hac autẽ oportet de 96. ſubtrahere 72 − 12 Q. Quare euidens eſt, & ſummam illam, & hoc reſiduum, eundem efficere numerum, puta 12 Q. + 24. vnde ſatis apparet demonſtrationes ad præcedentem allatas, & hîc locum habere.

Cæterùm cùm ad æquandum quadrato 12 Q. + 24. oporteat quærere quadratum qui ductus in 12. & adſumens 24. faciat quadratum, ſumit Diophantus pro huiuſmodi quadrato vnitatem, quod fieri poſſe docuimus ad duodecimam, quia 12. & 24. ſimul conficiant quadratum, & quia talis quadratus ſumendus eſt minor quàm 6. vt æquari poſſit 6 Q. − 4 N. ſic poſito quod 6 Q. − 4 N. æquentur 1 Q. fit 1 N. $\frac{4}{5}$. & ſunt latera quæſiti trianguli $\frac{12}{5}$. $\frac{16}{5}$. 4. eſtque area $\frac{96}{25}$. vnde auferendo ſigillatim latera circa rectum, ſuperſunt quadrati $\frac{36}{25}$. & $\frac{16}{25}$.

Quod autem ad extremum, ait Diophantus, loco vnitatis, ſumi poſſe alium quadratum, verum eſt implorando auxilium lemmatis ad duodecimam allati. Id

tamen cautè agendum, quia quadratus ille debet esse minor quam 6. Quare sic ratiocinatur Diophantus. Imprimis loco 12 Q. + 24. sumit 3 Q. + 6. cuius rei duplex assignari potest causa. Prima est quod ipsius 12 Q. + 24. sumit quadrantem 3 Q. + 6. suo more, vt rem in minimis conficiat, & euidens est si 3 Q. + 9. æquetur quadrato, fore vt & eius quadruplum 12 Q. + 24. fit quadratus. Secunda causa, quæ mihi magis arridet pendet ex dictis ad duodecimam. Quia enim 12. est planus sub lateribus trianguli per duodecimam inuenti, at 24. est solidus sub maiore laterum, sub interuallo eorundem, & sub area contentus, diuidendo vtrumque per maius laterum circa rectum, puta 4. (qui est quadratus ex lege duodecimæ) fiunt numeri 3. & 9. Quorum prior est minus laterum circa rectum, posterior est planus sub area & interuallo laterum, quare hoc diuiso per interuallum laterum (quod etiam æquatur quadrato ex lege duodecimæ) oritur ipsa area, quæ rursus per duodecimam adscito minore latere facit quadratum. Quamobrem ex vltimo lemmate quod ibidem attulimus, constat 3 Q. + 6. æquari posse infinitis modis quadrato. Ponatur eius latus 1 N. + 1. erit quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. quo ducto in 3. & producto addendo 6. fit 3 Q. + 6 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus fingetur 3 − certo Numerorum numero, sed quia quæsitus quadratus debet esse minor quàm 6. cùm latus proximum ipsius 6. fit $\frac{22}{9}$. oportet latus quadrati quæsiti esse minus quàm $\frac{22}{9}$. Quare cùm ponatur hoc latus 1 N. + 1. si à $\frac{22}{9}$. auferas vnitatem, remanet $\frac{13}{9}$. quo patet minorem esse debere 1 N. Proinde cùm æquandò quadrato 3 Q. + 6 N. + 9. debeat fieri valor Numeri, à quodam quadrato multato ternario, diuidente sextuplũ sui lateris auctum senario, si ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. fiet $\frac{6 N. + 6}{1 Q. - 13}$. minor quàm $\frac{13}{9}$. & tandem fit 54 N. + 54. minor quàm 13 Q. Qua æquatione, vt par est, per approximationem resoluta, fit 1 N. maior quàm 5 $\frac{1}{13}$. Quare numerus Numerorum in latere fictitio ponendus excedere debet 5 $\frac{1}{13}$. Ponatur verbi gratia latus illud 3. − 6 N. fiet 1 N. $\frac{14}{11}$. Quare latus quadrati quæsiti, quod positum erat 1 N. + 1. erit $\frac{25}{11}$: ipse quadratus $\frac{625}{121}$. Proinde 6 Q. − 4 N. statuemus æqualem $\frac{625}{121}$ Q. & fiet 1 N. $\frac{484}{101}$. Quamobrem erit quæsitum triangulum $\frac{1452}{101}$. $\frac{1936}{101}$. $\frac{2420}{101}$. fit area $\frac{1405536}{10201}$. vnde auferendo sigillatim latera circa rectum, manent $\frac{1258884}{10201}$. & $\frac{1210000}{10201}$. quadrati à lateribus $\frac{1122}{101}$. & $\frac{1100}{101}$.

Quod si lubeat vti triangulo 363 N. 484 N. 605 N. fient æquales quadrato 87846 Q. − 484 N. & 87846 Q. − 363 N. & ductum Diophanti sequentes, tandem inueniemus 175692 Q. + 5144613144. æqualem quadrato, & omnia diuidendo per 484. maius laterum circa rectum, quod est quadratum, fiet 363 Q. + 10629366. æqualis quadrato. Quod fieri potest infinitis modis, quia ducendo in 363. quadratum 121 (interuallum scilicet laterum circa rectum) & producto addendo 10629366. fit quadratus. Quia verò oportet quadratum quæsitum minorem esse quàm 87846. sumemus ipsum 121. vel inueniemus alium eodem quo suprà artificio. Quod si sumamus 121. fiet 87846 Q. − 484 N. æqualis 121 Q. vnde fit 1 N. $\frac{4}{725}$. Sunt ergo quæsiti trianguli latera $\frac{1452}{725}$. $\frac{1936}{725}$. $\frac{2420}{725}$. estque area $\frac{1405536}{525625}$. à qua detrahendo sigillatim latera circa rectum, manent quadrati $\frac{352836}{525625}$. & $\frac{1936}{525625}$. quorum latera $\frac{594}{725}$. & $\frac{44}{725}$.

QVÆSTIO XV.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ tam hypotenusa quàm altero laterum circa rectum detracto, faciat quadratum. Esto triangulum datum specie 3 N. 4 N. 5 N. & rursus oportet quærere

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λειφθεὶς ἐν ἑκατέρᾳ τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ἀριθμῶν γ. ἀριθμῶν δ. ςς ε. καὶ πάλιν γίνεται ζητεῖν

δ^υ ϛ̄ ⋔ ςς ε̄. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ δ^υ ϛ̄ λεῖψει ςς γ̄. ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ἐὰν ποιήσω δ^υ ϛ̄ ⋔ ςς γ̄ ἴσα τετραγώνῳ, γίνεται ὁ ς μ^ο γ̄. ἐν μορίῳ μ^ο ϛ̄ ⋔ δ^υ ᾱ. καὶ τοιούτου εὑρεθέντος αἱ δυνάμεις ἕξ γίνονται μ^ο νδ̄ ἐν μορίῳ δ^υδ^υ ᾱ μ^ο λϛ̄ ⋔ δ^υ ιβ̄. καὶ δεῖ ἀπὸ μ^ο νδ̄. ἐν μορίῳ δ^υδ^υ ᾱ. μ^ο λϛ̄ ⋔ δ^υ ιβ̄. ἀφελεῖν μ^ο Ϟ ⋔ δ^υ ιε̄ ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ λοιπὰ ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μόριον τετράγωνος. ὥστε καὶ δ^υ ιε̄ λεῖψει μ^ο λϛ̄. ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ αὕτη μὲν ἡ ἰσότης ἀδύνατός ἐστι διὰ τὸ τὸν ιε̄ μὴ διαιρεῖσθαι εἰς δύο τετραγώνους. οὐ πάντως δὲ τὸ ἐξ ἀρχῆς ἀδύνατόν ἐστι. δέον οὖν διορίζεσθαι περὶ τοῦ τριγώνου. γεγόνασι γὰρ αἱ μὲν δυνάμεις ιε̄. ἔκ τινος τετραγώνου ἐλάσσονος τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. αἱ δὲ ἐν λεῖψει μ^ο λϛ̄. ἐκ τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου ἔκ τε τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τῆς εἰρημένης τῶν ὀρθῶν· καὶ ἀπῆκται εἰς τὸ πρότερον εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ ἐμβαδοῦ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν λεῖψει τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου, ἔκ τε τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ τῆς εἰρημένης τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τὴν εἰρημένην τῶν περὶ τὴν ὀρθήν,

6 Q. - 5 N. æqualia quadrato, & 6 Q. - 3 N. æqualia quadrato. Et si fecero 6 Q. - 3 N. æqualia quadrato, fit 1 N. 3. sub denominatione partis 6 - 1 Q. & tali inuento numero, 6 Q. fiunt 54. sub denominatione partis 1 QQ. + 36 - 12 Q. & oporret à 54. sub denominatione partis 1 QQ. + 36. - 12 Q. auferre 90 - 15 Q. sub denominatione eiusdem partis, & reliqua æqualia facere quadrato. Et pars quidem quadratus est. Ergo etiam 15 Q. - 36. æquanda sunt quadrato. Atque hæc quidem impossibilis est æquatio, quia 15. in duos non diuiditur quadratos. Non autem omnino impossibile est quod initiò erat propositum. Oportet ergo determinare de triangulo. Facti sunt enim 15 Q. ex quodam quadrato minore quàm areæ numerus, ducto in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum. At quæ desunt vnitates 36. fiunt ex solido contento sub area, & vno laterum circa rectum, & interuallo quo hypotenusa superat idem latus. Eò itaque res deducta est, vt prius oporteat inueniri triangulum rectangulum, & quadratum numerum minorem area, vt quadratus ductus in productum ex hypotenusa in vnum laterū circa rectum, detracto solido contento sub area, prædicto latere, & interuallo quo hypotenusa superat idem latus,

faciat quadratum. * Factum esse ex duplo producti eorum, & omnia diuidamus per productum ex hypotenusa in prædictum latus, quæremus rursus alium quendam quadratũ, quo ducto in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum in primum latus interualli quadratum. * Et si statuamus eos à quibus triangulum effingetur, planos similes, dissoluemus quæstionem. Formetur triangulum abs 4. & 1. At quadratus, vt minor sit numero areæ, esto 36. & formans triangulum statuo illud in numeris 8 N. 15 N. 17 N. & fit numerus areæ detracto vno laterum circa rectum 60 Q. - 8 N. Hæc æquantur 36 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Ad positiones. Erit triangulum $\frac{8}{3}$. $\frac{15}{3}$. $\frac{17}{3}$. & manet.

[ποιῇ τετράγωνον] * γεγενῆσθαι ἐκ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν, καὶ πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν ∟ ζητήσομεν πάλιν ἄλλόν τινα τετράγωνον πολλὴν ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν ∟ ἐμβαδοῦ. ἐπὶ τὸν πρώτην τῆς ∟ ὑπεροχῆς τετραγώνων. * καὶ ἐὰν τάξωμεν τοὺς πλάσσοντας τὸ ὀρθογώνιον ὁμοίους εἶναι ἐπιπέδους διαλύσομεν τὸ ζητούμενον. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ μο δ. καὶ μο α. ὁ δὲ τετράγωνος ἔστω, ἵνα ἐλάσσων ᾖ τοῦ ἐμβαδοῦ, μο λϛ. καὶ πλάσσων τὸ τρίγωνον, πλάσσω αὐτὸ ἐν ϛϛ. ἔσται ϛϛ η. ϛϛ ιε. ϛϛ ιζ. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ λείψας τῆς μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δυ ξ. λείψει ϛϛ η. ταῦτα ἴσα δυ λϛ. καὶ γίνεται ὁ ϛ μο α γ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον η γ. ιε γ. ιζ γ. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XV.

Hic quod attinet ad primam operationem, cùm ea similis sit omnino operationis duarum præcedentium, nihil est quod nos moretur. Quod autem ait Diophantus 36. esse solidum contentum sub area, vno laterum circa rectum, & interuallo inter hoc & hypotenusam, idem est protsus cum theoremate ad decimam tertiam demonstrato. Denique quod ait 15 Q. - 36. æquari non posse quadrato quia 15. non diuiditur in duos quadratos, pendet ab iis quæ mox ostensuri sumus. Necessitas autem secundæ operatioois euidenter colligitur ex defectu prioris. Nam ad hoc vt 15 Q. - 36. possit æquari quadrato, oportet inuenire quadratum quo ducto in 15. & à producto auferendo 36. maneat quadratus. Et cùm quadratus inueniendus æquari debeat 6 Q. - 4 N. curandum est, vt sit minor numero areæ 6. Quia ergo 15. est planus sub hypotenusa & altero laterum, at 36. est solidus sub area, prædicto latere, & interuallo inter idem latus & hypotenusam, euidens est quærendum esse triangulum, & quadratum minorem area trianguli, vt quadrato ducto in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, fiat numerus à quo detrahendo solidum sub area, prædicto latere, & interuallo inter idem latus & hypoteousam, relinquatur quadratus.

Equidem triangulum fingendum esse ait Diophantus à duobus numeris qui sint plani similes, sed qua ratione id colligat, & vnde sumendus sit quadratus, non constat ex corruptissimis illius verbis quæ ideirco asteriscis inclusimus more nostro. Quorum tamen defectum vt ego suppleam, pronũcio, quadratum illum, eum esse qui fit ex quadrato interualli dictorum planorum similium, in quadra-

tum qui fit ex mutua eorundem multiplicatione. Quod vt demonstrem, & simul rei obscurissimæ lucem afferam, aliqua prius suppono.

Primùm suppono, in quolibet triangulo efficto per methodum à Diophanto traditam, quamque demonstrauimus propositione quinta lib. tertij poris. hypotenusã superare quadrato numero, latus illud quod fit bis ex mutua multiplicatione numerorum à quibus effictum est triangulum. Quod euidens est, quia hypotenusa est summa quadratorum, à qua si auferatur duplum multiplicationis laterum, superest quadratus interualli laterum per quartam secũdi porismatum.

Secundo suppono, interuallum duorum quadratorum esse maius quadrato interualli laterum, quod ipsum iam demonstrauimus ad sextam secundi.

Tertiò suppono, in triangulo efficto à duobus planis similibus, si excessus hypotenusæ super latus illud quod æquatur interuallo laterum, ducatur in alterum latus, fieri quadratum. Sint enim plani similes

H 16.
A 8. B 2.
C 64. D 4.
E 68. F 60. G 32.
K 8. L 256.

A B. quorum quadrati C D. quorum summa E. interuallum F. tum ex A in B fiat H. cuius duplum G.[1] eritque E F G. triangulum rectangulum. Sit ergo K excessus E super F. & ducto K in G. fiat L. dico L esse quadratum. Quia enim A B sunt plani similes,[2] erit H quadratus. Et quia E est summa duorum C D. At F. est eorundem interuallum, detracto F ex E,[3] reliquus K erit duplus ipsius D. Cùm ergo G. K. sint dupli quadratorũ H D. sequitur G ad K habere rationem quadrati ad quadratum,[4] ac proinde G K sunt plani similes,[5] & productus ex eorum mutuo ductus, puta L. quadratus est. Quod demonstrandum erat.

5.3. poris. · 1. noni. · 23.1. poris. · 26. octaui. · 1. noni.

His positis, totũ quod supponitur à Diophanto, sic demõstrabitur. Sint plani similes

A 4. B 1.
F 16.
C 17. D 15. E 8.
G 9. H 36. K 4.
L 136. M 60. N 120.
P 4896. Q 4320. R 480.

A B. à quibus fingatur triangulum C D E. ita vt E sit duplum quadrati K. qui fit ex A in B. At D sit interuallum quadratorum ab ipsis A B. Ductoque K in D. fiat area M. Rursus interuallum ipsorum C E. sit G. quadratus per primum suppositum. quo ducto in quadratum K fiat quadratus H. Item ducto C in E fiat L. quo ducto in H fiat P. & rursus ducto E in M. fiat R. quo ducto in G. fiat Q. Dico si Q. solidus sub area M. altero laterum circa rectum E, & sub G interuallo inter idem latus & hypotenusam, auferatur ab ipso P. qui fit ex quadrato H in L planum sub hypotenusa C & prædicto latere E contentum, residuum esse quadratum, & ipsum quadratum H esse minorem area M. ac denique ipsum L componi ex duobus quadratis. Primùm sic ostendo. Ex E in D producatur N. & ex interuallo ipsorum C D. in E. fiat F quadratus per tertium suppositum. Tum consideratis tribus numeris D E K. Quia ex D in K fit M. quo ducto in E fit

3.1. poris. R,[6] fiet idem R. si E ducatur in D. & productus N in K. Igitur R fit ex N in K. Rursus eadem de causa consideratis tribus G K N. Quia ex K in N. fit R vt ostensum est, & ex R in G fit solidus Q. idem Q. fiet ducto K in G. & producto H in N. Igitur Q. producitur ex H in N. At per constructionem ex eodem H in L. fit P. Ergo P. superat Q. numero qui fit ex H in interuallum ipsorum L N. Atqui cùm ex eodem E in ipsos C D. fiant L N. patet etiam L superare N. numero qui fit ex E. in interuallum ipsorum C D, hoc est quadrato F. Igitur P. superat Q. producto ex H in F. sed hic productus est quadratus, cùm vterque H F quadratus sit. Ergo P. superat Q. quadrato numero; quod erat intentum. Deinde quadratum H minorem esse area M. probatur. Etenim cùm ex eodem K in ipsos G D. producantur H M, & D sit maior quàm G per secundum suppositum, constat & ipsum M maiorem esse quàm H. Quod erat propositum.

Denique L componi ex duobus quadratis constat ex septima tertij porismatum, quia scilicet producitur ex C in E quorum vterque componitur ex duobus quadratis, puta C ex quadratis ipsorum A B. At E ex duplo quadrati K. vnde etiam per Scholium propositionis citatæ apparet ipsum L componi tan-

tum semel ex duobus quadratis, quia E non componitur ex quadratis inæqualibus. Sunt autem quadrati ex quibus L componitur, ipse H qui fit ex K in G. & quadratus qui fit ex eodem K in quadratum summæ amborum A B.

Ex his sanè quæ eum incredibili labore commenti sumus, causa omnium quę peragit Diophantus fit manifesta. Reliqua operatio nil habet difficultatis, cùm sit penitus similis operationi duarum præcedentium. Eam tamen in studiosorum gratiam non pigebit adiicere. Formatur triangulum à 4. & 1 & constituitur specie, puta 17 N. 15 N. 8 N. fit area multata tum hypotenusa, tum latere tertio 60 Q. − 17 N. & 60 Q. − 8 N. Quare vtrumque æquare oportet quadrato, quod si 60 Q. − 8 N. æquemus quadrato, quærendus erit quadratus quem auferendo à 60. & per residuum diuidendo 8 fiat quotiens cuius quadratum ducendo in 60. & à producto auferendo quod fit ex 17. in supradictum quotientem, remaneat quadratus. Esto quæsitus quadratus 1 Q. hunc auferendo à 60. & per residuum diuidendo 8. fit quotiens $\frac{8}{60 - 1 Q.}$ cuius quadratus $\frac{64}{3600 - 120 Q. + 1 QQ.}$ quo ducto in 60. fit $\frac{3840}{3600 - 120 Q. + 1 QQ.}$ vnde si auferas productum ex 17. in $\frac{8}{60 - 1 Q.}$ puta $\frac{136}{60 - 1 Q.}$ seu sub eadem denominatione $\frac{8160 - 136 Q.}{3600 - 120 Q. + 1 QQ.}$ remanet $\frac{136 Q. - 4320}{3600 - 120 Q. + 1 QQ.}$ æquandus quadrato. Quare cum denominator sit quadratus, superest vt numerator 136 Q. − 4320. æquetur quadrato, quod facilè fit, quia ex supra demonstratis quadrato 36. ducto in 136. & à producto auferendo 4320. remanet quadratus. Est ergo 1 Q. 36. Quamobrem 60 Q. − 8 N. æqualis erit 36 Q. & fiet 1 N. $\frac{1}{3}$. erunt igitur trianguli latera $\frac{8}{3}$. $\frac{15}{3}$. $\frac{17}{3}$. fit area $\frac{60}{9}$. vnde auferendo tum $\frac{8}{3}$. tum $\frac{17}{3}$. remanent quadrati $\frac{36}{9}$. seu 4. & $\frac{9}{9}$. seu 1.

Cæterùm quæstio infinitas recipit solutiones, tum quia loco ipsorum 4. & 1. sumi possunt quilibet alij plani similes à quibus effingatur triangulum. Tum quia sumptis iisdem 4 & 1. inueniri possunt infiniti quadrati loco ipsius 36. vel minores ipso 36. vel etiam maiores, qui tamen non excedant aream 60. quibus ductis in 136. & de producto auferendo 4320. relinquatur quadratus, vt docebimus ad sequentem.

QVÆSTIO XVI.

DATIS duobus numeris, si aliquo quadrato in vnum eorum ducto, & altero de producto subtracto, fiat quadratus: inuenietur & alius quadratus maior quadrato prius sumpto, qui hoc idem præstet. Dentur duo numeri 3. & 11. & quadrato aliquo, putà à latere 5. ducto in 3. & à producto detracto 11. fiat quadratus à latere 8. Oporteat inuenire alium quadratum maiorem quàm 25. qui hoc ipsum præstet. Esto latus quadrati 1 N. + 5. fit quadratus 1 Q. + 10 N. + 25. Huius triplum dempto 11. fit 3 Q. + 30 N. + 64. æquale quadrato; sit eius latus 8 −

ΔΥΟ ἀριθμῶν δοθέντων, ἐὰν τετράγωνός τις πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα αὐτῶν καὶ λείψας τὸν ἕτερον, ποιῇ τετράγωνον. εὑρίσκεται καὶ ἕτερος τετράγωνος μείζων τοῦ προειρημένου τετραγώνου, ὃς τὸ αὐτὸ ποιῇ. δεδόσθωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅ τε γ. καὶ ὁ ια. καὶ τετράγωνός τις ὁ ἀπὸ τοῦ ε. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν γ. καὶ λείψας τὸν ια. ποιείτω τετράγωνον, τὸν οἷον ἀπὸ πλευρᾶς μο η. δέον ἔστω ζητεῖν ἕτερον τετράγωνον μείζονα τοῦ κε. τὸ αὐτὸ ποιοῦντα. ἔστω ἡ τετραγώνου πλευρὰ ς α μο ε. ὁ τετράγωνος γίνεται δυ α ςς ι μο κε. ταῦτα τρὶς ↑ μο ια. γίνονται δυ γ ςς λ μο ξδ. ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς μο η

ϒ ςς β. καὶ γίνεται ὁ ς' μ° ξβ. ἔσται ἄρα ἡ πλευρὰ μ° ξζ. ὁ τετράγωνος ,δυπθ. καὶ οὗτος ποιεῖ τὸ ἐπιταχθέν.	2 N. & fit 1 N. 62. Eſt ergo latus 67. quadratus 4489. qui præſtat imperata.

IN QVAESTIONEM XVI.

Hic omnia ſuot perſpicua. Cæterùm quod vult Diophantus quadratum quæſitum maiorem eſſe quadrato expoſito, id agit ob ſequentem quæſtionem, in qua tale quid poſtulatur, & ad quem hæc eſt veluti lemma. Sed hoc non eſt ſic accipiendum, quaſi verò ſimili ſere operatione, non poſſimus etiam inuenire quadratum minorem. Sint enim iidem 3. & 11. dati oumeri, & quadratus 25. ductus in 3. faciat 75. vnde auferendo 11. ſuperſit quadratus 64. volo reperire alium quadratum minorem ipſo 25. qui hoc idem præſtet. Ponolatus eius 5 − 1 N. erit quadratus 25 − 10 N. ⊹ 1 Q. quo ducto in 3. & ex producto auferendo 11. ſupereſt 64 − 30 N. ⊹ 3 Q. æqualis quadrato. cuius latus ita fingendum eſt, vt fiat 1 N. minor quàm 5. fiet autem 1 N. pooendo latus fictitium 8 − tot Numeris, de quorum quadrato auferendo 3. per reſiduum diuidetur ſedecuplum ipſorum Numerorum multatum numero 30. Quare ſi pooatur quæſitus Numerorum numerus 1 N. fiet $\frac{16 N. - 30}{1 Q. - 3}$. minor quàm 5. & tandem 16 N. minores quàm 5 Q. ⊹ 15. quod per ſe manifeſtū eſt, quia quadratus ſemiſſis numeri numerorum puta 64. minor eſt quàm productus ex quadratis in vnitates, puta quàm 75. vnde patet nulla hîc opus eſſe Numeri determinatiooe, ſed poni poteſt latus fictitium 8 − quotlibet Numeris, quorum quadratus excedat 3. Ponatur 8 − 2 N. fiet 1 N. 2. Quare latus quadrati quæſiti quod poſitum erat 5 − 1 N. erit 3. & ſatisfacit propoſito. nam eius quadrato 9. ducto in 3. fit 27. vnde ſi auferatur 11. remanet quadratus 16.

Hac ratione, vt iam monui, applicabis hoc lemma præcedenti quæſtioni. Nam primo expoſitis numeris 136. & 4320. quorum altero ducto in quadratum 36. altero de producto ſublato, relinquitur quadratus 576. inuenies alium quadratum minorem quàm 36. qui præſtet idem. Eſto latus illius 6 − 1 N. huius quadratus ductus in 136. & multatus numero 4320. fit 576 − 1632 N. ⊹ 136 Q. æquandus quadrato. Verùm latus quæſiti quadrati non ſolùm debet eſſe minus quàm 6. ſed etiam quia quadratus talis eſſe debet vt eo ducto in 136. à producto poſſit auferri 4320. cùm diuiſo 4320. per 136. fiat 31. $\frac{13}{17}$. cuius latus ferè eſt 5 $\frac{1}{2}$. oportet vtiq; latus quadrati non eſſe minus quàm 5 $\frac{1}{2}$. at illud poſitum eſt 6 − 1 N. quare cùm auferendo 5 $\frac{1}{2}$ à 6 − 1 N. ſuperſit $\frac{1}{2}$ − 1 N. curandū eſt vtique vt 1 N. ſit minor quàm $\frac{1}{2}$. Igitur numeri 576 − 1632 N. ⊹ 136 Q. latus ita fingendū eſt vt prodeat 1 N. minor quam $\frac{1}{2}$. Quamobrem ſi modo ſæpè alias à nobis vſitato, determinationem quæras numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, iouenies latus fingi debere 24 − tot numeris qui ſint plus quàm 34. Ponatur ergo 24 − 62 N. fiet 1 N. $\frac{112}{309}$. quo detracto à 6. manet latus quæſiti quadrati $\frac{1742}{309}$. Ipſe ergo quadratus eſt $\frac{3034564}{95481}$. quo ducto in 136. fit $\frac{412700704}{95481}$. vnde ſi auferas 4320. vel ſub eadem denominatione $\frac{412477920}{95481}$. manet quadratus $\frac{222784}{95481}$. à latere $\frac{472}{309}$.

Deinde ſi velis adhuc quadratum maiorem quàm 36. ſed minorem quàm 60. pone latus illius 6 ⊹ 1 N. quadratus ductus in 136. & multatus numero 4320. fiet 576 ⊹ 1632 N. ⊹ 136 Q. æquandus quadrato. Sed quia valor quadrati debet eſſe minus quàm 60. cùm latus proximum ipſius 60. ſit 7 $\frac{11}{15}$. & ab hoc auferendo latus quadrati quæſiti quod poſitum eſt 6 ⊹ 1 N. ſuperſit 1 $\frac{11}{15}$ − 1 N. patet 1 N. minorem eſſe debere quàm $\frac{26}{15}$. Quare ſi quæras determinationem numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies latus illud fingi debere 24 − tot Numeris qui excedant 49 $\frac{1}{2}$. Ponatur ergo 24 − 56 N. fiet 1 N. $\frac{36}{25}$. Quare latus quadrati quod poſitum eſt 6 ⊹ 1 N. erit $\frac{186}{25}$. ipſe quadratus $\frac{34596}{625}$. qui vtique minor eſt quàm 60. eoque ducto io 136. & de producto auferendo 4320. remanet quadratus $\frac{2005056}{625}$: à latere $\frac{1416}{25}$.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ tam hypotenusæ quàm alterius laterum circa rectum numero adscito, faciat quadratum. Si statuamus illud datum specie, rursum cogimur determinare, & quærere triangulum rectangulum, & quadratum numerum maiorem areæ numero, vt quadratus ductus in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, detracto solido contento sub area, & prædicto latere circa rectum, & interuallo hypotenusæ suprà prædictum latus, faciat quadratum. Formetur ergo triangulum à 4. & 1. & sit quadratus 36. Sed is non est maior areæ numero. Habemus igitur duos numeros, alterum quidem qui fit ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, nempe 136. alterum verò, solidum contentum sub area, vno laterum circa rectum, & excessu hypotenusæ suprà prædictum latus, nempe 4320. Quoniam igitur quadratus aliquis, puta 36. multiplicatus in 136. & detracto 4320. facit quadratum, quærimus autem quadratum maiorem esse quàm 36. si statuamus ipsum 1 Q. + 12 N. + 36. & superiorem sequamur demonstrationem, inueniemus infinitos quadratos quæstionem soluentes. Quorum vnus erit

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν ἀριθμὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς ἀριθμὸν περὶ τὴν ὀρθήν, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, πάλιν ἔρχεται ἡμῖν, διορίζεσθαι καὶ ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν μείζονα ὄντα τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, λείψει τοῦ στερεοῦ περιεχομένου ἐκ τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω οὖν τὸ τρίγωνον ἀπὸ μ° δ. καὶ μ° α. ὁ δὲ τετράγωνος μ° λς. καὶ οὐκ ἔστι μείζων τοῦ ἐμβαδοῦ. ἔχομεν οὖν δύο ἀριθμούς, τὸν μὲν ἕνα, τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, τουτέστι μ° ρλς. τὸν δὲ λοιπόν, τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθήν τὸν ͵δτκ. ἐπεὶ οὖν τετράγωνός τις ὁ ὢν μ° λς. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ρλς. καὶ λείψας τὸν ͵δτκ. ποιεῖ τετράγωνον. ζητοῦμεν δὲ τὸν τετράγωνον μείζονα εἶναι τοῦ λς. ἐὰν οὖν τάξωμεν αὐτὸν δ^υ α ςς^οι ιβ μ° λς καὶ ἀκολουθήσωμεν τῇ προδεδειγμένῃ ἀποδείξει εὑρήσομεν ἀπείρους τετραγώνους ποιοῦντας τὸ πρόβλημα, ὧν εἷς ἔσται ὁ ὢν

μ° χος. τάξομεν οὖν τὸ ὀρθογώνιον ςς η. ςς ιε. ςς ιζ. καὶ γίνονται δ^υ ξ μ° η. ἴσαι δ^υ χος. καὶ γίνεται ὁ ς° α^χ οζ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

676. Statuamus ergo triangulum rectangulum 8 N. 15 N. 17 N. & fiunt 60 Q. + 8 N. æquales 676 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{77}$. Adpositiones.

IN QVAESTIONEM XVII.

Ex adnotatis ad duas præcedẽtes, omniũ quæ hîc aguntur causa fit manifesta. Quare sufficiet integram subiicere operationem. Ponatur triangulum datum specie 8 N. 15 N. 17 N. fiet area 60 Q. cui adiiciendo tum hypotenusam 17 N. tum latus 8 N. fiunt 60 Q. + 17 N. & 60 Q. + 8 N. æquandi quadrato. Quod si instituamus æquationem respectu 60 Q. + 8 N. vt etiam valor Numeri alteri numero ritè applicari possit, oportebit inuenire quadratum à quo auferendo 60. & per residuum diuidendo 8. fiat quotiens, cuius quadratus sexagesies sumptus, adscito latere suo decies & septies, faciat quadratum. Esto quadratus quæsitus 1 Q. detracto 60. fit 1 Q. − 60. per quem diuidẽdo 8. fit $\frac{8}{1Q.-60}$. cuius quadratus $\frac{64}{1QQ.-120Q.+3600}$. qui si ducatur in 60 fit $\frac{3840}{1QQ.-120Q.+3600}$. cui si addatur decies & septies $\frac{8}{1Q.-60}$. hoc est sub eadem denominatione $\frac{136Q.-8160}{1QQ.-120Q.+3600}$. fiet vtique $\frac{136Q.-4320}{1QQ.-120Q.+3600}$. æquandus quadrato. Quare cùm denominator sit quadratus, restat vt numerator 136 Q. − 4320. æquetur quadrato. Quod facilè fit cùm ex demonstratis ad decimam quintam quadrato 36. ducto in 136. & de producto auferendo 4320. supersit quadratus. Verùm quadratus 36. hîc vsui esse non potest, quia non est maior quàm 60. quod necesse est, cùm quæramus quadratum æquandum cum 60 Q. + 8 N. Igitur implorandum est auxilium præcedentis lemmatis, & inueniendus quadratus maior quàm 36. immò quàm 60. quo ducto in 136. & de producto auferendo 4320. relinquatur quadratus. Ponatur latus quæsiti quadrati 6 + 1 N. fiet quadratus 36 + 12 N. + 1 Q. quo ducto in 136. & de producto auferendo 4320, fit 576 + 1632 N. + 136 Q. æquandus quadrato. Quia autem quadratus quæsitus debet esse maior quàm 60. sumpto quadrato proximè maiore quàm 60. puta 64. cuius latus 8. à quo auferendo 6. remanet 2. patet ita fingendum latus quadrati; vt 1 N. non sit minor quàm 2. Quare si quæras Numeri determinationem inuenies latus fictitium poni debere 24 + tot numeris, qui non excedant 21. ita tamen vt eorum quadratus excedat 136. quales sunt omnes numeri à 12. vsque ad 21. inclusiuè. Ponatur ergo 24 + 16 N. fiet 1 N. 20. Quare latus quadrati est 26. Ipse quadratus 676. æquemus ergo 676 Q. cum 60 Q. + 8 N. fiet 1 N. $\frac{1}{77}$. & latera quæsiti trianguli erunt $\frac{8}{77}$, $\frac{15}{77}$. $\frac{17}{77}$. Area fit $\frac{60}{5929}$. cui si adiiciatur tum hypotenusa, tum primùm latus, fiunt quadrati $\frac{1369}{5929}$. & $\frac{196}{5929}$. quorum latera $\frac{37}{77}$. & $\frac{14}{77}$.

QVÆSTIO XVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν τμηθεισῶν διχῶς, ὁ τῆς τεμνούσης τὴν γωνίαν ἀριθμὸς ᾖ ῥητός. τετάχθω ἡ μὲν τέμνουσα γωνίαν διχῶς ςς ε. ἡ δὲ μία τομὴ τῆς βάσεως ἀριθμῶν γ. ἡ ἄρα κάθετος ἔσται ςς δ. τετάχθω δὴ καὶ ἡ ἐξ ἀρχῆς βάσις μονάδων ὅσων δήποτε

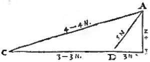
INVENIRE triangulum rectangulum, vt acutis eius angulis bifariam scissis, numerus angulum secantis sit rationalis. Ponatur secans angulum bifariam 5 N. vnum verò segmentum basis 3 N. ergo cathetus erit 4 N. Statuatur itaque ab initio basis vnitatum quotcun-

que quæ trientem habeant. Ac sit 3. erit igitur reliquum basis segmentum 3 − 3 N. sed quoniam angulus bifariam sectus est, & cathetus ad abscissam partem est sesquitertia, erit & hypotenusa ad reliquum basis segmentum, sesquitertia. At positum est reliquum basis segmentum 3 − 3 N. Igitur hypotenusa erit 4 − 4 N. Restat vt huius quadratus, nempe 16 Q. + 16 − 32 N. æquetur quadratis laterũ circa rectum, hoc est 16 Q. + 9. & fit 1 N. $\frac{7}{32}$. & reliqua sunt manifesta. Et si omnia ducam in 32. erit vtique cathetus 28. Basis 96. Hypotenusa 100. At secans angulum 35.

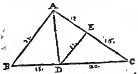
ἐχουσῶν τρίτον. ἔστω δὴ μο γ. ἔσται δὴ τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς βάσεως μο γ. λεῖψει ςς γ. ἀλλ᾽ ἐπεὶ ἡ γωνία δίχως ἐτμήθη, καὶ ἔστιν ἡ κάθετος ἀποτομῆς ἐπίτριτος, ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ λοιποῦ τῆς βάσεώς ἐστιν ἐπίτριτος. καὶ τέτακται τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς βάσεως μο γ ⋔ ςς γ. ἡ ἄρα ὑποτείνουσά ἐστι μο δ. λεῖψει ςς δ. λοιπόν ἐστι τὸν ἀπὸ ταύτης τετράγωνον. τουτέστι δυ ις μο ις ⋔ ςς λβ. ἰσῶσαι τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετραγώνοις. τουτέστιν δυ ις μο θ. καὶ γίνεται ὁ ς μο ζ λβ. τὰ λοιπὰ δῆλα. καὶ ἐὰν πάντα λβ. ποιήσω, ἔσται ἄρα ἡ μὲν κάθετος μο κη. ἡ δὲ βάσις μο ϟϛ. ἡ δὲ ὑποτείνουσα μο ρ. ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν μο λε.

IN QVAESTIONEM XVIII.

Hic nulla ferè est difficultas. Nam quod ait Diophantus Cathetum ad alterum baseos segmentum eandem habere rationẽ, quam habet hypotenusa ad alterum eiusdem baseos segmentũ, id manifestè infertur ex tertia sexti Euclidis. Sit enim triangulum rectangulum A B C. & ducatur A D secans angulum acutum A bifariam. Quia ergo, vt ostendit Euclides loco citato, se habet A B ad A C. vt B D ad D C. erit & permutando A B ad B D, sicut A C ad C D. Quod est propositum. Itaque sumit Diophantus latera trianguli rectanguli 5. 4. 3. & constituens illud datum specie, applicat lateribus trianguli A D B. fitque A D 5 N. A B 4 N. B D 3 N. Necesse est autem A B statui maiorem quàm B D. quia enim est A B ad B D. vt A C ad C D. sed A C maior est quàm C D. immò quàm tota C B, erit & A B maior quàm B D. Tum verò tota basis C B ponitur quilibet vnitatum numerus qui habeat trientem ad vitãdas fractiones, puta 3. Quare fit reliquum segmentum C D. 3 − 3 N. At hypotenusa A C 4 − 4 N. cuius quadratũ æquando quadratis laterum circa rectũ fit 1 N. $\frac{7}{32}$. Quare A B est $\frac{28}{32}$. B C $\frac{96}{32}$. A C $\frac{100}{32}$. secãs verò A D $\frac{35}{32}$. & si omnia multiplices per 32. fient 28. 96. 100. 35. hoc enim licere constat ex prima tertij porismatum. Quod si loco trianguli 5. 4. 3. sumas aliud non simile, aliam reperies solutionem, & in altera proportione inuenies latera triangulorum A C B. A D B. vt manifestum est.



Cæterùm non docet Diophantus quomodo inueniri possit triangulum rectangulum, vt numerus angulum rectum secantis bifariam sit rationalis, quia id est impossibile. Quod sic demonstratur. Esto triangulum rectangulum A B



C. rationale, & ducatur A D diuidens angulum rectum A bifariam. Dico A D non esse rationalem. Ducatur enim ab angulo D linea D E. perpendicularis ad latus A C. hæc sanè cadet intra triangulum A D C. quoniam anguli D A C. D C A sunt acuti. Itaque[1] quoniam est B A ad A C. sicut B *3. sexti.* D ad D C erunt & componendo B A. A C. simul ad A C. sicut tota B C ad D C. sed A B. A C sunt rationales, & tota B C rationalis ex hypothesi, ergo & quarta proportionalis D C rationalis est. Quoniam verò triangula A B C. D E C sunt æquangula, cùm in vtroque sit angulus rectus, & angulus C commu- *4. sexti.* nis,[2] erit B C ad C A. sicut D C ad C E. Quare cùm B C. C A. D C. sint rationales, erit & quarta C E rationalis, ac per consequens & reliqua E A. Quia *32. primi.* verò ex hypothesi angulus D A E est semirectus, & angulus E rectus,[3] est & *5. primi.* reliquus A D E semirectus. Quare cùm anguli D A E. A D E sint æquales,[4] *47. primi.* sunt & æquales lineæ A E. E D. Ac proinde quadratus ipsius A D[5] duplus est quadrati ipsius A E, quare cùm A E ostensa sit rationalis, non erit A D rationalis, alioquin dabitur in numeris quadratus quadrati duplus. Quod est impossibile. Vel cùm A D sit diameter quadrati à latere A E, & A E sit rationalis, non erit A D rationalis per vltimam decimi. Quod erat demonstrandum.

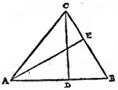
Si libet in numeris rem experiri, ponatur A C 28. A B 21. B C 35. reperietur per regulam trium B D 15. D C 20. & rursus C E 16. A E 12. Quamobrem & D E erit 12. Quadratus ergo angulum secantis A D. erit 288. & ipse A D. ℞ 288.

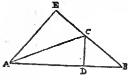
Quoniam verò pleraque non iniucunda problemata proponi possunt ad inueniendum quodlibet triangulum in rationalibus, ita vt vel perpendicularis à quolibet angulo in latus oppositum ducta, vel etiam linea diuidens basim vel angulum bifariam, sit rationalis, operepretium fore duxi, ea hoc loco explicare. Equidem aliqua horum iam tentauit vir doctissimus Christophorus Clauius ad duodecimam, & ad decimam tertiam secundi Elementorum, sed præterquàm de sola egit perpendiculari, in vnica tantum proportione propositum absoluit, nec vllam profert demonstrationem. Nos autem & vniuersaliorem methodum proferemus, & omnia demonstrando persequemur, & non solùm de perpendiculari, sed & de linea basim vel angulum secante bifariam nondum vulgata problemata subiiciemus. Sed quoniam, vt professi sumus, nihil quod ab Euclide demonstratum non sit supponere nobis propositum est, ne aliò lectorem amandemus, demonstranda sunt in primis lemmata quæ sequuntur,

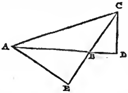
LEMMA PRIMVM.

In omni triangulo si duæ perpendiculares à quibuslibet angulis ducantur ad opposita latera, erit vt latus ad latus, ita reciprocè perpendicularis ad perpendicularem.

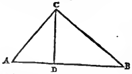
Esto triangulum A B C. & ab angulis C. A ducantur in latera opposita A B. C B. perpendiculares C D. A E. dico esse vt latus A B ad latus B C. ita reciprocè perpendicularem A E ad perpendicularem C D. Nam vel vtraque perpendicularis cadit intra triangulum vt in prima figura; vel altera cadit intra, altera extra, vt in secunda figura. Vel vtraque cadit extra vt in tertia figura. Vel secunda perpendicularis cadit in ipsum angulum, vnde demittitur prima, vt in quarta figura, & in duobus prioribus casibus vnica est demonstratio. Quia enim triangula C D B A E B sunt *4. sexti.* æquangula, cùm in vtroque sit angulus rectus, & angulus B communis,[6] erit A B ad A E. sicut C B ad C D. & permutando, erit A B latus, ad latus C B. sicut







ficut perpẽdicularis A E ad perpendicularem C D. Quod erat propositũ. At in tertio casu, quoniam etiam triangula C D B. A E B. sunt æquiangula, eo quod in vtroque sit angulus rectus, [1] & anguli ad verticem C B D. A B E. sint æquales, sequitur vt prius esse A B ad A E, sicut C B ad C D. Quare & permutando erit A B latus ad latus C B. sicut perpendicularis A E ad perpendicularem C D. Quamobrem patet propositum. 15. primi.



Denique si perpendicularis A C. cadat in ipsum angulũ C. vnde demissa est perpendicularis C D. vt accidit in triangulo rectangulo; erit ob similitudinem triangulorum C A B. C A D. vt latus C B ad latus B A, sic perpendicularis C D ad perpendicularem C A. & Rursus ob similitudinem triangulorum C A B. C D B. erit vt latus C A ad latus A B. sic perpendicularis C D ad perpendicularem C B. Quod ipsum etiamdemonstratum est ab Euclide octaua sexti. Quamobrem ex omni parte patet propositum.

COROLLARIVM.

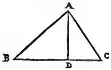
Hinc sequitur si omnia trianguli latera sint rationalia, & vna perpendicularium rationalis, & reliquas perpendiculares à reliquis angulis demissas, fore rationales.

Quia cùm quatuor proportionalium, tres sint rationales, necesse est & quartam esse rationalem.

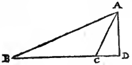
LEMMA SECVNDVM.

Si à quouis angulo trianguli demittatur in basim perpendicularis, interuallum quadratorum à lateribus angulum comprehendentibus, æquale est rectangulo sub tota basi & interuallo segmentorum basis; vel sub tota basi & aggregato segmentorum basis contento.

In triangulo ABC sit demissa in basim B C. perpendicularis A D. quæ primò cadat intra triangulũ, dico interuallum quadratorũ à lateribus AB. AC. æquale esse rectãgulo sub tota BC. & interuallo segmentorũ BD. DC. comprehẽso. Quia enim [2] quadratus ipsius A B. æquatur quadratis ipsarũ A D. D B. & quadratus ipsius A C. æquatur quadratis ipsarũ AD. DB. erit excessus quadrati A B super quadratũ A C. æqualis excessui quadratorũ ab ipsis A D. D B. super quadratos ab ipsis AD. DC. & auferẽdo vtrimq; cõmunem quadratum ipsius A D. erit interuallũ quadratorũ ab ipsis BD. DC. æquale interuallo quadratorum ab ipsis AB. AC. Porro interuallum quadratorum ab ipsis BD. CD. [3] æquatur rectangulo sub tota BC. & interuallo ipsorum BD. CD. Igitur & interuallum quadratorum ab ipsis AB. AC. æquatur rectangulo sub tota B C. & sub interuallo ipsarum B D. C D. Quod erat propositum. 47. primi. 5.2. perif.



Deinde cadat perpendicularis A D. extra triangulum. Dico interuallum quadratorum ab ipsis A B. A C. æquari rectangulo sub basi B C. & sub aggregato segmentorum B D. C D. Nam vt prius, quia [4] quadratus A B. æquatur quadratis ipsarum B D. A D. & quadratus A C æquatur quadratis 47. primi.



3. 2. *porif.* ipſarum A D. C D. ablato vtrumque communi quadrato ipſius A D. interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. æquale eſt interuallo quadratorum ab ipſis B D. C D. At interuallum quadratorum ab ipſis B D. C D. æquatur rectangulo ſub B C. interuallo ipſarum B D. C D. & ſub aggregato earundē B D. C D. Igitur interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. æquatur rectangulo ſub baſi B C. & aggregato ſegmentorum B D. CD. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Neminem moueat quod in huius propoſitionis demonſtratione citetur tertia ſecundi poriſmatum, quam in ſolis numeris, non autem in lineis propoſuimus. Nam vt euidens eſt, propoſitio illa aquè benè lineis competit, atque ipſis numeris; cùm illius demonſtratio ſolis propoſitionibus libri ſecundi Euclidis innitatur.

Sane ex hoc lemmate pulchra elicitur regula ad inuenienda ſegmenta baſis à perpendiculari facta, ſi omnia trianguli latera data ſint. Sit enim in primo caſu A B 30. A C 26. B C 28. Sumo interuallum quadratorum ab ipſis 30. & 26. puta 224. quem diuido per baſim 28. fit quotiens 8. interuallum ſegmentorum B D. D C. Quare cùm eorundem aggregatum ſit 28. Per Canonem primæ primi Diophanti facilè inuenientur ſingula ſegmenta. Nam addendo & adimendo 25. ipſi 27. fient 52. & 2. quorum ſemiſſes 18. & 10. ſunt ipſa ſegmenta B D. D C.

Sit autem in ſecundo caſu A B 30. A C 15. B C 25. ſumo interuallum quadratorum ab ipſis 30. & 15. puta 675. quod diuido per 25. prouenit 27. aggregatum ſegmentorum BD. CD. Quare cum eorum interuallum ſit 25. addendo & adimendo 52. ipſi 27. fiunt 52. & 2. quorum ſemiſſes 26. & 1. ſunt ſegmenta B D. C D. Ipſa autem operatio pulchrè docet an perpendicularis cadat intra triangulum vel extra. Nam ſi diuidendo interuallum quadratorum per baſim, fiat quotiens minor baſi, perpendicularis cadit intra triangulum. Sed ſi fiat quotiens maior baſi, perpendicularis cadit extra triangulum.

COROLLARIVM.

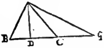
Hinc manifeſtè ſequitur ſi omnia latera trianguli ſint rationalia, & ſegmenta quoque baſis à perpendiculari facta, eſſe rationalia.

Nam cùm latera angulum comprehendentia erunt rationalia, erit & interuallum quadratorum ab ipſis, rationalis numerus, quo diuiſo per baſim rationalem, prodibit vel interuallum, vel aggregatum ſegmentorum baſis rationale, Quare & ipſa ſegmenta rationalia erunt.

LEMMA TERTIVM.

Si ab angulo acuto demittatur intra triangulum perpendicularis in baſim, erit minor proportio cuiuſlibet ſegmenti baſeos ad perpendicularem, quàm perpendicularis ad aliud ſegmentum. Sed ſi ab angulo obtuſo demittatur perpendicularis, erit maior proportio cuiuſlibet ſegmenti ad perpendicularem, quàm perpendicularis ad aliud ſegmētum.

Eſto triangulum A B C. & ab angulo acuto B A C demittatur intra triangulum perpendicularis A D. dico minorem eſſe proportionem B D. ad D A. quàm D A ad D C. & è conuerſo minorem quoque eſſe proportionem D C ad D A. quàm D A ad D B. Ducatur enim ad B A perpendicularis A G. quæ ſanè cadet extra triangulum, quia angulus B A C. ponitur acutus.



8. *ſexti.* Tum ob triangulum rectangulum, [2] erit B D ad D A. ſicut D A ad D G. ſed
8. *quinti.* eadem D A ad [3] maiorem D G habet minorem proportionem, quàm ad minorem D C Igitur & B D ad D A minorem habet rationem quàm D A ad D C. ſimiliter quia eſt D G ad D A. vt D A ad D B. & D C minoris, ad D A, minor eſt proportio, quàm D G maioris ad eandem D A, erit & minor proportio D C ad D A. quàm D A ad D B. Quod eſt propoſitum.

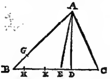
Sit autem angulus B A C obtusus, dico maiorem esse rationem B D. ad D A. quàm D A ad D C. & è conuerso. Nam ducta ad B A perpendiculari A G ea quidem cadet intra triangulum ob angulum rectum B A G. minorem obtuso B A C. sed tamen cadet inter D. & C. quia scilicet angulus B A D acutus est, ac proinde minor recto B A G. Hoc autem posito eadem est prorsus demonstrandi ratio. Quia enim est [1] B D ad D A. vt D A ad D G. sed D A ad D G [2] maior est proportio, quàm D A ad D C. erit & B D ad D A. maior proportio quàm D A ad D C. similiter quia est vt D G ad D A. sic D A ad D B. sed D C ad D A maior est proportio, quàm D G ad D A. erit quoque D C ad D A maior proportio, quàm D A ad B D. Quod demonstrãdum erat. [8. sexti.] [8. quinti.]



LEMMA QVARTVM.

Si ab angulo acuto vel obtuso demittatur intra triangulum perpendicularis in basim, itemque linea secans angulum bifariam; interuallum laterum angulum comprehendentium, est medium proportionale, inter interuallum segmentorum basis à perpendiculari factorum, & inter interuallum segmentorum quæ fiunt ab angulum secante linea.

Sit triangulum A B C. & in eo angulus B A C. acutus vel obtusus, à quo demittatur perpendicularis A D. itemque linea A E secans angulum bifariam. Et in maiore latere A B. sumatur A G æqualis minori lateri A C. ita vt B G sit interuallum laterum, sumatur etiam in segmento B D, linea K D æqualis ipsi D C, ita vt B K sit interuallum segmentorum à perpendiculari factorum. Denique sumatur in B E. linea H E æqualis ipsi E C. ita vt B H sit interuallum segmentorũ à secante angulum factorũ, dico B G esse mediam proportionalẽ inter K B. H B. hoc est esse K B ad B G vt B G ad B H. Quia enim interuallum quadratorum à lateribus A B. A C.[3] æquatur rectangulo sub B C. B K. At idem interuallum quadratorum [4] æquatur rectangulo sub aggregato laterum A B. A C. & interuallo eorundem B G. erit rectangulum sub aggregato A B. A C. & sub B G. æquale rectangulo sub B C. & B K. [5] Igitur est aggregatum ipsarum A B. A C. ad B C. sicut B K. ad B G. [6] Quoniam verò est A B ad B E. sicut A C ad C E, [7] erunt & antecedentes simul ad consequentes, hoc est aggregatum ipsarum A B. A C. ad totam B C. sicut A B ad B E, vel sicut A C ad C E. Igitur vt A B ad B E. vel A C ad C E. sic est B K ad B G. Cùm ergo A G sit æqualis ipsi A C. & H E ipsi E C. erit & A G ad H E sicut A B ad B E. & sicut B K ad B G. Cùm igitur sit vt tota A B ad totam B E, sic ablata A G. ad ablatam H E, [7] erit & reliqua B G ad reliquam B H, sicut A B ad B E. vel B K ad B G. Quamobrem est B K ad B G. sicut B G ad B H. Quod demonstrandum erat. [Lemma secundum.] [3. 2. paris.] [16. sexti.] [3. sexti.] [12. quinti.] [19. quinti.]



COROLLARIVM.

Hinc sequitur primo interuallum segmentorum à perpendiculari factorum, maius esse interuallo eorũ quæ fiunt à linea secante angulum, nẽpe BK maiorem esse quàm B H. Quia est BK ad BG vt AB. AC simul ad B C.[8] sed AB. AC simul sunt maiores quàm BC. ergo & B K maior est quàm B G. ac proinde & B G maior est quàm B H. Quamobrem multo magis B K maior est quàm B H. [20. primi.]

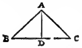
Secundò sequitur maius segmentũ eorum quæ fiunt à linea secante angulum, puta BE, minus esse maiore eorum quæ fiunt à perpendiculari, puta ipso B D. & contra E C. maius esse quàm D C. Quia enim B K maior est quàm B H. erit reliqua K C. minor quàm reliqua H C. quare & horum semisses sumendo, erit

D C. minor quàm E C. Igitur E cadit inter B & D. ac proinde B E minor est quàm B D.

Tertiò, sequitur interuallum E D (quo B D superat B E. vel quo E C superat D C) esse dimidium ipsius H K interualli interuallorum. Quia enim vt est H C
19 quinti. ad E C. sic ablatus K C ad ablatum D C. nam vtrobique est ratio dupla,[1] erit & reliquus H K ad reliquum E D in eadem ratione dupla.

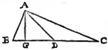
LEMMA QVINTVM.

In triangulo rectangulo, si ab angulo recto ducatur linea diuidens hypotenusam bifariam, erit ducta linea æqualis dimidio hypotenusæ.



In triangulo rectangulo A B C. ab angulo recto B A C sit ducta linea A D diuidens B C bifariam. Dico A D æqualem esse ipsi B D vel D C. Nam sint primo A B. A C æquales. [2] Ergo & anguli A B C. A C B æquales erunt, & [3] quilibet eorum dimidium erit recti, cùm B A C sit rectus. Sed & angulus B A D. est dimidium recti eadē de causa. Igitur cùm in triangulo B A D. anguli B A D. A B D sint æquales,[4] erunt & latera B D. A D. æqualia. Quod erat propositum.

5. primi. 32. primi. 5. primi.

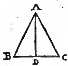


Deinde A B. A C sint inæquales, sit A C maior quàm A B. Quia ergo latera A D. D C. trianguli A D C. æqualia sunt lateribus A D. D B trianguli A B D. & basis A C. basi A B maior est,[5] erit angulus A D C. angulo A D B maior. Quare A D C obtusus est, ac proinde perpendicularis A G cadit inter B & D. ne in eodem triangulo alter angulus sit rectus, alter obtusus[6] & tres anguli trianguli sint duobus rectis maiores. Itaque quia B C diuisa est bifariam in D. & inæqualiter in G. [7] quadratus semissis D C. æqualis est rectangulo sub B G. G C. & quadrato ipsius G D. At quoniam[8] A G est media proportionalis inter B G. G C. rectangulum sub B G. G C.[9] æquatur quadrato ipsius A G. Igitur quadratus ipsius D C. æquatur quadratis ipsarum A G. G D.[10] sed eisdem quadratis æquatur quadratus ipsius A D. ergo quadrati ipsorum A D. D C. æquales sunt inter se, ac per consequens A D æquatur ipsi D C. Quod erat demonstrandum.

25. primi. 32. primi. 5. secundi. 8. sexti. 16. sexti. 47. primi.

LEMMA SEXTVM.

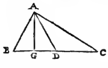
In oxygonio triangulo, linea quæ ducitur ab angulo acuto diuidens basim bifariam maior est dimidio basis.



In triangulo oxygonio A B C. ab angulo acuto B A C. ducta sit A D diuidens basim B C. bifariam dico A D maiorem esse ipsa B D. vel D C. Nam primo sint A B. A C. æquales,[11] erunt igitur & anguli B. C. æquales. Quare cùm A C. C D. æquales sint ipsis A B. B D. & anguli B. C. æquales,[12] erunt & reliqui anguli triangulorum A B D. A D C. æquales, & anguli ad D recti. Itaque si A D non est maior quàm B D. est vtique vel æqualis, vel minor; si æqualis,[13] erunt & anguli D B A. D A B. æquales, & eadem ratione angulus D A C. æqualis erit angulo C. Quare totus angulus B A C. æquabitur duobus angulis B C. ac proinde [14] cùm tres anguli trianguli A B C. æquentur duobus rectis, erit angulus B A C. rectus contra hypothesim. Si autem A D ponatur minor quàm B D. [15] erit angulus B minor angulo B A D. & eadem de causa angulus C minor angulo D A C. Quare totus B A C. maior erit vtroque B. C. simul, ac proinde angulus idem B A C maior erit recto, contrà hypothesim. Quare A D non est æqualis ipsi B D. nec minor. Igitur maior est. Quod erat propositum.

5. primi. 4. primi. 5. primi. 32. primi. 18. primi.

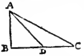
Deinde sit A C maior quàm A B. Cùm ergo A D. D C sint æquales ipsis A D. D B. & basis A C. sit maior basi A B. [1] erit angulus A D C. maior angulo A B G. ac per consequens angulus A D C. obtusus est. Quare perpendicularis A G. cadit inter B & D. Itaque quoniam B C. secta est æqualiter in D. & inæqualiter in G. [2] erit quadratus ipsius D C. æqualis rectangulo sub B G. G C. & quadrato G D. sed ob angulum acutum B A C. [3] minor est ratio B G. ad A G. quàm ipsius A G. ad G C. ac proinde quadratus ipsius A G. maior est rectangulo sub B G. G C. vt ostendit Clauius ad vigesimam septimi demonstratione, quæ non minus lineis competit quàm numeris. Igitur quadrati ipsarum A G. G D. maiores sunt quadrato ipsius D C. Atqui quadrati ipsarum A G. G D. [4] æquantur quadrato ipsius A D. Ergo quadratus ipsius A D. maior est quadrato ipsius D C. ac proinde A D maior est quàm D C. Quod demonstrandum erat.



25. primi. 5. secundi. Lemma tertium. 47. primi.

SCHOLIVM.

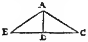
Non minus vera est hæc propositio in triangulo rectangulo vel amblygonio, dum linea A D ducatur ab vno acutorum angulorum. Sit enim angulus A B C. rectus vel obtusus, & ducta sit A D. diuidens B C bifariam, dico nihilominus A D maiorem esse quàm B D. & quidem manifestum est, [5] cùm A D maiorem angulum B. subtendat. 19. primi.



LEMMA SEPTIMVM.

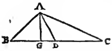
In amblygonio triangulo, linea quæ ducitur ab angulo obtuso diuidens basim bifariam, minor est dimidio basis.

In amblygonio triangulo A B C. ducta sit ab obtuso angulo linea A D diuidens B C. bifariam. dico A D. minorem esse quàm B D vel D C. Nam primo A B. A C. ponantur æquales, [6] erunt ergo anguli B. C. æquales, & vt suprà ostendetur angulos ad D esse rectos. Itaque si A D non est minor quàm B D. erit vtique vel aqualis, vel maior. Quod si ponatur, [7] ergo angulus B æqualis erit angulo B A D. vel maior & angulus C. angulo D A C. Quare vterque B C simul æquabitur toti B A C. vel maior erit quàm B A C. Quare cùm B A C sit obtusus, erunt tres anguli trianguli A B C. æquales duobus obtusis, ac proinde maiores duobus rectis. [8] Quod est impossibile. Igitur A D non est æqualis ipsi B D. neque maior. Quamobrem relinquitur vt sit minor. Quod est propositum.



5. primi. 5. primi. & 18. primi. 32. primi.

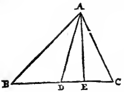
Deinde sit A C maior quàm A B. Igitur vt prius ostendetur angulum A D C obtusum esse, ac proinde perpendicularis A G cadet inter B & D. Quoniam itaque B C secta est æqualiter in D. & inæqualiter in G. [9] erit quadratus ipsius D C æqualis rectágulo sub B G. G C. & quadrato ipsius G D. At quia [10] maior est proportio B G ad A G. quàm A G ad G C. quadratus ipsius A G minor est rectágulo sub B G. G C. vt ostendit Clauius ad vigesimam septimi, demonstratione cuilibet quantitati conueniente. Igitur quadrati ipsarum A G. G D. minores sunt quadrato ipsius D C. sed quadrati ipsarum A G. G D. [11] æquantur quadrato ipsius A D. ergo & quadratus ipsius A D. minor est quadrato ipsius D C. ac proinde A D minor est quàm D C. Quod demonstrandum fuit.



5. secundi. Lemma tertium. 47. primi.

LEMMA OCTAVVM.

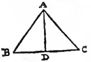
Si à quolibet angulo trianguli ducatur linea diuidés basim bifariam, erunt quadrati laterum dictum angulum comprehendentium, simul dupli quadratorum, tam ex dimidia basi, quàm ex ducta linea ortorum.

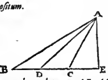


In triangulo A B C. à quolibet angulo A. ducatur A D. diuidens B C. bifariam, dico quadratos simul ipsarum A B A C. duplos esse quadratorum ab ipsis A D. B D. Nam ducta perpendiculari A E. erunt quadrati ipsarum A B. A C. æquales quadratis segmentorum B E. E C vnà cum duplo quadrati A E. sed qua-
9. secundi. drati B E. E C. inæqualium segmentorum,[2] dupli sunt quadratorum à dimidia B D. & ab intermedia D E. Igitur quadrati ipsarum A B. A C. dupli sunt quadratorum
47. primi. ab ipsis B D. D E. A E. Atqui duplum quadratorum ab ipsis D E. A E.[3] æquatur duplo quadrati ipsius A D. Igitur quadrati ipsarum A B. A C. æquantur duplo quadratorum ab ipsis B D. A D. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Sic demonstratur hæc propositio à Pappo lib. 7. propo. 122. Duo tamen alij casus considerari possunt. Primus, cùm latera A B. A C. sunt æqualia, ac per consequens linea A D. est perpendicularis ad basim; & tunc quia quadrati laterum A B. A C. æquantur quadratis segmentorum B D. D C. & duplo quadrati ipsius A D. at quadrati ipsarum B D. D C. æquales sunt, patet quadratos laterum A B. A C. duplos esse quadratorum ab ipsis A D. B D. Quod est propositum.



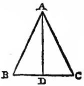


Secundus casus est cùm perpendicularis A E. cadit extra triangulum. Et tunc quia quadrati laterum A B A C.
47. primi. *[3] æquantur quadratis ipsarum B E. C E. & duplo quadrati ipsius A E. & quoniam B C. secta est bifariam in D.*
10. secūdi. *& adiecta ei linea C E. ac proinde [4] quadrati ipsarum B E. C E. dupli sunt quadratorum ab ipsis B D. D E. patet quadratos laterum A B. A C. duplos esse quadratorum B D. D E. A E. at duplum quadratorum D E. A E. æquatur duplo quadrati ipsius A D. Igitur quadrati laterum A B. A C. dupli sunt quadratorum ab ipsis B D. A D. Ac proinde ex omni parte patet propositum.*

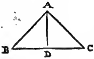
His præmissis sequentia problemata demonstrabimus, omnes triangulorum species persequentes, earum scilicet diuisione tum secundum latera, tum secundum angulos considerata.

PROBLEMA PRIMVM.

Triangulum Isosceles constituere in rationalibus, siue oxygonium, siue amblygonium, vt perpendicularis ab angulo à lateribus æqualibus contento ducta in tertium latus inæquale, sit rationalis.



Sit primo constituendum triangulum Isosceles oxygonium A B C. cuius omnia latera sint rationalia, & perpendicularis quoque A D. sit rationalis. Ponatur quodlibet æqualium laterum A B. A C. quilibet numerus, puta 5. & ipsius 5. quadratus 25. diuidatur per octauam secundi Diophanti in duos quadratos, puta 16. & 9. quorum latera 4. & 3. Et quoniam vt constat ex prima parte demonstrationis lemmatis sexti A D. maior est dimidio basis, ponatur A D. 4. D C. 3. erit ergo tota basis B C 6. & factum est quod proponebatur, vt manifestum est.

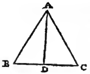


Deinde sit constituendum triangulum amblygonium Isosceles A B C. cuius omnia latera sint rationalia, & perpendicularis A D sit rationalis. Ponatur vt prius A B. vel A C. quilibet numerus, puta 5. & ipsius 5. quadratus 25. diuidatur in duos quadratos 16. & 9. quorum latera 4. & 3. Tunc quia per

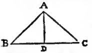
primam partem demonstrationis lemmatis septimi A D minor est dimidio basis, ponetur A D 3. D C 4. & erit tota basis B C. 8. & factum erit quod requirebatur.

SCHOLIVM.

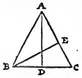
Non agimus de triangulo æquilatero, quia in eo perfici non potest problema. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. dico si latera illius ponantur rationalia, perpendicularem, A D esse non posse rationalem quia enim A D. diuidit B C. bifariam, cùm A C sit dupla ipsius D C,[1] & quadrati sint in ratione duplicata laterum, erit quadratus ipsius A C. quadruplus quadrati ipsius D C. Quare cùm quadrati ipsarum A D. D C. sint æquales quadrato ipsius A C. erit quadratus ipsius A D· $\frac{3}{4}$. quadrati ipsius A C. ac proinde quadratus ipsius A C. ad quadratum ipsius A D se habebit vt 4. ad 3. Quare si A C. & A D ponantur rationales 4. ad 3. habebit rationem quadrati ad quadratum,[2] ac proinde cùm 4. sit quadratus, erit & 3. quadratus. Quod est absurdum. Quamobrem A C. A D. non possunt simul esse rationales, & longitudine commensurabiles. 20. sexti. 24. octaui.



Non agimus etiam de triangulo rectangulo Isoscele, ob eandem causam. Etenim si latera A B. A C. ponantur æqualia, & angulus B A C. rectus, erit perpendicularis A D. æqualis dimidio basis D C. vt constat ex prima parte demonstrationis lemmatis quinti. Quare cùm quadratus ex A C. sit quadratis ipsarum A D. D C æqualis, quadratus ex A C duplus est quadrati ex A D. & quadratus ex A D ad quadratum ex A C. est vt 1. ad 2. Quare si A D. A C. ponantur rationales habebit 1. ad 2. rationem quadrati ad quadratum, ac proinde cùm 1. sit quadratus[3] erit & 2. quadratus. Quod est absurdum. Vel cùm A D sit latus quadrati, cuius A C est diameter,[4] latus erit commensurabile costæ. Quod est impossibile. 24. octaui. vltima decimi.



Porro sic constituto triangulo oxygonio vel amblygonio, non solùm A D ducta ab angulo à lateribus æqualibus contento, est rationalis sed & qualibet alia perpendicularis, ducta ab alio angulo, puta B E. vt constat ex Corrollario lemmatis primi. Est enim vt A C. ad B C. sic A D. ad B E. Quare posita A C. 5. B C. 6. A D 4. inuenietur per regulam trium B E. 4 $\frac{4}{5}$. in triangulo oxygonio. At in amblygonio posita A C 5. B C. 8. A D. 3. inuenietur rursus per regulam proportionum, B E. 4 $\frac{4}{5}$. Quod semel monuisse sufficiat, vt deinceps quotiescunque constituerimus triangulum quodlibet in rationalibus, & ostenderimus vnam perpendicularium esse rationem, intelligatur & alias perpendiculares esse rationales. Quod si lubeat & latera omnia trianguli, & perpendiculares exhiberi in numeris integris, oportet omnia multiplicare per communem denominatorem fractionum quæ interueniunt. Vt in dato exemplo, si omnia ducas in 5. fient in oxygonio triangulo A B. A C. 25. B C. 30. A D. 20. B E 24. At in amblygonio, erit A B. vel A C. 25. B C. 40. A D. 15. B E. 24. Attamen B E. intelligetur cadere extra triangulum.



Potest autem quadrupliciter construi hoc problema. Primo si præscribatur numerus vnius æqualium laterum, vt iam docuimus.

Secundò si præscribatur numerus baseos. Vt si ponatur basis B C. 10. Tunc enim sumpto semisse ipsius 10. puta 5. cuius quadratus 5. queram pro quadrato perpendiculrais, quadratum numerum qui ad 25. additus quadratum faciat. Sed si oxygonium triangulum est constituendum, oportebit huiusmodi quadratum maiorem esse quàm 25. & si vtaris Canone ad vndecimam secundi Diophanti tradito, infinitos tales quadratos reperies. Nam quærendi erunt duo numeri, quorum mutuo ductu fiat 25. ita tamen vt interuallum eorum sit maius quàm 10. quos si arte certa consequi velis, pone minorem 1 N. erit maior $\frac{25}{1N}$. horum interuallum $\frac{25}{1N}$. − 1 N. maior est quàm 10. & omnia ducendo in 1 N. & supplendo defectum, fit tandem 25. maior quàm 1 Q. + 10 N. Qua æquatione per approximationem resoluta, fit 1 N. non maior quàm 2. sumes ergo pro minore quemlibet numerum qui non excedat 2. quales sunt 1. 1 $\frac{1}{2}$. 1 $\frac{1}{2}$. 2. & infiniti alij. Verbi gratia sume 1. erit maior 25. quorum interuallum 24' cuius

semissis 12. erit perpendicularis A D. nam eius quadratus 144. additus quadrato ipsius D C. puta ipsi 25. facit 169. quadratum ipsius A C. Quare A C vel A B. est 13. B C. 10. A D. 12. Sed si amblygonium triangulum constituendum est, posita vt prius B C. 10. quaerendus erit quadratus minor quàm 25. qui ad 25. additus quadratum faciat. Sunt ergo inueniendi duo numeri quorum mutuo ductu fiat 25. ita vt eorum interuallum sit minus quàm 10. quos si ponas vt prius 1 N. & $\frac{25}{1 N}$. fiet tandem 25. minor quàm 1 Q. + 10 N. vnde fit 1 N. non minor quàm 2 $\frac{1}{14}$. Sumes ergo pro minore quemlibet numerum maiorem quàm 2 $\frac{1}{14}$. dum is sit minor quàm 5. nam si poneretur maior quàm 5. non esset iam minor duorum quaesitorum, sed maior vt euidens est. Sume igitur verbi gratia 2 $\frac{1}{2}$. pro minore, erit maior 10. horum interuallum 7 $\frac{1}{2}$. cuius semissis 3 $\frac{3}{4}$. erit perpendicularis A D. nam eius quadratus $\frac{225}{16}$. additus ad 25. quadratum ipsius D C. facit $\frac{625}{16}$. quadratum ipsius A C. Quare A C. vel A B. est 6 $\frac{1}{4}$. B C. 10. A D. 3 $\frac{3}{4}$. & ducendo omnia in 4. fiet A C vel A B. 25. B C. 40. A D. 15.

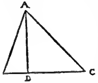
Tertiò, praescribi potest numerus perpendicularis A D. vt si ponatur 12. tuncque quaerendus erit quadratus, pro quadrato ipsius D C. qui ad 144. additus quadratum faciat; sed si lubeat oxygonium facere triangulum, quaeremus quadratum minorem quàm ipse 144. sin autem amblygonium constituendum sit triangulum, quaeremus quadratum maiorem quàm 144. Quod vtrumque, vt prius, perficietur.

Quartò, denique praescribi potest, numerus perpendicularis B E vtpote 24. & tunc sumo hypotenusam cuiuslibet trianguli rectanguli, puta 5. & statuo in Numeris, ponoque quodlibet aequalium laterum A B. A C. 5 N. & si oportet facere triãgulum oxygonium pono semissem basis
Lemma primum. *puta D C minus laterum circa rectum, puta 3 N. erit ergo tota basis 6 N. Quamobrem[1] cùm sit vt B C. 6 N. ad A C. 5 N. sic B E. 24. ad A D. inuenietur A D. 20. cuius quadratus 400. cui addendo 9 Q. quadratum ipsius D C. fit vtique 400 + 9 Q. aequalis quadrato ipsius A C. at idem quadratus est 25 Q. ergo 25 Q. aequantur 400 + 9 Q. & tandẽ 16 Q. aequantur 400. & fit 1 N. 5. est ergo A B vel A C. 25. B C. 30. A D. 20. Sed si constituendũ est triangulum amblygonium, posita A C. vel A B. 5 N. vt prius, pono D C maius laterum circa rectum, puta 4 N. ergo tota B C. est 8 N. Tunc facio vt 8 N. ad 5 N. ita 24. ad aliud, & fit A D. 15. cuius quadratus 225. cui addendo 16 Q. quadratum ipsius D C. fit 225 + 16 Q. aequalis 25 Q. quadrato scilicet ipsius A C. & tandem 225. aequantur 9 Q. vnde fit 1 N. 5. est ergo A C. vel A B. 25. B C. 40. A D. 15. intelligendum tamen B E cadere extra triangulum.*

Caeterùm non agimus de segmentis basis à perpendiculari factis, quia cùm triangulum est rationale, & segmenta illa sunt rationalia per corollarium secundi lemmatis.

PROBLEMA SECVNDVM.

Triangulum oxygonium scalenum constituere in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo acuto demissa sit rationalis.



Ponatur latus A C. quilibet numerus, vtpote 10. cuius quadratis 100. diuidatur in duos quadratos, vtpote in 64. & 36. quorum latera 8. & 6. & ponatur A D maius horum laterum, puta 8. & D C minus puta 6. & esto B D 1 N. quadrati ergo ipsarum B D. A D. puta 1 Q. + 64. aequantur quadrato ipsius A B. Quare vt A B. sit rationalis, oportet 1 Q. + 64. aequari quadrato. Quoniam verò angulus A ponitur acutus[2] est ratio D C ad A D. minor ratione A D ad
Lemma tertium. B D. ac proinde productus ex B D in D C puta 6 N. minor est quadrato ipsius A D. qui est 64. vt ostendit Clauius ad vigesimã septimi. Ergo cùm diuidendo 64. per 6. fiat 10 $\frac{2}{3}$. patet 1 N. minorem esse debere quàm 10 $\frac{2}{3}$. Aliter reperietur Numeri determinatio, hac arte scilicet. Quia vt trianguli omnes anguli sint acu-
13. secundi. ti,[3] oportet quadratũ cuiuslibet lateris minorem esse aggregato quadratorum ab aliis lateribus. Hoc autem vt sit, oportet quadratũ cuiuslibet lateris minorẽ esse semisse aggregati quadratorũ à singulis lateribus, sumo aggregatũ quadratorum à singulis lateribus, est autẽ quadratus A C. 100. quadratus B C. 1 Q. + 36 + 12 N. quadratus A B 1 Q. + 64. quorũ sũma 2 Q. + 200 + 12 N. cuius semissis 1 Q. + 100 + 6 N. quẽ euidens est maiorẽ esse tũ quadrato ipsius A C 100. tũ quadrato ipsius A B 1 Q. + 64. Restat vt etiã 1 Q. + 100 + 6 N. sit maior quã 1 Q. + 36 + 12 N.

Quare ablatis vtrimque æqualibus, oportet vt 64. sit maior quàm 6 N. Quare diuiso 64. per 6. fit 1 N. minor quàm $10\frac{2}{3}$. vt prius. Itaque quoniam fingentes latus quadrati 1 Q. + 64. ponemus illud 8. – tot numeris, à quorum quadrato auferendo 1. per residuum diuidatur sedecuplum ipsorum numerorum, oportebit hunc quotientem minorem esse quàm $10\frac{2}{3}$. Ponatur ergo numerus Numerorum 1 N. fiet $\frac{16 N}{1 Q - 1}$. minor quàm $10\frac{2}{3}$. & omnia ducendo in 1 Q. – 1. & rursus in 3. fient tandem 48 N. + 32. minores quàm 32 Q. seu 3 N. + 2. minores quàm 2 Q. qua æquatione resoluta cùm fiat 1 N. 2. patet fingendum latus quadrati 8. – tot Numeris qui excedant 2. Ponatur 8. – 5 N. fiet 1 N. $3\frac{1}{3}$. tanta erit B D. Quare A B est $8\frac{2}{3}$. A C 10. B C. $9\frac{1}{3}$. A D. 8.

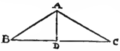
SCHOLIVM.

Hîc etiam loco vnius laterum, præscribi posset ipsa perpendicularis A D. vt puta 12. Tunc ergo quære duos quadratos qui additi ad 144. quadratum ipsius 12. faciant quadratum, hac tamen lege vt vel vtriusque quæsitorum latus sit minus quàm 12. vel si alterum sit maius, alterum minus, maioris ad 12. sit minor ratio, quàm ipsius 12. ad minus vt videlicet constituatur triangulum oxygonium. Quadrati quorum latera minora sunt quàm 12. sunto 81. & 25. Posita ergo A D 12. erit B D. 5. D C 9. atque adeo tota B C. 14. At A B fiet 13. A C. 15. Quadrati verò 256. & 25. si sumantur, quia minor est ratio 16. ad 12. quàm 12. ad 5. Ritè statuetur B D. 5. D C. 16. ac proinde tota B C. 21. erit autem A B. 13. A C. 20.

PROBLEMA TERTIVM.

Triangulum amblygonium scalenum constituere in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo obtuso demissa sit rationalis.

Ponatur A C vt suprà quilibet numerus 10. cuius quadrato in duos quadratos diuiso, ponatur D C. alterum latus 6. & A D. alterum 8. & sit B D 1 N. fiet ergo vt prius 1 Q. + 64. æquandus quadrato. Sed quia ob angulum obtusum maior est ratio B D ad A D. quàm A D ad D C. productus ex B D in D C puta 6 N. maior esse debet quadrato ipsius A D 64. Quare 1 N. debet esse maior quem $10\frac{2}{3}$. si ergo quæras vt suprà determinationem numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies fingendum esse latus illud 8. – tot Numeris qui sint minus quàm 2. sed oportet etiam vt sint plus quàm 1. vt videlicet eorum quadratus excedat 1 Q. Pone ergo 8. – $1\frac{1}{2}$ N. fiet 1 N. $19\frac{1}{5}$. tanta erit B D. ergo tota B C. $25\frac{1}{5}$. A B. $20\frac{4}{5}$. A C. 10. A D. 8. *Lemma tertium.*



Vel ponatur A D quilibet numerus vtpote 12. & quærantur duo quadrati, vt quilibet additus ad 144. quadratum ipsius 12. faciat quadratum, ita tamen vt cuiuslibet quæsitorum quadratorum latus sit maius quàm 12. vel si alterum sit maius, alterum minus, maius ad 12. maiorem habeat rationem, quàm 12. ad minus, ad hoc vt angulus B A C constituatur obtusus per lemma tertium, sumi possunt maiora latera 35. & 16. nam addito quadrato ex 35. ad quadratum ex 12. fit quadratus ex 37. & eidem addendo quadratum ex 16. fit quadratus ex 20. Posita ergo A D. 12. erit B D. 16. D C. 35. tota B C. 51. A B. 20. A C. 37. si autem sumantur latera 35. & 9. quia maior est ratio 35. ad 12. quàm 12. ad 9. erit B D. 9. D C. 35. tota B C. 44. A C. 37. A B. 15. Vel denique si sumas latera 35. & 5. quia etiam maior est ratio 35. ad 12. quàm 12. ad 5. fiet B D. 5. D C. 35. tota B C. 40. A C. 37. A B. 13.

SCHOLIVM.

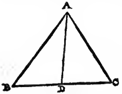
Animaduersione dignum est, posita perpendiculari 12. formari posse sex diuersa triangula in integris, quorum duo sunt oxygonia quæ in scholio præcedentis exposuimus, nimirum 15. 14. 13. & 21. 20. 13. tria sunt amblygonia quæ hic attulimus, primum 51. 37. 20. secundum 44. 37. 15. tertium 40. 37. 13. Restat vnum rectangulum, cuius latera 25. 20. 15. si videlicet segmen-

ta hypotenusa ponantur 9. & 16. inter quae perpendicularis 12. est media proportionalis per octauam sexti.

Cæterùm non proposuimus inuenire triangulum rectangulum scalenum in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo recto demissa sit rationalis. Quia id accidit cuicunque triangulo rectangulo rationali, vt constat ex Corollario lemmatis primi, vim suam mutuante à quarta parte demonstrationis ipsius lemmatis.

PROBLEMA QVARTVM.

Triangulum scalenum, oxygonium, vel amblygonium constituere in rationalibus, vt ab angulo acuto, vel obtuso ducta linea diuidens basim bifariam, sit rationalis.



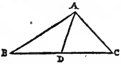
Sit triangulum oxygonium A B C. in quo ducta sit A D. diuidens basim B C. bifariam. Sume quemlibet numerum ex duobus quadratis compositum, vt 13. compositum ex 9. & 4. quorum latera 3. & 2. & minus latus 2. tribue dimidio basis D C. maius verò 3. tribue lineæ A D. [1] quia scilicet ob angulum acutum A D debet esse maior quàm D C. [2] Tum verò quia

Lemma sextum.

Lemma octauum. quadrati ipsarum A B. A C. sunt dupli quadratorum ab ipsis A D. D C. cùm summa quadratorum ab ipsis A D. D C. ponatur 13. erit summa quadratorum ab ipsis A B. A C. 26. Porrò quia 13. componitur ex duobus quadratis, quorum latera 3. & 2. duplum ipsius 13. puta 26. [3] componetur etiam ex duobus quadratis, quorum latera 5. & 1. æqualia scilicet tum summæ, tum interuallo laterum quadratorum ex quibus 13. componitur. Sed si tribuas 5. ipsi A B. & 1. ipsi A C manifestum sequetur absurdum. Quia enim A B ponitur summa ipsorum 3. & 2. & A C. eorundem interuallum. At B C ponitur duplum minoris 2. puta 4. patet addendo duplo minoris interuallum numerorum, fieri summam numerorum, ac proinde latera A C. B C. simul æqualia fore reliquo A B. [4] Quod est absurdum. Superest ergo vt numerum 26. compositum ex duodus quadratis 25. & 1. rursus diuidamus in duos alios quadratos per decimam secundi Diophanti. Ponatur alterum latus 5 − 1 N. alterum 1 + 2 N. fiet summa quadratorum 26 + 5 Q. − 6 N. æqualis 26. vnde fiet 1 N. $\frac{6}{5}$. sunt ergo quæsita latera 3 $\frac{4}{5}$. & 3 $\frac{2}{5}$. Posita igitur A D. 3. erit A B. 3 $\frac{4}{5}$. A C. 3 $\frac{2}{5}$. & B C. 4. vel omnia ducendo in 5. fiet A B. 19. A C. 17. B C. 20. ipsa A D. 15.

7. 2. porism. *20. primi.*

Contraria ratione in triangulo amblygonio A B C. statuemus D C. 3. & A D.



Lemma septimum. *Lemma octauum.* *7. 2. porism.*

2. [5] quia A D. minor est quàm D C. Tum vt prius quia quadrati ipsarum A D. D C. ponuntur 13. [6] erunt quadrati ipsarum A B. A C. 26. qui cùm sit duplus numeri ex duobus quadratis compositi, [7] componetur & ipse ex duobus quadratis, sed maius latus 5. est summa ipsarum A D. B C. & minus latus est interuallum earundem, puta 1. Quare si A B ponas 5. A C. 1. cùm maioris duarum A D. D C. dupla sit B C. si aggregato earundem A D. D C. puta ipsi A B. addas earundem interuallum A C. fiet aggregatum ipsarum A B. A C. [8] æquale ipsi B C. [9] Quod est absurdum. Quare rursus 26. diuidendus est in duos alios quadratos, vt factum est suprà, sint ergo eorum latera $\frac{19}{5}$. & $\frac{17}{5}$. Posita ergo A D. 2. fiet B C. 6. A B $\frac{19}{5}$. A C $\frac{17}{5}$. vel omnia ducendo in 5. erit A B. 19. A C. 17. B C. 30. A D. 12.

23. 1. porism. *20. primi.*

SCHOLIVM.

Euidens est tam in oxygonio, quàm in amblygonio ipsas A D. D C. poni posse in qualibet proportione, dum semper habeatur ratio lemmatum 6. & 7.

Deinde sicut prius præscribuntur ipsa A D. D C. ita possunt prius ipsa A B. A C. præscribi, vt ex ipsis indagentur A D. D C. verbi gratia ponatur A B. 3. A C. 1. erit summa quadratorum 10. cuius semissis 5.[1] *æquatur quadratis ipsarum A D. D C. sed & ipse 5. componitur ex duobus quadratis,*[2] *quia est semissis numeri ex duobus quadratis compositi, sed latera ipsorum non possunt applicari ipsis A D. D C. ob causas suprà allatas. Quare oportet rursus diuidere 5. in duos alios quadratos, ponantur eorum latera 1 + 7 N. & 2 − 5 N. fiet summa quadratorum 5 + 74 Q. − 6 N. æqualis 5. vnde erit 1 N. $\frac{3}{37}$. Sunt ergo latera quadratorum 1 $\frac{21}{37}$. & 1 $\frac{22}{37}$. Quare posita A B. 3. A C. 1. si libet facere triangulum oxygonium, pones A D. 1 $\frac{21}{37}$. B D. 1 $\frac{22}{37}$. vnde tota B C. fiet 3 $\frac{7}{37}$. At si velis constituere amblygonium, pones A D. 1 $\frac{21}{37}$. B D. 1 $\frac{22}{37}$. totam B C. 3 $\frac{7}{37}$.* Lemma octauum. 6. 2. porif.

Moneo tamen si absque vlla cautione numeri ex duobus quadratis compositi, rursus diuidantur in alios duos quadratos per solùm artificium decimæ secundi Diophanti, accidere posse vt in idem absurdum incidatur, ad quod vitandum huiusmodi subdiuisio instituitur, vt scilicet inueniantur latera quadratorum quæ minimè possint applicari lateribus trianguli. Quare tutius erit huiusmodi numeros diuidere per artificium duodecimæ quinti, in duos quadratos, quorum exiguum sit interuallum, sic enim in tale incommodum nunquam incurretur.

Cæterùm proposui triangulum scalenum, non autem Isosceles, inuenire, quia cùm in triangulo Isoscele linea diuidens basim bifariam, sit perpendicularis ad basim, non differret huiusmodi problema à primo.

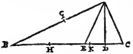
Non proposui etiam de triangulo rectangulo scaleno, quia in omni triangulo rectangulo rationali problema perficitur, cùm linea diuidens hypotenusam bifariam sit semper æqualis dimidio hypotenusæ per lemma quintum.

Supersunt elegantissima duo problemata quibus quæritur triangulum tum oxygonium, tum amblygonium, vt acuto vel obtuso angulo bifariam scisso, numerus angulum secantis sit rationalis; quæ sanè magis accedunt ad quæstionem Diophanti, quamuis sint longè subtiliora.

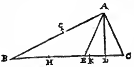
PROBLEMA QVINTVM.

Triangulum oxygonium inuenire in rationalibus, vt numerus angulum acutum bifariam secantis sit rationalis.

Esto triangulum oxygonium A B C. & ducta perpendicularis A D. & linea A E secans angulum B A C bifariam, oportet facere omnia latera trianguli rationalia, & lineam A E rationalem. Sumatur segmento C D. æquale D K vt K B sit interuallum segmentorum à perpendiculari factorum. Item segmento C E sumatur æquale E H. vt H B sit interuallum segmentorum à secante angulum factorum. Denique sumatur A G. æqualis ipsi A C. vt B G. sit interuallum laterum A B. A C. Quoniam ergo[3] vt est B K ad B G. sic est B G. ad B H. sumantur tres quicunque numeri proportionales, puta 25. 20. 16. & ponatur B K. 25. B G. 20. B H. 16. & statuatur A C seu A G 1 N. erit ergo tota A B 1 N. + 20. ac proinde interuallum quadratorum ab ipsis A B. A C. est 40 N. + 400. quo diuiso per Lemma quartam.



interuallum segmentorum basis à perpendiculari factorum, puta per 25.[4] prodit tota basis B C. $\frac{8}{5}$ N. + 16. cui si addatur & adimatur interuallum segmentorum, puta 25. semissis summæ & residui ostendet ipsa segmenta. Fiet ergo minus segmentum D C. $\frac{4}{5}$ N. − $\frac{9}{2}$. cuius quadratus $\frac{16}{25}$ Q. + $\frac{81}{4}$. − $\frac{36}{5}$ N. qui si auferatur à quadrato lateris A C. puta ab 1 Q. remanet quadratus ipsius perpendicularis. A D nimirum $\frac{9}{25}$ Q. + $\frac{36}{5}$ N. − $\frac{81}{4}$. cui si addatur quadratus ipsius E D. puta $\frac{81}{4}$. (etenim E D est semissis ipsius H K interualli interuallorum B K. B H vt constat ex Corollario lemmatis quarti. Quare cùm interuallum ipsorum 25. & 16. sit 9. cuius semissis est $\frac{9}{2}$. tanta erit E D. & eius quadratus $\frac{81}{4}$.) fiet quadratus lineæ A E. nimirum $\frac{9}{25}$ Q. + $\frac{36}{5}$ N. Quamobtem vt A E sit rationalis, oportet $\frac{9}{25}$ Q. + $\frac{36}{5}$. æquari quadrato, & omnia in 25. ducantur, tum diuidantur per 9. fit 1 Q. + 20 N. æquandus quadrato, & facilis quidem est æquationis ratio, sed oportet prius de- Lemma secundum.



13. *secundi.*

terminare de Numero. Quia enim volumus triangulum A B C. esse oxygonium, necesse est quadratum cuiuslibet lateris, minorem esse aggregato quadratorum à reliquis duobus lateribus, seu quod idem est, oportet semissem aggregati quadratorum à singulis lateribus, maiorem esse quadrato cuiuslibet lateris. Cùm ergo sint tria latera 1 N. 1 N. + 20. $\frac{8}{5}$ N. + 16. erit aggregatum quadratorum à singulis $\frac{178}{25}$ Q. + $\frac{456}{5}$ N. + 656. cuius semissis est $\frac{89}{25}$ Q. + $\frac{228}{5}$ N. + 328. qui quidem vt apparet maior est quadrato primi lateris, sed de aliis duobus non statim apparet. Oportet ergo vt $\frac{89}{25}$ Q. + $\frac{228}{5}$ N. + 328. sit maior quàm 1 Q. + 40 N. + 400. qua æquatione resoluta fit 1 N. maior quàm $\frac{45}{8}$. Rursus oportet vt $\frac{89}{25}$ Q. + $\frac{228}{5}$ N. + 328. sit maior quàm $\frac{64}{25}$ Q. + $\frac{256}{5}$ N. + 256. qua æquatione resoluta, fit 1 N. minor quàm $\frac{44}{7}$. Oportet ergo ita fingere latus quadrati 1 Q. + 20 N. vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{45}{8}$. minor quàm $\frac{44}{7}$. Porrò fiet valor Numeri si à quodam quadrato auferatur 1. & per residuum diuidatur 20. Ponatur ergo quadratus quæsitus quo cum instituenda est æquatio 1 Q. fiet $\frac{20}{1 Q. - 1}$. maior quàm $\frac{45}{8}$. minor quàm $\frac{44}{7}$. Quare vtraque æquatione resoluta constat quadratum quæsitum maiorem esse debere quàm 3 $\frac{8}{11}$. minorem quàm 4 $\frac{5}{9}$. Ponatur verbi gratià 4. & sint 1 Q. + 20 N. æquales 4 Q. fiet 1 N. $\frac{20}{3}$. latus scilicet A C. erit autem A B $\frac{80}{3}$. B C item $\frac{80}{3}$. segmenta B D. D C. fient $\frac{155}{6}$. & $\frac{5}{6}$. segmenta verò B E. E C. erunt $\frac{64}{3}$. & $\frac{16}{3}$. Ipsa E D $\frac{9}{2}$. Quamobrem à quadrato ipsius A C. hoc est à $\frac{400}{9}$. auferendo quadratum ipsius D C. puta $\frac{25}{36}$. remanet $\frac{1575}{36}$. quadratus perpendicularis A D. cui si addas quadratum ipsius E D. puta sub eadem denominatione $\frac{729}{36}$. fit $\frac{2304}{36}$. seu 64. quadratus lineæ A E. Ac proinde ipsa linea A E est 8. & rationalis vt requirebatur. Quod si omnia latera per 3. multiplices, habebis omnia in integris, eritque A B. 80. A C. 20. B C. 80. A E. 24.

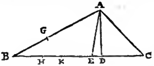
SCHOLIVM.

Non curamus vtrum perpendicularis A D. sit rationalis, an non; cùm sufficiat latera trianguli vnà cum linea A E. facere rationalia.

Porrò infinita reperiri possunt hac arte triangula, & quorum latera diuersas seruent rationes, tum quia pro interuallis B K. B G. B H. sumi possunt tres proportionales diuersi ab ipsis 25. 20. 16. & in diuersa ratione, vnde diuersa contingent solutiones, tum etiam quia quadratus 1 Q. + 20 N. diuersis quadratis æquari potest, cùm inter 3 $\frac{8}{11}$. & 4 $\frac{5}{9}$. infiniti sumi possint quadrati. Verbi gratia si æques 1 Q. + 20 N. cum $\frac{361}{100}$. Q. fiet 1 N. $\frac{2000}{261}$. & si sumus minima similium fiet A B. 1805. A C. 500. B C. 1844. A E. 570. segmentum B E. 1444. segmentum E C. 400. & sic de aliis.

PROBLEMA SEXTVM.

Triangulum amblygonium constituere in rationalibus, vt obtuso angulo bifariam scisso, numerus angulum secantis sit rationalis.

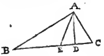


Esto triangulũ amblygonium A B C. perpendicularis A D. angulum secans A E. interuallum segmentorum B D. D C. à perpendiculari factorum sit B K. interuallum autem segmentorum B E. E C. à secante angulum factorum esto B H. ac denique interuallum laterum A B. A C. sit B G. igitur ob demonstrata lemmate quarto sumemus, vt suprà tres numeros proportionales, vt 25. 20. 16. & statuemus B K. 25. B G. 20. B H. 16. tum posito A C 1 N. fiet vt prius A B 1 N. + 20. & B C $\frac{8}{5}$ N. + 16. Quare tandem inuenietur quadratus ipsius A E $\frac{4}{25}$ Q. + $\frac{16}{5}$ N. Quare omnia ducendo in 25. tum diuidendo per 9. fiet 1 Q. + 20 N. æquandus quadrato. Quoniam verò volumus

lumus angulum B A C esse obtusum, oportet vt quadrati simul, laterum AB. A C. sint minores quadrato baseos BC. Quare 2 Q. + 40 N. + 400. minus esse debet quàm $\frac{41}{25}$ Q. + $\frac{256}{5}$ N. + 256. vnde tandem 144. minor esse debet quàm $\frac{9}{25}$ Q. + $\frac{56}{5}$ N. & re in integris ad minimos deducta fit 1800. minor quàm 7 Q. + 140 N. Qua æquatione vt decet, resoluta, fit 1 N. maior quàm 9. Oportet igitur æquantes quadrato 1 Q. + 20 N. efficere 1 N. maiorem quàm 9. Quamobrem cùm fiat 1 N. quodam quadrato vnitate multato, & per residuum diuidendo 20. si ponatur quæsitus quadratus 1 Q. fiet $\frac{20}{1 Q - 1}$. maior quàm 9. & tandem 29. maior quàm 9 Q. Quare oportet quæsitum quadratum, minorem esse quàm 3 $\frac{2}{9}$. Ponatur $\frac{25}{16}$. ergo 1 Q. + 20 N. æquatur $\frac{25}{16}$ Q. & fit 1 N. $\frac{320}{9}$. latus scilicet A C. Quare A B est $\frac{500}{9}$. B C. $\frac{656}{9}$. segmenta B D. D C. $\frac{881}{18}$ & $\frac{431}{18}$. At segmenta B E. E C. $\frac{400}{9}$ & $\frac{256}{9}$. denique A E fit $\frac{240}{9}$. & si sumas minimos similium, fiet A B 125. A C 80. B C 164. A E 60.

SCHOLIVM.

Hîc etiam perpendicularis curam non agimus, quæ ferè semper irrationalis reperitur. Cæterùm solutiones diuersæ totidem modis dari possunt, quot in præcedente, & easdem prorsus ob causas. Sed animaduersione dignum est, plerumque contingere vt linea A E reperiatur æqualis ipsi lateri minori A C. cùm scilicet E D. D C sunt æquales, tunc enim, vt patet, triangulum A E D. est æquangulum & æquale triangulo A D C.



Verbi gratia si ponas 1 Q. + 20 N. æquari $\frac{25}{9}$ Q. fiet 1 N. $\frac{45}{4}$. latus scilicet A C. & si sumas minima similium, erit A B 125. A C 45. B C 136. segmenta B D. D C. 118. & 18. At segmenta B E. E C. 100. & 36. Ipsa denique A E 45. æqualis scilicet lateri A C. Interdum contingit A E æquari ipsi E C. vt si ponas 1 Q. + 20 N. æquari $\frac{16}{9}$ Q. fiet enim 1 N. $\frac{180}{7}$. latus scilicet A C. & sumendo minima similium erit A B 640. A C. 360. B C 800. segmenta B D. D C. 575. & 225. At segmenta B E. E C. 512. & 288. Ipsa denique A E 288 æqualis segmento E C.

Verùm hæc de his dixisse sufficiat, & subtilis non minus quàm iucundæ speculationis hîc finis esto. Ad Diophantum redeamus.

QVÆSTIO XIX.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ numerus cum hypotenusæ numero faciat quadratum, at circumferentiæ numerus sit cubus. Ponatur areæ numerus 1 N. hypotenusa verò statuatur vnitatum aliquot quadratarum cum defectu 1 N. Esto 16 − 1 N. Cùm ergo posuerimus areá 1 N. qui fit ex lateribus circa rectum erit 2 N. Atqui 2 N. producuntur

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ τετράγωνον. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος. τετάχθω ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμοῦ α. ὁ δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ αὐτοῦ μονάδων τινῶν τετραγωνικῶν λεῖψει ἀριθμοῦ α. ἔστω μονάδων ις λεῖψει ἀριθμοῦ α. ἀλλ᾽ ἐπεὶ ὑποτιθέμεθα τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ εἶναι ἀριθμοῦ α. ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γίνεται ἀριθμῶν β. ἀλλὰ ἀριθμοὶ β. περιέχονται

ἀπὸ ἀριθμοῦ α. μονάδων β. ἐὰν οὖν τάξωμεν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν μονάδων β. ἔσται ἡ ἑτέρα ἀριθμοῦ α. καὶ γίνεται ἡ περίμετρος μ° ιη. καὶ οὐκ ἔστι κύβος. ὁ δὲ ιη. γέγονεν ἔκ τινος τετραγώνου, καὶ μονάδων β. δεήσει ἄρα εὑρεῖν τετράγωνόν τινα, ὃς προσλαβὼν μονάδας β. ποιεῖ κύβον. ὥστε κύβον τετραγώνου ὑπερέχειν μονάδας β. τετάχθω οὖν ἡ μὲν τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ς° α. μ° α. ἡ δὲ τοῦ κύβου ἀριθμοῦ α. λεῖψει μ° α. γίνεται ὁ μὲν τετράγωνος δ^υ α ςς β μ° α. ὁ δὲ κύβος κ^υ α ςς γ ⋔ δ^υ γ μ° α. θέλω οὖν τὸν κύβον τὸν τετράγωνον ὑπερέχειν δυάδι. ὁ ἄρα τετράγωνος μετὰ δυάδος τουτέστι δ^υ α. ςς β. μ° γ. ἴσος ἐστὶ κ^υ α. ςς^οἱ γ. ⋔ δ^υ γ. μ° α. ὅθεν ὁ ς° εὑρίσκεται μ° δ. ἔσται οὖν ἡ μὲν τοῦ τετραγώνου πλευρὰ μ° ε. ἡ δὲ τοῦ κύβου μ° γ. αὐτοὶ ἄρα, ὁ μὲν τετράγωνος μ° κε. ὁ δὲ κύβος μ° κζ. μεθυφίσταμαι οὖν τὸ ὀρθογώνιον, καὶ τάξας αὐτοῦ τὸ ἐμβαδὸν ἀριθμοῦ α. τάσσω τὴν ὑποτείνουσαν μ° κε. λεῖψει ἀριθμοῦ α. μένει δὲ καὶ ἡ βάσις μ° β. ἡ δὲ κάθετος ἀριθμοῦ α. λοιπόν ἐστι τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ἴσον εἶναι τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. γίνεται δὲ δ^υ α. μ° χκε ⋔ ςς ν. ἔσται ἴση δ^υ α. μ° δ. ὅθεν γίνεται ὁ ς° μ° χκα^ν. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ μένει.

ex 1 N. in 2. si ergo alterum circa rectum statuamus 2. erit alterum 1 N. & fiet circumferentia 18. qui non est cubus. At 18. ortus est è quodam quadrato, & vnitatibus 2. Oportet itaque inuenire quadratum aliquem, qui binario adiecto cubum faciat; ita vt cubus quadratum superet binario. Ponatur igitur quadrati latus 1 N. + 1. At cubi latus 1 N. - 1. fit quadratus quidem 1 Q. + 2 N. + 1. At cubus 1 C. + 3 N. - 3 Q. - 1. volo ergo cubum superare quadratum binario. Quare quadratus cum binario, puta 1 Q. + 2 N. + 3. æqualis est 1 C. + 3 N. - 3 Q. - 1. vnde inuenitur 1 N. 4. est igitur quadrati latus 5. cubi vero 3. ipse quadratus 25. cubus 27. Transmuto itaque rectangulum, & ponens aream illius 1 N. statuo hypotenusam 25. - 1 N. Manet autem basis 2. & cathetus 1 N. Restat vt quadratus hypotenusæ æqualis sit quadratis laterum circa rectum. Fit ergo 1 Q. + 625 - 50 N. æqualis 1 Q. + 4. vnde fit $\frac{621}{50}$. Ad positiones. & constat.

IN QVAESTIONEM XIX.

TRIA hîc postulantur. Primò vt exhibeatur triangulum rectangulum in numeris rationalibus. Secundò vt area cum hypotenusa faciat quadratum. Tertiò vt ambitus trianguli, hoc est summa trium laterum, fit numerus cubus. Primùm autem, vltimum est quod curat Diophantus, æquando quadratos laterum circa rectum, quadrato hypotenusæ. Reliqua duo postulata præstat ipsis

positionibus ingeniosè factis. Nam vt area cum hypotenusa faciat quadratum, posita area 1 N. ponit hypotenusam quadratū aliquem numerum vnitatum cum defectu 1 N. puta 16 – 1 N. Tum verò quia area est semissis plani sub lateribus circa rectum contenti, sequitur planum sub lateribus circa rectum esse 2 N. Quare vt habeantur ipsa latera circa rectum, sumendi duo numeri quorum, mutuo ductu fiant 2 N. Ex infinitis autem huiusmodi numeris seliguntur 1 N. & 2. quia in hypotenusa positus est 1 N. cum signo defectus, ac proinde addendo simul tria latera, eliduntur Numeri, & manet summa laterum, solus vnitatum Numerus, compositus scilicet ex quadrato illo qui positus est in hypotenusa, & ex binario qui ponitur pro altero laterum circa rectum. Cùm ergo summa hæc debeat conficere cubum, apparet necessitas secundæ positionis, qua inuestigatur quadratus qui adsumpto binario cubum creet.

Hoc sanè loco deuoluimur in æquationem complexam, in qua duæ species, duabus speciebus æquales sunt. Cùm enim 1 Q. + 2 N. + 3. æquentur 1 C. + 3 N. – 3 Q. – 1. fiunt tandem 1 C. + 1 N. æquales 4 Q. + 4. Nec verò sciri potest qua ratione huiusmodi æquationem resoluat Diophantus, cùm in libris eius qui extant, nusquam id docuerit. Certè regula generalis & perfecta hactenus ignoratur. Particularis autem quæ in hoc casu locum habet, traditur à multis, & est huiusmodi. Si 1 C. + 1 N. æquentur cuilibet Quadratorum & vnitatum numero, quorum tamen multitudo sit æqualis, fit 1 N. ipso Quadratorum, vel vnitatum numerus. Quod facilè demonstratur. Etenim vt se habet cubus ad quadratum, sic Numerus ad vnitatem. Quare & duo antecedentes simul nempe 1 C. + 1 N. se habebunt, ad consequentes simul, nempe ad 1 Q. + 1. sicut 1 N. ad 1. Quare si quatuor proportionalium sumantur secundi & quarti æquè multiplices, verbi gratia quadruplices, erit & 1 C. + 1 N. ad 4 Q. + 4. sicut 1 N. ad 4. Ac proinde si 1 C. + 1 N. ponantur æquales 4 Q. + 4. erit & 1 N. æqualis 4. Quod erat propositum.

Eadem de causa si 1 C. + 1 Q. æquentur certo Numerorum & vnitatum numero erit 1 Q. æqualis ipsi numero Numerorum vel vnitatum, ac proinde si numerus ille sit quadratus, erit solutio rationalis. Vt si 1 C. + 1 Q. ponantur æquales 9 N. + 9. fiet 1 Q. 9. & 1 N. 3. & ratio est quia 1 C. ad 1 N. se habet vt 1 Q. ad 1.

Necesse igitur fuit tam aptè fingere latus quadrati, & latus cubi, vt tandem prodirent 1 C. + 1 N. æquales quadratis & vnitatibus multitudine æqualibus, vt pote 4 Q. + 4. sed qui ratione certa id fecerit Diophantus, ita vt modus ab illo vsurpatus aliis huiusmodi quæstionibus applicari possit, non constat ex eius verbis, & verò perdifficile arbitror id diuinare. Sit enim propositum quærere quadratum, cui addendo 4. fiat cubus, quomodo quæso fingenda sunt latera quadrati & cubi, vt commoda proueniat æquatio, & solutio sit rationalis? Fateor equidem me ignorare, & ei qui tale quid docuerit, non paruam habebo gratiam. Sanè quod propositum est, non est prorsus impossibile, nam non vnus, sed plures quadrati quæstioni satisfacientes possunt inueniri, quales sunt 4. & 121. quorum vtrique si adiicias 4. fiunt cubi 8. & 125. fortuita ergo videtur Diophanti operatio, nisi quis firmiora ad eam fulciendam ponat fundamenta. Et hac ratione operando vnica tantum reperitur solutio, cùm tamen quæstio sit de earum genere quæ plures solutiones admittunt.

Huic autem vltimo incommodo nostra subueniet industria, tali expedito lemmate.

Dato quadrato qui adsumpto dato numero, cubum faciat, inuenietur alius quadratus idem præstans.

Sit datus quadratus 25. qui adsumpto 2. cubum facit, puta 27. inueniendus est alius quadratus, qui præstet idem. Fingatur eius latus 5 – 1 N. fiet quadratus 25. – 10 N. + 1 Q. cui addendo 2. fit 27 – 10 N. + 1 Q. æquandus cubo. Cuius latus fingo 3 – tot Numeris, vt ducti in triplum quadrati ipsius 3. nempe

in 27. efficiant 10. habebo autem talem Numerorum numerum diuidendo 10. per 27. estque $\frac{10}{27}$. fingatur ergo latus cubi 3 − $\frac{10}{27}$ N. fiet cubus 27 − 10 N. + $\frac{900}{729}$ Q. − $\frac{1000}{19683}$ C. æqualis 27 − 10 N. + 1 Q. Quare tandem $\frac{19}{81}$ Q. æquantur $\frac{1000}{19683}$ C. & fit 1 N. 4 $\frac{49977}{81000}$. est ergo latus quæsiti quadrati $\frac{31023}{81000}$. ipse quadratus $\frac{962426529}{6561000000}$. cui adiiciendo binarium fit cubus $\frac{14084426529}{6561000000}$. vel in minimis $\frac{2146689}{1000000}$. cuius latus $\frac{129}{100}$.

Simili ratione si datus sit quadratus 4. cui adiciendo 4. fit cubus 8. inuenietur alius quadratus idem præstans. Etenim pone latus quadrati 2 + 1 N. fiet quadratus auctus quaternario 8 + 4 N. + 1 Q. æquandus cubo. Cuius latus fingatur 2 + tot Numeris, vt ducti in triplum quadrati ipsius 2. puta in 12. faciant 4. erit ergo numerorum numerus $\frac{1}{3}$. & fingatur latus cubi 2 + $\frac{1}{3}$ N. fietque cubus 8 + 4 N. + $\frac{2}{3}$ Q. + $\frac{1}{27}$ C. æqualis 8 + 4 N. + 1 Q. & tandem $\frac{1}{3}$ Q. æquatur $\frac{1}{27}$ C. & fit 1 N. 9. Est ergo latus quadrati 11. ipse quadratus 121. qui adsumpto 4. facit cubum 125.

Hic autem posui latus quadrati 2 + 1 N. non autem 2 − 1 N. quia si posuissem 2 − 1 N. oportuisset latus cubi poni 2 − $\frac{1}{3}$ N. Tuncque in cubo tam Numerorum quàm cuborum numeri affecti fuissent signo minoris. Quare vt in præcedenti exemplo, vnitates quidem & Numeri se mutuo elisissent. At $\frac{1}{27}$ C. in alteram æquationis partem concessisset ob appositum signum defectus. Quábrem 1 Q. + $\frac{1}{27}$ C. mansissent æquales $\frac{2}{3}$ Q. Quod est impossibile, quia 1 Q. maior est quàm $\frac{2}{3}$ Q. Ad simile vitandum incommodum contraria ratione positiones institui in superiore exemplo, quia videlicet 1 Q. minor erat quàm $\frac{900}{729}$ Q. vnde etiam si dato quadrato 121. alium quæreremus qui adsumpto 4. faceret cubum, poneremus latus quadrati 11 − 1 N. & cubi 5 − $\frac{22}{75}$ N. & inueniremus adhuc alium quadratum diuersum ab ipsis 4. & 121.

Porrò examen operationis Diophanti tale est. fit 1 N. $\frac{621}{50}$. Ergo sit hypotenusa quæsiti trianguli 12. $\frac{29}{50}$. basis 2. cathetus 12 $\frac{21}{50}$. Estque summa laterum cubus 27. At hypotenusa cum area quæ est 12. $\frac{21}{50}$. facit quadratum 25.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος. ἐὰν δὴ ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου τάξωμεν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμὸν α. τὸν δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μονάδων κυβικῶν λεῖψει ἀριθμοῦ α. ἔρχεται ζητεῖν τίς κύβος μετὰ μονάδων β. ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ ἀριθμοῦ α. λεῖψει μονάδος α. ὁ κύβος γίνεται [μετὰ μονάδων β] κύβου α. ςς γ. μ° α. λεῖψει δυ γ. [ταῦτα ἴσα] τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς α. α^β. μ° α. καὶ γίνεται ὁ ς μ° κα^δ. ἔσται ἄρα

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adscito numero hypotenusæ faciat cubum; At numerus circunferentiæ sit quadratus. Si perinde vt in præcedente areæ numerum constituamus 1 N. numerum vero hypotenusæ vnitatum aliquot cubicarum − 1 N. eò deuenitur vt quærendum sit quis cubus adscito binario faciat quadratum. Ponatur cubi latus 1 N. − 1. fit cubus adiecto binario 1 C. + 3 N. + 1 − 3 Q. æquandus quadrato. Esto quadrato à latere 1 $\frac{1}{2}$ N. + 1. & fit 1 N. $\frac{21}{4}$. erit igitur

cubi latus $\frac{17}{4}$. Ipse verò cubus $\frac{4913}{64}$. Pono rursus areæ numerum 1 N. Hypotenusam verò $\frac{4913}{64}$. − 1 N. Habemus autem & basim 2. catherum verò 1 N. & si æquemus quadratum hypotenusæ, quadratis laterum circa rectum, inueniemus numerum rationalem.

ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ ιζ δ. αὐτὸς ἄρα ἔσται, δϡιγ ξδ. τάσσω πάλιν Ⓝ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ς α. τὴν δὲ ὑποτείνουσαν μο δϡιγ ξδ. λείψει ς α. ἔχομεν δὲ καὶ τὴν βάσιν μο β. τὴν δὲ κάθετον ς α. καὶ ἐὰν ἰσώσωμεν Ⓝ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετραγώνοις, εὑρήσομεν Ⓝ ἀριθμὸν ῥητόν.

IN QVAESTIONEM XX.

PARVM differt huius quæstionis tractatio, à præcedentis tractatione, vt satis indicant ipsa Diophanti verba. Pendet itaque solutio à lemmate illo, quo quæritur cubus qui adiecto binario, quadratum faciat. Vbi subtili sanè artificio ponitur cubi latus 1 N. − 1. vt in cubo repetiatur − 1. cui adiiciendo binariũ fit + 1. Aliter enim, nisi in cubo binario aucto numerus vnitatũ esset quadratus, nõ posset æquari quadrato. Ponitur autẽ latus quadrati 1 + tot numeris qui sint dimidium Numerorum in cubo contentorum, puta $\frac{3}{2}$ N. dimidium de 3 N. vt scilicet duplum illorum æquet Numeros in cubo contentos, sic cùm & vnitates & Numeri multitudine æquales vtrimque se mutuo elidant, manet æqualitas inter cubos & Quadratos, puta inter 1 C. & $\frac{21}{4}$ Q. Porrò accidit vt cubo adiiciendo binarium, fiat quadratus, quia 2. componitur ex cubo & ex quadrato Quare licet pulchrum problema vniuersaliter proponere.

Dato quouis numero composito ex cubo, & ex quadrato, reperietur cubus qui adsumpto dato numero, quadratum faciat.

Sit datus 17. compositus ex cubo 8. & ex quadrato 9. quæro cubum qui adsumpto 17. faciat quadratum. Ponatur latus cubi 1 N. − 2. fiet cubus 1 C. + 12 N. − 6 Q. − 8. cui adiiciendo 17. fit 1 C + 12 N. − 6 Q. + 9. æquandus quadrato, cuius latus, pono 3 + tot numeris quorum duplum per 3. multiplicatum, hoc est quorum sextuplum æquet 12 N. in cubo contentos. Fingetur ergo latus quadrati 3 + 2 N. fiet quadratus 9 + 12 N. + 4 Q. æqualis 1 C. + 12 N. − 6 Q. + 9. & fit 1 N. 10. Est ergo cubi latus 8. cubus 512. cui adiiciendo 17. fit 529. quadratus à latere 23. Idemque in similibus eadem semper ratione perficietur. Nam semper latus cubi ponetur 1 N. − latere cubi, ex quo datus numerus componitur, & sic in cubo huiusmodi binomij repetietur earumdem vnitatum cubus affectus signo minoris, cui addendo datum numerum, fiet vnitatum numerus æqualis quadrato, ex quibus datus numerus componitur.

Posset autem lemma Diophanti mutata paulum operatione æquè benè solui. Ponatur latus quadrati 1 N. + 1. erit ipse quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. vnde auferendo binarium, manet 1 Q. + 2 N. − 1. æquandus cubo, cuius latus fingam à tot Numeris − 1. vt eorum triplum æquet 2 N. positos in quadrato. Fingam ergo latus cubi $\frac{2}{3}$ N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{63}{8}$. Quare latus quadrati vt prius erit $\frac{71}{8}$. latus cubi $\frac{17}{4}$. superest vt integram quæstionis solutionem exhibeamus, quam omisit Diophantus ob molestas fractiones. Quadratus hypotenusæ fit $\frac{24137569}{4096}$. + 1 Q. − $\frac{4913}{32}$. N. æqualis quadratis laterũ circa rectum, puta 1 Q. + 4. Quare tandem manent $\frac{4913}{32}$ N. æquales $\frac{24121185}{4096}$ Q. & fit 1 N. $\frac{24121185}{628864}$. æqualis areæ, itemque vni laterum circa rectum, alterum verò est 2. hypotenusa denique [illegible]. quæ addita areæ facit cubum $\frac{4913}{64}$. At summa laterum est $\frac{5041}{64}$ quadratus à latere $\frac{71}{8}$.

QVÆSTIO XXI.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον, ὁ δ' ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος. τετάχθω τὸ ὀρθογώνιον ἀπὸ ς^ος ἑνὸς ἀορίστου [καὶ ἀπὸ τῆς μονάδι μείζονος αὐτοῦ] ἔστω δὴ ἀπὸ ς^ων ᾱ. καὶ ἀπὸ ς^ων ᾱ. μ^ο ᾱ. ἔσται ἄρα ἡ μὲν κάθετος ςς β̄. μ^ο ᾱ. ἡ δὲ βάσις δ^υ β̄. ςς β̄. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δ^υ β̄. ςς β̄. μ^ο ᾱ. λοιπόν ἐστι τὴν περίμετρον εἶναι κύβον. ἔστω δὲ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ ἡ μὲν περίμετρος δ^υ δ̄. ςς ϛ̄. μ^ο β̄. ἴση κύβῳ. καὶ ἔστι σύνθετος ἀριθμός. περιέχεται γὰρ ὑπὸ ςς δ̄. μ^ο β̄. καὶ ς^ων ᾱ. μ^ο ᾱ. ἐὰν οὖν ἑκάστην πλευρὰν μερίσωμεν παρὰ ς^ων ᾱ. μ^ο ᾱ. ἕξομεν τὴν περίμετρον αὐτῶν ςς δ̄. μ^ο β̄. ἴσην κύβῳ. λοιπὸν ἄρα τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ μετὰ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ ὁ μὲν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ κ^υ β̄. δ^υ γ̄. ς^ων ᾱ. ἐν μορίῳ δ^υ ᾱ. ςς β̄. μ^ο ᾱ. ἡ δὲ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ςς β̄ μ^ο ᾱ ἐν μορίῳ ς^ων ᾱ μ^ο ᾱ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν τὰ δύο εἰς τὸ αὐτὸ μόριον γίνονται κ^υ β̄. δ^υ ε̄. ςς^οι δ̄. μ^ο ᾱ. [ἐν μορίῳ δ^υ ᾱ ςς β̄ μ^ο ᾱ. ἐὰν δὲ μερίσωμεν παρὰ τὸ μόριον, γίνεται ςς^οι β̄ μ^ο ᾱ. ὥστε τὰ δύο συντεθέντα] ποιεῖν ςς^οι β̄ μ^ο ᾱ. ἴσα τετραγώνῳ. ἐζητοῦμεν δὲ καὶ ςς^οι δ̄ μ^ο β̄. ἴσους εἶναι κύβῳ.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adſcito vno laterum circa rectum, faciat quadratum, at circumferentiæ numerus ſit cubus. Statuatur triangulum ab aliquo numero indefinito, & ab alio qui eum vnitate ſuperet. Eſto itaque ab 1 N. & ab 1 N. + 1. Erit igitur cathetus 2 N. + 1, Baſis 2 Q. + 2 N. hypotenuſa 2 Q. + 2 N. + 1. Reſtat vt circumferentia ſit cubus, & numerus areæ cum vno laterum circa rectum faciat quadratum. Fit autem circumferentia 4 Q. + 6 N. + 2. æqualis cubo. Et eſt numerus compoſitus quem metitur 4 N. + 2, per 1 N. + 1. ſi ergo vnumquodque latus partiamur per 1 N. + 1. habebimus circumferentiam 4 N. + 2. æqualem cubo. Reſtat igitur vt areæ numerus adſcito vno laterum circa rectum faciat quadratum. Fit autem areæ numerus 2 C. + 3 Q. + 1 N. ſub denominatione partis 1 Q. + 2 N. + 1. vnum verò laterum circa rectum 2 N. + 1. ſub denominatione partis 1 N. + 1. & ſi hæc duo ad eiuſdem denominationis partem reducamus, fiunt 2 C. + 5 Q. + 4 N. + 1. ſub denominatione partis 1 Q. + 2 N. + 1. & ſi partiamur in denominatorem partis fiunt 2 N. + 1. Ita vt duo hæc compoſita faciant 2 N. + 1. æqualia quadrato. Quærebamus autem etiam 4 N. + 2. æqualia cubo.

Igitur eò deducta res est, vt inueniamus cubum quadrati duplum. Est autem 8. respectu 4. sint igitur 4 N. + 2. æquales 8. & fit 1 N. $1\frac{1}{2}$. Erit ergo rectangulum $\frac{8}{5}$. $\frac{15}{5}$. $\frac{17}{5}$. & manet.

καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν κύβον τετραγώνου διπλασίονα. ἔστι δὲ ὁ η̄. μονάδων δ̄. ἔστω ἄρα ςς δ̄ μ° β̄. ἴσοι μ° η̄. καὶ γίνεται ὁ ς ᾱ. α^β. ἔσται ἄρα ὀρθογώνιον η̄ ε'. ιε̄ ε'. ιζ̄ ε'. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XXI.

PVLCHERRIMVM problema, & raræ subtilitatis, quod vt perfectè explicetur aliqua sunt supponenda, nimirum

Primò datis duobus numeris, planus bis sub ipsis contentus, summa quadratorum, & interuallum eorundem, æquantur simul producto ex duplo summæ numerorum in maiorem numerum. Sint dati duo numeri A minor B maior, & duplum summæ illorum esto C. at quadrati eorundem D. E. quorum summa F. interuallum G. Ac demum sit H duplum plani sub A. B. contenti. Dico tres numeros F. G. H. simul, æquari producto ex C in B. Quoniam enim F est summa duorum D E. & G. eorundem interuallum, [1] erunt F G simul æquales duplo maioris E. Cùm ergo ex B in seipsum fiat E, patet ex B in duplum sui, fieri numerum æqualem ipsis F G. simul. At ex eodem B in duplum ipsius A fit H. Ergo ex B in duplum summæ ipsorum A B, hoc est in C. fit numerus æqualis tribus F. G. H. simul. Quod erat inuentum.

C 14.
A 3. B 4.
D 9. E 16.
F 25. G 7.
H 24.

[1] 23. 1. porism.

Secundò. Datis duobus numeris vnitate distantibus, interuallum quadratorum ab ipsis æquatur summæ datorum numerorum. Etenim [2] ex interuallo numerorum, in summam ipsorum, fit interuallum quadratorum. Quamobrem si interuallum numerorum sit vnitas, patet ex vnitate in summam numerorum, produci summam ipsam numerorum, pro interuallo quadratorum.

[2] 4. 2. porism.

Tertiò. Datis duobus numeris vnitate distantibus, si maiori eorum addatur planus sub ipsis contentus, fiet quadratus maioris. Sint enim duo numeri A B A C. quorum interuallum sit vnitas B C. dico si plano sub A B. A C. addatur A C. produci quadratum ipsius A C. Etenim [3] quadratus ipsius A C æquatur planis sub A C. A B. & sub A C. B C. contentis. At planus sub A C. & sub vnitate B C. æquatur ipsi A C. ergo A C. cum plano sub A C. A B. æquatur quadrato ipsius A C. Quod erat demonstrandum.

A . . . B. C.

[3] 2. secundi.

Quartò. In similibus triangulis si area primi multiplicetur per quadratum denominatoris proportionis laterum, producitur area secundi. Etenim [4] areæ sunt in duplicata ratione laterum sed denominator rationis quæ alterius sit duplicata, est quadratus denominatoris prioris rationis, [5] quoniam & quadrati sunt in ratione duplicata laterum. Igitur patet propositum.

[4] 2. 3. porism. [5] 11. octaui.

His positis nullo negotio explicatur operatio Diophanti. Nam fingatur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. est hypotenusa summa quadratorum, nimirum 2 Q. + 2 N. + 1. Alterum latus est interuallum eorundem quadratorum, nempe 2 N. + 1 Alterum denique est duplum producti, puta 2 Q. + 2 N. Quorum summa fit 4 Q. + 6 N. + 2. quæ si diuidatur per 1 N. + 1. maiorem numerorum à quibus effictum est triangulum, fiet quotiens duplum summæ numerorum, puta 4 N. + 2. per primum suppositum. Vt igitur numerus æquandus cubo sit simplicior, & expeditior æquatio, ab inuento triangulo formatur aliud simile, diuidendo scilicet singula illius latera per 1 N. + 1. sic enim summa trium laterum fit 4 N. + 2. æquanda cubo.

Area verò per quartum suppositum, fiet si area prioris trianguli puta 2 C. + 3 Q. + 1 N. diuidatur per quadratum ipsius 1 N. + 1. videlicet per 1 Q. + 2 N. + 1. hinc est quod huiusmodi aream esse ait Diophantus $\frac{2C + 3Q + 1N}{1Q + 2N + 1}$. cui vt addatur alterum latus, nempe $\frac{2N + 1}{1N + 1}$. omnia facienda eiusdem denominationis,

ducendo scilicet 2 N. + 1. in 1 N. + 1. vnde fit 2 Q. + 3 N. + 1. quo addito supradictæ areæ sub denominatione eiusdem partis, fit $\frac{2 C. + 5 Q. + 4 N. + 1}{1 Q. + 2 N. + 1}$. Hæc autem fractio reducitur ad integros, quia denominator metitur numeratorem. Quod ita probo. Numerator componitur ex duobus numeris, puta ex 2 C. + 3 Q. + 1 N. area prioris trianguli, & ex 2 Q. + 3 N. + 1. qui factus est ex 2 N. + 1. in 1 N. + 1. Prior itaque numerus, nempe area prioris trianguli, fit ex interuallo quadratorum à numeris à quibus formatum est triangulum, in planum sub ipsis numeris contentum, hoc est ex 2 N. + 1. in 1 Q. + 1 N. Posterior verò numerus fit ex eodem interuallo quadratorum 2 N. + 1. in maiorem numerorum à quibus effictum est triangulum, puta in 1 N. + 1. fiet ergo totus numerator ex 2 N. + 1. in summam ipsorum 1 Q. + 1 N. & 1 N. + 1. At cùm 1 Q. + 1 N. sit planus contentus sub numeris vnitate distantibus, & horum maior sit 1 N. + 1. patet per tertium suppositum, horum summam æquari quadrato ipsius maioris, puta 1 Q. + 2 N. + 1. Quamobrem constat supradictum numeratorem produci ex 2 N. + 1. in ipsum denominatorem 1 Q. + 2 N. + 1. Quare diuiso numeratore per denominatorem, fiet quotiens 2 N. + 1. æquandus vtique quadrato, est autem hic quotiens subduplus ad priorem quotientem 4 N. + 2. qui æquandus est cubo. Etenim 4 N. + 2. vt suprà ostensum est, est duplum summæ numerorum 1 N. & 1 N. + 1. at 2 N. + 1. est interuallum quadratorum ab ipsis. Porrò interuallum quadratorum æquatur summæ numerorum per secundum suppositum, quia numeri vnitate differunt. Ergo duplum summæ numerorum, est duplum interualli quadratorum.

Iam igitur cùm habeamus 4 N. + 2. æquandum cubo, & 2 N. + 1. æquandum quadrato patet quærendum esse cubum quadrati duplum, cuiusmodi infinitos reperiri posse docuimus ad primam huius. Sumit Diophantus cubum 8. & quadratum 4. æquatque 4 N. + 2. ipsi 8. vel 2 N. + 1. ipsi 4. & fit vtrobique 1 N. $\frac{3}{2}$. Quare latera prioris trianguli fiunt $\frac{17}{2}$. $\frac{15}{2}$. $\frac{8}{2}$. sed cùm omnia diuidi debeant per 1 N. + 1. puta per $\frac{5}{2}$. fiunt vtique quæsiti latera trianguli $\frac{17}{5}$. $\frac{15}{5}$. $\frac{8}{5}$. estque area $\frac{12}{5}$. cui addendo latus $\frac{8}{5}$. fit quadratus $\frac{20}{5}$. seu 4. At circumferentia est $\frac{40}{5}$. seu 8. cubus.

Cæterùm posset prius triangulum fingi etiam à 2 N. & 2 N. + 1. vel à 3 N. & 3 N. + 1. & sic à quolibet Numerorum numero, & altero, vnitate illum superante. Sed eadem semper solutio continget, si cubus & quadratus quibus cum vltima æquatio instituitur, iidem semper sumantur. Possunt autem alij cubi & quadrati infiniti reperiri in eadem ratione 2. ad 1. per Canonem traditum ad primam huius, dum obseruetur, cubum maiorem esse debere quàm 2. & quadratum maiorem esse oportere quàm 1. quia scilicet cubus æquandus est 4 N. + 2. & quadratus æqualis faciendus 2 N. + 1. Id autem contingit, si operando per dictum Canonem, sumatur quilibet cubus minor vnitate, per quem diuidatur 2. denominator rationis datæ. Verbi gratia si sumas $\frac{1}{8}$. & per eum diuidas 2. fiet 16. latus quadrati quæsiti, nam quadratus est 256. cuius duplum 512. est cubus. Vnde apparet ex hoc capite quæstionem infinitas recipere solutiones. Nam si loco ipsorum 8. & 4. sumas 512. & 256. fiet 1 N. $\frac{255}{2}$. & diuersa continget solutio, vt potes experiri.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙ͂Ν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τῶν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ κύβος, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος. πάλιν

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adscito vno laterum circa rectum, sit cubus, at circumferentiæ numerus sit quadratus.

Si rurſus eodem vtamur ductu quo in præcedente eo res deueniet, vt 4 N. + 2. æquanda ſint quadrato, & 2 N. + 1. æquanda cubo. Et oportet inuenire quadratum cubi duplum. Eſt autem 16. reſpectu 8. Et rurſum æquabimus 16. & 4 N. + 2. & fit 1 N. 3 $\frac{1}{2}$. Erit ergo rectangulum $\frac{16}{9}$. $\frac{63}{9}$. $\frac{65}{9}$.

ἐὰν τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ χρησώμεθα τῇ περὶ τούτου ἀπάγεται εἰς τὸ ϛϛ^οὶ δ̅. μ° β̅. ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ, καὶ ϛϛ^οὶ β̅. μ° α̅. ἴσα κύβῳ. καὶ γίνεται ζητεῖν τετράγωνον κύβου διπλασίονα. ἔστιν ιϛ. καὶ η̅. καὶ πάλιν ἰσάζομεν μ° ιϛ̅. ἀριθμοῖς δ̅. μ° β̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ° μ° γ̅. α̅^ϛ. ἔσται ἄρα τὸ ὀρθογώνιον. ιϛ̅^θ. ξγ̅^θ. ξε̅^θ.

IN QVAESTIONEM XXII.

OMNIA ex dictis ad præcedentem ſunt manifeſta. Et vti potes Canone ad primam huius tradito ad inueniendum cubos infinitos quadrati ſubduplos, diuidendo ſcilicet $\frac{1}{2}$ denominatorem rationis ſubduplæ per aliquem cubum, habebis latus quadrati quæſiti. Obſeruandum autem hîc eſt, vt cubus per quem diuidetur $\frac{1}{2}$. ſit minor vnitate, vt proueniat quadratus maior binario. Verbi gratia ſi diuidas $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{8}$. fiet quotiens 4. latus quæſiti quadrati 16. quo vtitur Diophantus. Quod ſi diuidas $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{27}$. fiet quotiens $\frac{27}{2}$. cuius quadratus $\frac{729}{4}$. duplus eſt cubi $\frac{729}{8}$. & ſic de aliis.

Cæterùm tam hæc quæſtio, quàm præcedens extendi poteſt ad quaſlibet duas ſpecies proximas, vel etiam ad non proximas dum non ſint quadratæ, quia vt monuimus ad ſecundam huius, datis duabus ſpeciebus non quadratis, licet vnam reperire alterius duplam. Itaque poterunt eadem facilitate ſolui problemata quæ ſequuntur.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius ſit cubus, area verò cum altero laterum circa rectum faciat quadratoquadratum. vel è conuerſo, vt ambitus ſit quadratoquadratus, area verò cum altero laterum faciat cubum.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius ſit quadratoquadratus, area verò cum altero laterum, faciat quadratocubum. vel è conuerſo.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius ſit quadratocubus, area verò cum altero laterum faciat cubocubum. vel è conuerſo.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius ſit quadratus, area verò cum altero laterum faciat quadratocubum. vel è conuerſo.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius ſit cubus, area verò cum altero laterum faciat quadratocubum. vel è conuerſo.

Et ſic de aliis.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt circumferentiæ numerus ſit quadratus, & adſumens areæ numerum, fa-

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος, καὶ προσλαβὼν τὸν ἐν τῷ

ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ κύβον. πεπλάσθω τὸ ὀρθογώνιον ἀπὸ ς^ο α̅ μ^ο α̅. γίνεται μία μὲν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ςς β̅. ἡ δὲ ἑτέρα δ^υ α̅ ⋔ μ^ο α̅. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δ^υ α̅ μ^ο α̅. καὶ γίνεται ζητεῖν δ^υ β̅ ςς^οι β̅. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ κ^υ α̅ δ^υ β̅ ς^οι α̅. ἴσα κύβῳ. καὶ τὸ μὲν δ^υ β̅ ςς^οι β̅. κατασκευάζειν τετράγωνον ῥᾴδιόν ἐστιν. ἐὰν γὰρ δυάδα μερίσῃς εἰς τετράγωνον παρὰ δυάδα, εὑρήσεις τὸν ς^ον α̅. ἀλλὰ δεῖ τοιοῦτον εὑρίσκεσθαι, ὥστε τὸν ἀπ' αὐτοῦ κύβον, καὶ δύο τῶν ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνους, καὶ αὐτὸν συντεθέμενον, ποιεῖν κύβον. ἔστιν οὖν ὁ ς^ος ἐκ δυάδος μερισθείσης ἐπὶ δυνάμιν α̅ ⋔ μ^ο β̅. ὁ δὲ κύβος γίνεται μ^ο η̅ ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ δ^υ α̅. λεῖψει μ^ο β̅ κύβῳ, καὶ οἱ δύο ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι, γίνονται μ^ο η̅. ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ δ^υ α̅ λεῖψει μ^ο β̅ τετραγώνῳ. αὐτὸς δὲ μ^ο β̅ ἐν μορίῳ δυνάμεως α̅ λεῖψει μ^ο β̅. καὶ πάντα ἐπὶ τὸ αὐτὸ μόριον, γίνονται δ^υδ^υ β̅ ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ δ^υ α̅ ⋔ μ^ο β̅ κύβῳ. ὅ ἐστι τὸ μόριον κυβικόν. ἔστω οὖν καὶ δ^υδ^υ β̅. ἴση κύβῳ. καὶ πάντα παρὰ κύβον α̅. γίνονται ςς^οι β̅. ἴσοι κύβῳ. καὶ ἐὰν τάξωμεν ἴσα μονάσι κυβικαῖς, εὑρίσκεται ὁ ς^ος κύβου τινὸς τὸ ἥμισυ. ἔστω ὁ κύβος μ^ο η̅. γίνεται ἄρα [ὁ ς^ος] τούτου τὸ ἥμισυ μ^ο δ̅ [οὗ ὁ τετράγωνός ἐστι μ^ο ι̅ς̅, τάσσω ἐν δυνάμεσι, καὶ γίνονται δ^υ ι̅ς̅. ἴσαι δ^υ β̅ ςς^οι β̅. καὶ γίνεται ὁ ς^ος α̅ ζ^χ. ὁ δὲ τετράγωνος γίνεται α̅ μθ^χ, καὶ δεῖ ἀπὸ τούτου ἀφελεῖν μ^ο α̅, ἐπει-

ciat cubum. Fingatur rectangulum ab 1 N. & 1. fiet vnum laterum circa rectum 2 N. alterum 1 Q. – 1. hypotenusa verò 1 Q. + 1. Et oportet quærere 2 Q. + 2 N. æquales quadrato. & 1 C + 2 Q. + 1 N. æquales cubo. Et sanè 2 Q. + 2 N. conficere quadratum, facile est. nam si binarium diuiseris per quadratũ binario multatum, inuenies 1 N. Oportet autem cum talem inueniri, vt compositus ex cubo ipsius, duplo quadrati eiusdem, & ipsomet numero, faciat cubum. Est ergo 1 N. ex binario diuiso per 1 Q. – 2. At cubus fit 8. sub denominatione partis quæ sit cubus à latere 1 Q. – 2. & duo quadrati fiunt 8. sub denominatione partis quæ quadratus est à latere 1 Q. – 2. Ipse verò numerus est 2. sub denominatione partis 1 Q. – 2. & si omnia ad eandem partem reducantur, fiunt 2 QQ. sub denominatione partis, quæ est cubus à latere 1 Q. – 2. Et est pars cubica. Oportet ergo vt & 2 QQ. æquentur cubo. & omnia per 1 C. diuidantur, fiunt 2 N. æquales cubo. Et si ponamus æquales vnitatibus cubicis, inuenietur 1 N. cubi alicuius dimidium. Esto cubus 8. Fit ergo 1 N. huius dimidium, nempe 4. cuius quadratus est 16. Statuo in quadratis. & fiunt 16 Q. æquales 2 Q. + 2 N. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. At quadratus fit $\frac{1}{49}$. Et oportet ab hoc auferre 1. Quan-

doquidem vnum laterum circa rectum est 1 Q. – 1. Quamobrem res eò deducitur, vt quærere opus sit cubum, vt quadrans quadrati qui ab eo fit maior sit quàm 2. minor quàm 4. Et si eum ponamus 1 C. quæremus $\frac{1}{4}$ CC. maiorem quidem quàm 2. minorem verò quàm 4. Ergo 1 CC. maior est quàm 8. minor quàm 16. Talis est $\frac{729}{64}$. Ergo cubus $\frac{27}{8}$. Pono ergo 2 N. æquales $\frac{27}{8}$. & fit 1 N. $\frac{27}{16}$. Quadratus $\frac{729}{256}$. Et si binarium diuidamus per hunc binario multatum, inueniemus 1 N. $\frac{512}{217}$. & poterit ab illius quadrato vnitas auferri.

δήπου ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἐστι ς^οῦ α λεῖψει μ° α. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ ζητῆσαι κύβον, ὅπως τὸ τέταρτον τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου μεῖζον μὲν ᾖ μ° β. ἔλασσον δὲ μ° δ. καὶ ἐὰν τάξωμεν αὐτὸν κ^υ α. ζητήσομεν κυβοκύβου α^δ'. μείζονα μὲν μονάδων β. ἐλάσσονα δὲ μ° δ. ὁ ἄρα κυβόκυβος μείζων μὲν μ° η. ἐλάσσων δὲ μ° ις. ἔστι δὲ τὰ ψκθ ξδ^ων. ὥστε ὁ κύβος κζ η^ων. τάσσω οὖν ςς^ούς β. ἴσους μ° κζ η^ων. καὶ γίνεται ὁ ς^ὸς κζ ις^ων. ἡ δύναμις ψκθ σνς^ων. καὶ ἐὰν δυάδα μερίσωμεν εἰς τὸν τούτου δυάδι ἐλάσσονα, εὑρήσομεν τὸν ς^ὸν φιβ σιζ^ων. καὶ ἕξομεν ἀπὸ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, ἆραι μονάδα α.

IN QVAESTIONEM XXIII.

TOTA operatio Diophanti sic habet. Fingatur triangulum ab 1 N. & ab 1. erit hypotenusa 1 Q. + 1. alterum laterum 1 Q. – 1. alterum verò 2 N. Quare ambitus siue summa trium laterum, erit 2 Q. + 2 N. æquanda quadrato. Area verò est 1 C. – 1 N. cui si adiiciatur ambitus, fit 1 C. + 2 Q. + 1 N. æquandus cubo. Et quidem facile est æquare quadrato 2 Q. + 2 N. si ad hoc solùm respiciamus, nam poterit æquari cuilibet quadratorum numero quadrato maiori quàm 2. & fiet valor Numeri, ab huiusmodi quadrato auferendo 2. & per residuum diuidendo 2. Talis autem debet esse valor Numeri, vt per eum resoluendo hypostases 1 C. + 2 Q. + 1 N. inueniatur cubus. Quare apparet necessitas secundæ operationis, qua quæritur quadratus, qui multatus binario, & diuidens binarium, det quotientem, cui adiiciendo suum cubum, & duplum sui quadrati, fiat cubus.

In secunda igitur operatione, ponitur quadratus quæsitus 1 Q. vnde auferendo 2. & per residuum diuidendo 2. fit $\frac{2}{1Q.-2}$. cuius cubus est $\frac{8}{1CC.+12Q.-6QQ.-8}$. duplum autem quadrati eiusdem est $\frac{8}{1QQ.-4Q.+4}$. Quare vt hæc omnia simul addantur, ad maiorem denominationem, & $\frac{2}{1Q.-2}$. fiet $\frac{2QQ.-8Q.+8}{1CC.+12Q.-6QQ.-8}$. At $\frac{8}{1QQ.-4Q.+4}$. fiet $\frac{8Q.-16}{1CC.+12Q.-6QQ.-8}$. Tum omnia simul conficient $\frac{2QQ.}{1CC.+12Q.-6QQ.-8}$. æquandus cubo, & cùm denominator sit cubus, vt constat ex ipsa constructione, restat vt æquemus cubo numeratorem, puta 2 QQ. Quod facilè fiet, nam æquari potest cuilibet numero cuborũ cubico, eritque simplex æquatio, cùm sint duę species proximæ, quæ reduceretur ad primam simplicium, diuidendo omnia per 1 C. vt innuit Diophantus. Erit itaque valor Numeri in hac secunda operatione, semissis alicuius cubi, cuius vtique quadratus æquabitur 2 Q. + 2 N. At hîc duo cauenda sunt. Primùm, vt huiusmodi quadratus sit maior quàm 2. vt euidens est. Secundũ, vt idẽ quadratus talis sit, vt multatus binario, & diuidens 2. det quotientem maiorem vnitate, vt scilicet 1 Q. fit etiam maior quàm 1. eò quod vnum laterum circa rectum positum est 1 Q. – 1. vt autem in diuisione prodeat quotiens maior vnitate, oportet diuisorem minorem esse diuidendo. Igitur 1 Q. – 2. debet esse

minor quàm 2. & addendo vtrimque 2. 1 Q. debet esse minor quàm 4. Constat ergo, quod ait Diophantus, quadratum esse debere maiorem quàm 2. minorem quàm 4. Cùm autem quadrati huius latus sit semissis alicuius cubi, vt dictum est, & quadratus semissis alicuius numeri, sit quadrans quadrati totius numeri, rectè infert Diophantus, quærendum esse cubum, vt quadrans quadrati qui ab eo fit maior sit quàm 2. minor quàm 4. & ideo tertiam instituit operationem.

In tertia operatione ponit cubum quæsitum 1 C. cuius quadratus 1 CC. cuius quadrans $\frac{1}{4}$ CC. debet esse maior binario, minor quaternario. Quare 1 CC. debet esse maior quàm 8. minor quàm 16. Quomodo autem inueniri possint tales quot quis voluerit, cubocubi, constare potest ex iis quæ in simili adnotauimus ad secundam huius. Reducantur enim 8. & 16. ad fractionem cubocubicam, puta ad eam cuius denominator 64. fient $\frac{512}{64}$. & $\frac{1024}{64}$. inter quos cùm cadat cubocubus $\frac{729}{64}$. is optimè satisfaciet proposito. Porro eius latus quadratum, puta $\frac{27}{8}$. est cubus quæsitus, æquandus 2 N. vnde fit in secunda operatione 1 N. $\frac{27}{16}$. cuius quadratus $\frac{729}{256}$. nota quadrati insignitus æquabitur in prima operatione cum 2 Q. + 2 N. Reliquam operationem omisit Diophantus molestiam subterfugiens, nos in gratiam studiosorum, eam persequemur 2 Q. + 2 N. æquantur $\frac{729}{256}$ Q. & fit 1 N. $\frac{512}{217}$. per quem resoluendo primas hypostases, fiunt latera quæsiti trianguli hæc $\frac{309123}{47089}$. $\frac{315455}{47089}$. $\frac{222208}{47089}$. vel $\frac{1024}{217}$. Area est $\frac{110608160}{10218313}$. summa trium laterum est $\frac{263195}{47089}$. quadratus à latere $\frac{469}{217}$. & ipsi summæ laterum si addas aream, fit cubus $\frac{272097792}{10218313}$. cuius latus $\frac{648}{217}$.

Cæterùm tota ratio diuersitatis in solutione, pendet ex eo quod 2 N. qui debet æquari cubo, potest diuersis æquari cubis, cùm infiniti reperiri possint ad hoc idonei. Nam quod attinet ad primas positiones, vix reor eas aliter institui posse, ita vt in commodam incidamus æquationem.

QVÆSTIO XXIV.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος, προσλαβὼν δὲ τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. πρότερον δεῖ ἐπισκέψασθαι δύο ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ μὲν ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ἴσος ᾖ ἑνὶ τῶν δοθέντων, ὁ δὲ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ τῷ ἑτέρῳ. ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅτε ιβ. καὶ ὁ ζ. καὶ ἐπιτετάχθω τὸν μὲν ιβ. εἶναι τὸν ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ. τὸν δὲ ζ. τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ. ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ ἔσται μο ιδ. ἐὰν τάξωμεν μίαν αὐτῶν ἀριθμοστοῦ α. ἡ ἑτέρα ἔσται ϛϛ ιδ. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ μο ιβ. ἡ ἄρα ὑποτείνουσα ἔσται μο ιβ. ⋔ ἀριθμοστοῦ α. ϛϛ ιδ.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus circumferentiæ sit cubus, & adscito areæ numero, faciat quadratum. Primùm inspicere oportet datis duobus numeris, quomodo inueniatur triangulum rectangulum, vt circumferentia quidem æquetur vni datorum numerorum, area verò æquetur alteri. Sunto duo numeri 12. & 7. & iniunctum sit ipsum 12 æquari circumferentiæ, ipsum verò 7. areæ. Qui fit ergo ex mutuo ductu laterum circa rectum, erit 14. Et si ponamus ipsorum alterum $\frac{1}{N}$. erit alterum 14 N. Est autem circumferentia 12. Quamobrem hypotenusa erit 12 − $\frac{1}{N}$ − 14 N.

Restat

Restat vt huius quadratum, quod est $\frac{1}{QQ}$ + 196 Q. + 172 - $\frac{24}{N}$ - 336 N. æquetur quadratis laterum circa rectum, hoc est $\frac{1}{QQ}$ + 196 Q. Communis addatur defectus, & à similibus auferantur similia, & omnia in 1 N. ducantur, fiunt 172 N. æquales 336 Q. + 24. & non possibile est hanc æquationem absolui, nisi dimidium numerorum in seipsum, detracto producto ex quadratis in vnitates, faciat quadratum. Et sunt numeri quidem compositi ex quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ; productum vero ex quadratis in vnitates, fit ex octuplo quadrati circumferentiæ in aream ducto. Quàobrem si huiusmodi dentur numeri, soluetur quæstio. Esto numerus areæ 1 N. circumferentiæ verò numerus cubus simul & quadratus, putà 64. Et vt constituatur triangulum, oportet vt dimidium compositi ex quadrato ipsius 64. & ex 4 N. ducentes in seipsum, auferamus inde quod fit octies ex quadrato circumferentiæ in 1 N. & reliquum quæramus æquale quadrato. Fiunt 4 Q. + 4194304 - 24576 N. & omniũ quadrans, fit 1 Q. + 1048576 - 6144 N. æquale quadrato. Porro autem & 1 N + 64 æquatur quadrato. Et exæquentur tibi numeri; & excessus, & mensuratio, & reliqua sunt dilucida.

λοιπόν ἐστι τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, ὅπερ ἐστὶ α δυ. δυ. δ^ρϙϛ. μ° ροβ. λείψει κδ ϛ. ϛϛ τλϛ. ἰσῶσαι τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετραγώνοις, τουτέστι α δυ. δυ. δ^ρϙϛ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ πάντα ἐπὶ ἀριθμὸν, γίνονται ϛϛ^οι ροβ. ἴσοι δ^ τλϛ. μ° κδ. καὶ οὐ πάντοτε δυνατόν ἐστι, εἰ μὴ τὸ ἥμισυ τῶν ϛϛ ἐφ' ἑαυτὸ λεῖψαν τὰς δυνάμεις ἐπὶ τὰς μονάδας, ποιῇ τετράγωνον. καὶ εἰσὶν οἱ μὲν ϛϛ^οι ἐκ τοῦ ἀπὸ τῆς περιμέτρου, καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ. αἱ δὲ δυνάμεις ἐπὶ τὰς μονάδας, ἐκ τοῦ ὀκτάκις ἀπὸ τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἐμβαδόν. ὥστε ἐὰν τοιοῦτοι δοθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ [λύσεται τὸ ζητούμενον] ἔστω ὁ μὲν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμοῦ α. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος μ° ξδ. καὶ ἵνα συσταθῇ τὸ τρίγωνον δεῖ τοῦ ἀπὸ μ° ξδ. τετραγώνου, καὶ ἀριθμῶν δ. τὸ ἥμισυ ποιήσαντα [ἐφ' ἑαυτὸ] ἀφελεῖν τὸν ὀκτάκις ἀπὸ τῆς περιμέτρου εἰς ἀριθμὸν α. καὶ ζητῆσαι τὰ λοιπὰ ἴσα τετραγώνῳ. γίνονται δ^ δ. μ° υιϑ. ͵δτϟ. λεῖψει ἀριθμῶν β. ͵δφοϛ. καὶ πάντων τὸ τέταρτον, γίνεται δ^ α. μ° ρδ. ͵ηφοϛ. λεῖψει ἀριθμῶν ͵ϛρμδ. ἴσαι τετραγώνῳ. ἔτι δὲ καὶ ἀριθμὸς α. μ° ξδ. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ ἐξισούσθω σοι ἀριθμοί, καὶ ἡ ὑπεροχὴ, καὶ ἡ μέτρησις, καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM XXIV.

OPERATIO Diophanti subtilis est, quam ipse compendiosè persequitur. Nos autem vt omnia fiant dilucida, eam fusius explicabimus. Data circumferentia trianguli 12. & area 7. constat productum ex lateribus circa rectum esse 14. sit ergo alterum latus 14 N. alterum $\frac{1}{1N}$. vt eorum mutuo ductu fiat 14. vtroque igitur de summa laterum 12. detracto, relinquitur hypotenusa 12 − $\frac{1}{1N}$ − 14 N. Quare vt triangulum exhibeatur in rationalibus, oportet huius quadratum, æquari quadratis reliquorum laterum simul iunctis. Vt autem habeamus quadratum de 12 − $\frac{1}{1N}$ − 14 N. sumemus quadratos partium, & quod fit bis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, per primam secundi porismatum, fietque totus quadratus $\frac{1}{1Q}$ + 196 Q. + 172 − $\frac{24}{1N}$. − 336 N. æqualis quadratis laterum circa rectum, puta $\frac{1}{1Q}$ + 196 Q. Quare tandem 172. æquatur $\frac{24}{1N}$ + 336 N. & ducendo omnia in 1 N. fiunt 172 N. æquales 24 + 336 Q. Quæ est tertia compositarum. Quamobrem operando more Diophanti, vt docuimus ad trigesimam tertiam primi, oportet ducere vnitates in quadratos, hoc est 24. in 336. & productum 8064. auferre à quadrato numeri 86. qui est semissis numeri Numerorum 172. hoc est à 7396. Quod fieri nequit, quia 7396. minor est quàm 8064. Hæc igitur æquatio est impossibilis. Itaque inspiciendum est vnde prouenerint 172 N. itemque 24. & 336 Q. Quod si consideres qua ratione sumptus sit quadratus de 12 − $\frac{1}{1N}$ − 14 N. facilè omnia consequeris. Nam 172. fit ad 144. quadratum de 12. addendo 28. duplum ipsius 14. Quare cùm 14. sit duplum areæ 7. ac proinde 28. eiusdem quadruplum. Rectè dixit Diophantus 172. numerum Numerorum, componi ex quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ. At 24. est duplum circumferentiæ 12. & 336. est numerus qui fit bis ex 12. in 14. hoc est ex duplo ipsius 12. in 14. Atqui 14. est duplum areæ, & quod fit ex duplo vnius numeri in duplum alterius, idem est atque id quod fit ex quadruplo vnius in alterum. Igitur 336. fit ex quadruplo circumferentiæ 12. in aream 7. Constat ergo vnitates 24. esse duplum circumferentiæ, & numerum quadratorum 336. esse productum ex quadruplo circumferentiæ in aream. Proinde ducere vnitates in quadratos, idem est ac ducere duplum circumferentię in quadruplum ipsius circumferentiæ, & productum in aream. At ex duplo alicuius numeri, in quadruplum eiusdem, fit octuplum quadrati ipsius numeri. Rectè igitur infert Diophantus numerum qui fit ex quadratis in vnitates, produci ex octuplo quadrati circumferentiæ in aream.

Corrigēda igitur est prima operatio, & tales ponendi numeri areæ & circumferentiæ, vt à quadrato semissis compositi, è quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ, auferendo octuplum producti ex quadrato circumferentiæ in areā, supersit quadratus. Idcirco ponit aream Diophātus 1 N. circumferentiā numerum cubū, puta 64. quia id requirit lex problematis, quē vult præterea esse quadratū, ob causam quam infrà explicabimus. Est ergo ipsius 64. quadratus 4096. cui addendo quadruplum areæ fit 4096 + 4 N. cuius semissis 2048 + 2 N. cuius quadratus est 4 Q. + 4194304. + 8192 N. vnde si auferas octuplum ex quadrato ipsius 64. in 1 N. nēpe 32768 N. superest 4 Q. + 4194304. − 24576 N. æquandus quadrato, & sumendo quadrantē more Diophanti 1 Q. + 1048576 − 6144 N. æquandus quadrato. Quoniam verò requiritur, vt & circūferentia adsumens areā, faciat quadratum, oportet etiam 1 N. + 64. æquari quadrato. Quare in duplicatam incidimus æqualitatem. Quæ vt resolui possit, imitando artificium decimæ octauæ tertij, exæquandæ prius sunt vnitates, vt tangit Diophantus. Quod quidem facilè præstari potest, quia vterque 1048576. & 64. quadratus est, vnde patet cur 64. voluerit esse quadratum, nam aliter non posset 64. ad quadratum 1048576. habere rationem quadrati ad quadratum. Necessario autem 1048576. quadratus repetitur, quia quadrans est quadrati de 2048. vt ex constructione manifestum est. Itaque quoniam denominator rationis 64. ad 1048576. est quadratus 16384. ducto hoc quadrato in 1 N. + 64. fiet hinc 16384 N. + 1048576. æquandus quadrato. Inde vt prius 1 Q. + 1048576.

– 6144 N. æquandus quoque quadrato. Quia verò vterque & quadratorum & vnitatum numerus quadratus est, duplici via resolui potest duplicata æqualitas. Primo enim respiciendo ad 1 Q. sumo interuallum Numerorum quadrato æquandorum, quod est 22528 N. – 1 Q. quod mutuo ductu conficiunt 22528 – 1 N. & 1 N. (hi soli apti sunt æquationi resoluendæ, vt constat ex iis quæ passim libro tertio docuimus, vt scilicet in semisse interualli eorum reperiatur 1 N. latus 1 Q.) Horum summa est 22528. cuius semissis quadratus 126877696. æquatur 16384 N. + 1048576. vnde fit 1 N. 7680. numerus scilicet areæ, cùm circumferentia sit 64. sed omnino impossibile est triangulum constituere cuius area sit 7680. circumferentia 64. Quia ex 64. fieri nequeunt tres partes, quarum duæ inuicem ductæ efficiant 15360. duplum scilicet areæ, cùm 64. neque in duas partes diuidi possit quæ id præstent: siquidem quadratus semissis ipsius 64. puta 1024. maior est producto multiplicationis duarum quarumlibet inæqualium partium, in quas secari possit 64. per quintam secundi Euclidis. Quod si primam operationem repetendo quæras triangulum cuius area 7680. circumferentia 64. inuenies sanè à quadrato semissis compositi è quadrato circumferentiæ 64. & ex quadruplo areæ 7680. non posse subduci octuplum producti ex quadrato circumferentiæ in aream. Denique si per valorem Numeri 7680. resoluas primas hypostases, inuenies hypotenusam longè minorem nihilo, cùm vnum laterum circa rectum, fiat multo maius tota circumferentia.

Aliam igitur inire viam cogimur, qua respiciendo ad vnitates, sumo interuallum numerorum quadrato æquandorum 1 Q. – 22528 N. Tum quæro duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat, Ita tamen vt in semisse summæ illorum, vel interualli, reperiantur vnitates 1024. quod est latus ipsius 1048576. Sunt ergo huiusmodi numeri 11 N. & $\frac{1}{11}$ N. – 2048. horum interuallum 2048 + 10 $\frac{10}{11}$. cuius semissis 1024. + 5 $\frac{5}{11}$ N. cuius quadratus 1048576. + $\frac{122880}{11}$ N. + $\frac{3600}{121}$ Q. æquatur 1048576 + 16384 N. vnde fit 1 N. 175. $\frac{49}{225}$. Area scilicet quæsiti trianguli. Redeo ergo ad propositam initio quæstionem, & quæro triangulum, cuius ambitus sit 64. area 175 $\frac{49}{225}$. Pono vnum laterum circa rectum $\frac{1}{1N}$. alterum $\frac{78848}{225}$ N. fit hypotenusa 64 – $\frac{1}{1N}$. – $\frac{78848}{225}$ N. cuius quadratum si facias æqualem quadratis laterum circa rectum, fiunt tandem $\frac{1079296}{225}$. æquales $\frac{128}{1N}$ + $\frac{10092544}{225}$ N. & ducendo omnia in 1 N. tum in 225. fiunt 1079296 N. æquales 28800 + 10092544 Q. & rursus diuidendo omnia per 128. vt in minimis exhibeantur, habes 8432 N. æquales 225 + 78848 Q. Quare fit 1 N. $\frac{4400}{78848}$ vel $\frac{4032}{78848}$. seu in minimis $\frac{275}{4928}$. vel $\frac{9}{176}$. Et si per vtrumlibet valorem Numeri resoluas hypostases, fiunt vtroque modo latera circa rectum 19 $\frac{5}{9}$ & 17 $\frac{253}{275}$. Est ergo hypotenusa 26 $\frac{1298}{2475}$ ambitus 64. cui addendo aream, puta 175 $\frac{49}{225}$. fit quadratus $\frac{53824}{225}$. cuius latus $\frac{232}{15}$. Hæc ad omnium pulcherrimi subtilissimique problematis explicationem adnotasse sufficiat.

Quoniam verò in his libris Diophantus diuersimodè vtitur duplicata æqualitate, non abs re me facturum arbitror, si omnes quos vsurpat modos sigillatim recenseam, & vnum in locum quæ sparsim à nobis adnotata sunt, collecta coniiciam, vt sic tota duplicatæ æqualitatis doctrina discentium animis firmius inhæreat. Nec solas Diophanti hypotheses afferemus, sed & alias plerúmque exhibebimus, quibus varia huiusmodi æquationum symptomata declarentur, nouamque insuper quam excogitauimus æquationis rationem, quamque ad quadragesimam quintam quarti explicauimus, aliis adiiciemus.

Primvs modvs vtendi duplicata æqualitate est, quando vterque numerus quadrato æquandus componitur ex Numeris & ex vnitatibus, & numerus Numerorum idem est vtrobique. Et hic quatuor casus considerari possunt. Primus casus est, cùm vterque numerus & vnitatum & Numerorum afficitur signo pluris, vt accidit duodecima secundi, vbi æquandi erant quadrato 1 N. + 2. & 1 N. + 3. Itemque decima quarta tertij vbi æquandi erant quadrato 10 N. + 6. & 10 N. + 54. Et hic facilis est æquationis ratio. Nam inueniendi sunt duo quadrati, quorum idem sit interuallum atque ipsarum vnitatum quæ reperiuntur in numeris quadrato æquandis, hâc tamen lege

vt maior quæsitorum quadratorum excedat maiorem vnitatū numerum, minor quadratus excedat minorē vnitatum numerū. Vt cùm æquantur quadrato 1 N. + 2. & 1 N. + 3. quorū interuallum 1. quæremus duos quadratos, quorum interuallū sit 1. ita vt maior quadratorum excedat 3. minor excedat 2. idcirco sumi nō possunt $\frac{25}{16}$. & $\frac{9}{16}$. neque $\frac{25}{9}$ & $\frac{16}{9}$. sed sumpsit Diophantus $\frac{289}{64}$ & $\frac{225}{64}$. Similiter cùm æquandi sunt quadrato 10 N. + 6. & 10 N. + 54. quorum interuallum 48. sumit Diophantus quadratos 16. & 64. quia 16. excedit 6. & 64. excedit 54. non potuerunt autem sumi 1. & 49. ob defectum conditionis adiectæ.

Secūdus casus est, cùm vnitatum numeri afficiuntur vtrobique signo minoris, vt accidit decima quarta secundi, vbi æquandi fuere quadrato 1 N. − 6 & 1 N. − 7. & in hoc casu absque vlla conditione sufficit inuenire duos quadratos, quorum interuallum æquet interuallum propositorum numerorum, vt in data hypothesi, quia interuallum est 1. duo quicunque quadrati vnitate distantes, satisfacient proposito, sumpsit Diophantus $\frac{9}{16}$ & $\frac{25}{16}$. & sumere potuisset $\frac{16}{9}$ & $\frac{25}{9}$. vel alios quoscunque quorum interuallum sit vnitas.

Tertius casus est. Cùm Numerorū numeri afficiūtur vtrobique signo minoris, quod nusquam accidit in Diophanto, sed nobis decimam tertiā secundi per duplicatam æqualitatē soluentibus, in hunc casum contingit incidisse, æquantibus quadrato iū 9 − 1 N. tum 21 − 1 N. Hîc autem inueniendi sunt duo quadrati eodē interuallo distātes, quo & propositi numeri, ea tamen lege vt maior ipsorū sit minor vnitatibus maioris propositorū numerorū; minor autem sit minor vnitatibus minoris. Vt in data hypothesi, quia propositorū numerorū interuallū est 12. quærēdi sūt duo quadrati, quorū interuallū sit 12. ita tamē vt maior quæsitorū quadratorū sit minor quàm 21. minor autē sit minor quàm 9. quales sumpsimus 4. & 16.

Quartus casus est. Cùm in vno propositorum numerorum, vnitatum numerus afficitur signo pluris, in altero afficitur signo minoris, vt si sint ęquādi quadrato 1 N. + 8. & 1 N. − 12. Tuneq; inueniendi sunt duo quadrati quorū interuallū sit idē, atq; propositorū numerorū, absque vlla conditione. Sic in data hypothesi, quia propositorum numerorū interuallum est 20. sumam duos quadratos, quorū interuallū sit 20. quales sunt 36. & 16. Itaque in his omnibus casibus, manifestū est propositam quamcunq; duplicatā æqualitatē infinitis modis explicari posse.

Secundus modus vtēdi duplicata æqualitate est, quādo rursus vterq; propositorū numerorum componitur ex Numeris & vnitatibus, & Numerorū numeri sunt inæquales, sed vnitatum numerus vtrimque quadratus est. Et hîc duplex casus considerari potest. Primus casus est, cùm idem quadratus numerus vnitatum vtrimque reperitur, vt accidit in prima operatione quadragesimæ quintæ quarti, vbi æquantur quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. & in hoc casu cùm interuallum propositorum numerorum constet ex solis Numeris (vt vides in data hypothesi huiusmodi interuallum esse 2 N.) quærendi sunt duo numeri, quorum mutuo ductu fiat dictum interuallum, ea lege vt in summa eorum contineatur duplum lateris quadrati, qui est in vtroque propositorū numerorum, vt in dato exemplo cùm latus quadrati 4. sit 2. cuius duplum 4. deligendi sunt duo numeri, quorum mutuo ductu fiant 2 N. ita vt in semisse summæ illorum reperiantur 4. vnitates, vnde patet alios deligi non posse quàm $\frac{1}{2}$ N. & 4. quorum summæ semissis quadratum si æques maiori 8 N. + 4. vel eorundem interualli semissis quadratum æques minori 6 N. + 4. fit vtrobique 1 N. 112. vnde liquet in hoc casu vnicam tantum dari posse solutionem. Reducitur tamen hîc casus ad quartum modum, vt infrà ostendemus, qua ratione infinitis modis resolui potest.

Secundus casus est, cùm in propositis numeris, inæquales vnitatum numeri quadrati continentur, vt accidit decima septima tertij, vbi æquantur quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. quorum interuallum cùm componatur ex Numeris & vnitatibus, est quippe 5 N. + 5. tales sunt deligendi duo numeri quorum mutuo ductu id fiat, vt in eorum summa reperiatur duplū lateris maioris quadrati, & in eorum interuallo reperiatur duplum lateris minoris quadrati, hoc est vt in summa reperiatur 6. in interuallo 4. Quare per Canonem primæ primi facilè reperientur huiusmodi numeri, puta 5. & 1. Aliter eosdem numeros repe-

ries, ſi capias ſummam & interuallum laterum quadratorum 9. & 4. hoc eſt ſummam & interuallum ipſorum 3. & 2. fient enim vt prius 5. & 1. Quia igitur ad conficiendum interuallum 5 N. + 5. ſumendi ſunt duo numeri, in quorum altero ſint vnitates 5. in altero 1. Patet nonniſi duobus modis tales numeros ſumi poſſe, puta vel 5 N. + 5. & 1. vel 1 N. + 1. & 5. vnde liquet in hoc caſu contingere poſſe vt duæ ſolutiones exhibeantur, dico contingere poſſe, quia plerumque vnica prouenit ſolutio, vt in data hypotheſi, non enim ſumendo 5 N. + 5. & 1. ſolui poteſt quæſtio, quia horum ſummæ ſemiſſis quadratus, puta $\frac{25}{4}$ Q. + 15 N. + 9. maior eſt omnino quàm 10 N. + 9. ac proinde illi æquari nequit. Contingit autem duplex ſolutio ſi proponantur æquandi quadrato. 36 N. + 49. & 12 N. + 1. quia enim horum interuallum eſt 24 N. + 48. conſtat ex tradita regula produci poſſe huiuſmodi interuallum, ſiue ex 6. in 4 N. + 8. ſiue ex 8. in 3 N. + 6. Vnde fit 1 N. vel 2. vel $\frac{20}{3}$.

Porro in hoc ſecundo caſu poteſt accidere vt vterque vel alter numerus Numerorũ afficiatur ſigno minoris. Vt ſi ſint æquãdi quadrato 36 − 6 N. & 16 − 1 N. quorum interuallum 20 − 5 N. Quod ſi ponatur fieri ex 2. in 10 − $\frac{5}{2}$ N. optimè reſoluetur æquatio, & fiet 1 N $\frac{144}{25}$. Rurſus ſi ſint æquandi quadrato 36 − 1 N. & 16 + 9 N. quorum interuallum 20 − 10 N. hoc ſi ponatur fieri ex 2. in 10 − 5 N. vel etiam ex 10 in 2 − 1 N. duobus modis reſoluetur æquatio, & fiet 1 N. vel $\frac{116}{25}$. vel 20. Attamen vtrumlibet horum accidat, ſæpè continget æquationem reſolui nullatenus poſſe, vt ſi ſint æquandi quadrato 36 − 1 N. & 16 − 6 N. quorum interuallum 20 + 5 N. Etenim ſi per regulam traditam ſumantur numeri, quorum mutuo ductu fiat 20 + 5 N. horum ſummæ ſemiſſis quadratus ſemper erit maior quàm 36 − 1 N. quia omnes illius partes afficientur ſigno Pluris. Quare quotieſcunque minor Numerorum defectus ſe tenebit ex parte maioris quadrati, erit impoſſibilis æquationis duplicatæ reſolutio. Sed etſi minor defectus iungatur minori quadrato, non ſemper reſolui poterit æquatio, vt ſi ſint æquandi quadrato 9 − 8 N. & 4 − 6 N. Cùm enim horum interuallum ſit 5 − 2 N. ſiue ponas illud produci ex 1. in 5 − 2 N. ſiue ex 5. in 1 − $\frac{2}{5}$ N. nil ages, nam horum ſummæ ſemiſſis quadratus ſemper erit maior quàm 9 − 8 N. Similiter cùm numeri ex vna tantùm parte deficiunt, poteſt impoſſibilis eſſe æquationis reſolutio, vt ſi ſint æquandi quadrato 36 + 3 N. & 16 − 9 N. Cùm enim horum interuallum ſit 20 + 12 N. non poteſt id fieri, niſi ex 2. in 10 + 6 N. vel ex 10. in 2 + $\frac{6}{5}$ N. ſed vtroque modo, illorum ſummæ ſemiſſis quadratus maior eſt quàm 36 + 3 N. Quia vero & caſus iſte ſecundus cum omnibus ſuis ſymptomatis reduci poteſt ad Quartum modum, vt infrà docebimus, ſemper huiuſmodi æquationes non vna ratione reſolui poterunt.

Tertius modus eſt, cùm rurſus propoſiti numeri componuntur ex Numeris & vnitatibus inæqualibus multitudine, & vnitatum numeri quadrati non ſunt; ſed Numerorum numeri ſunt plani ſimiles. Vt accidit decima octaua & decima nona tertij. Itemque trigeſima quinta quarti. Et reducitur hic modus ad primum, faciendo numeros Numerorũ æquales. Nam interdum minor ducitur in denominatorẽ rationis quã habet ad eum maior, & ſic fit æqualis maiori, vt trigeſima quinta quarti, vbi cùm æquãdi ſint quadrato 65 − 6 N. & 65 − 24 N. quia 24. ad 6. eſt ratio quadrupla ducitur 4. in 65 − 6 N. & fit 260 − 24 N. Iã ergo ſi æqnes quadrato 260 − 24 N. & 65 − 24 N. id perages per ea quæ dicta ſunt de tertio caſu primi modi. Interdum verò ad vitandas fractiones ſumuntur quadrati duo in eadem ratione quam habent inter ſe propoſiti Numerorum numeri, quique habeant partes propoſitis fractionibus expreſſas, & maior ducitur in minorem, & minor in maiorem, vnde productorum exiſtit æqualitas ob identitatem proportionis. Sic decima octaua tertij cùm æquãdi ſint quadrato $5\frac{1}{5}$ N. + $4\frac{1}{5}$ & $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. Quãuis Numerorũ inter ſe ſit ratio quadrupla, nõ ducitur tamẽ 4. in minorẽ, quia ſic nõ tollerẽtur fractiones, ſed ſumũtur duo quadrati 100. & 25. in eadẽ ratione, quique habeant partes fractionibus expreſſas, puta $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{10}$. ductoque maiore 100. in minorẽ $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. & minore 25. in maiorẽ $5\frac{1}{5}$ N. + $4\frac{1}{5}$. fiunt iam æquandi quadrato 130 N. + 30. & 130 N. + 105. qui eſt primus caſus primi modi.

Rursus decima nona tertij, cùm sint æquandi quadrato $2 \frac{1}{2}$ N. $- 3 \frac{1}{2}$. & $\frac{5}{8}$ N. $- \frac{13}{8}$. vbi etiam numeri Numerorum sunt quadrupli, sumuntur quadrati 4. & 16. in eadem ratione qui habent partes fractionibus expressas, puta $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$. Factaque decussatim multiplicatione fiunt æquandi quadrato 10 N. $-$ 26. & 10 N. $-$ 14. qui est secundus casus primi modi. Cæterùm aduerte simili prorsus artificio casum secundum secundi modi reduci posse ad primum. Sint enim æquãdi quadrato 9 N. $+$ 16. & 7 N. $+$ 4. Quia 16. ad 4. est in ratione quadrupla, si ducas 4. in 7 N. $+$ 4. fient iam æquandi quadrato 28 N. $+$ 16. & 9 N. $+$ 16. qui est primus casus secundi modi. Quod si vnitates quadratæ in propositis numeris contentæ, sint minimi in suis rationibus numeri, tunc ad vitandas fractiones, commodius erit quemlibet propositorum numerorum vicissim multiplicare per vnitates alterius, vt in hypothesi decimæ septimæ tertij, vbi æquandi sunt quadrato 10 N. $+$ 9. & 5 N. $+$ 4. duces 4. in 10 N. $+$ 9. & duces 9. in 5 N. $+$ 4. fientque quadrato æquandi 40 N. $+$ 36. & 45 N. $+$ 36. Et in vniuersum quoties rationis quadratorum talis est denominator, vt eo ducto in illum propositorum numerorum, in quo continetur minor quadratus, non fiat integer numerus Numerorum, sumptis similiter minimis in ratione quadratorum eorundem, per eos decussatim multiplicabis propositos numeros, vt si sint æquandi quadrato, 10 N. $+$ 36. & 5 N. $+$ 16. sumes minimos in ratione 36 ad 16. puta 9. & 4. & per eos facta decussatim multiplicatione, fient iam æquandi quadrato 40 N. $+$ 144. & 45 N. $+$ 144. qui est vtique primus casus secundi modi.

QVARTVS MODVS est, cùm propositi Numeri quadrato æquandi constant ex Numeris & vnitatibus, & vnitatum numerus quadratus est, & idem vtrimque, vt in primo casu secundi modi. Sed cùm per secundum modum vix vna aut altera contingat solutio, per hunc quartum modum infinitæ possunt exhiberi solutiones, etiamsi requiratur vt valor Numeri consistat intra præscriptos limites. Sic Diophantus quadragesima quinta quarti æquauit quadrato 8 N. $+$ 4. & 6 N. $+$ 4. volens valorem numeri minorem esse quàm 2. Cùm per secundum modum, valor Numeri necessario fiat 112. & hîc triplex casus considerari potest.

Primus casus est, quando vterque propositorum numerorum, continet Numeros affectos signo pluris. Sic in hypothesi Diophanti, vbi in vtroque numero Numeri afficiuntur signo pluris, procedet æquatio si considerentur tres numeri 8 N. $+$ 4. 6 N. $+$ 4. & 4. Nam cùm maiorum interuallum sit 2 N. minorum 6 N. quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit triens interualli, quo minor illorum superabit 4. Ponatur minoris latus 1 N. $+$ 2. fiet quadratus 1 Q. $+$ 4 N. $+$ 4. qui cùm excedat 4. numero 1 Q. $+$ 4 N. cuius triens $\frac{1}{3}$ Q. $+$ 1 $\frac{1}{3}$ N. hoc addito, ipsi quadrato, fiet maior quadratus 1 $\frac{1}{3}$ Q. $+$ 5 $\frac{1}{3}$ N. $+$ 4. Hic ergo æquandus est quadrato, & ad tollendas fractiones omnia ducendo in 9. tum vt æquatio reducatur ad minimos, omnia diuidendo per 4. fit 3 Q. $+$ 12 N. $+$ 9. æquandus quadrato, cuius latus vt patet infinitis modis fingi potest, & cum qualibet data Numeri determinatione, fingatur cum Diophanto 5 N. $-$ 3. fiet 1 N. $\frac{21}{11}$. Erunt ergo latera quadratorum $\frac{48}{11}$ & $\frac{43}{11}$. ipsi quadrati $\frac{2304}{121}$. $\frac{1849}{121}$. quorum priorem si æques 8 N. $+$ 4. vel posteriorem 6 N. $+$ 4. fit vtrobique 1 N. $\frac{455}{242}$.

Secundus casus est. Quando vterque numerus Numerorũ afficitur signo minoris, vt si sint æquandi quadrato 16. $-$ 1 N. & 16 $-$ 5 N. Tuncq; considero tres Numeros 16. 16 $-$ 1 N. 16 $-$ 5 N. & quia maiorum interuallum est 1 N. minorum 4 N. vnde interuallorum ratio est quadrupla, quæro duos quadratos, quorum interuallum sit quadruplum interualli, quo maior superabitur à 16. Ponatur latus maioris 4 $-$ 1 N. fiet quadratus 16 $-$ 8 N. $+$ 1 Q. qui superatur à 16. interuallo 8 N. $-$ 1 Q. cuius quadruplum 32 N. $-$ 4 Q. Quod si auferas à prædicto quadrato, manet minor quadratus 16 $-$ 40 N. $+$ 5 Q. cuius latus ita finges, vt 1 N. sit minor quàm $\frac{16}{5}$. ob numerum 16 $-$ 5 N. Pone illud 4 $-$ 6 N. fiet 1 N. $\frac{8}{31}$. Ergo latera quadratorum sunt $\frac{76}{31}$ & $\frac{116}{31}$. ipsi quadrati $\frac{5776}{961}$. $\frac{13456}{961}$. quo-

rum maiorem si æques 16 − 1 N. minorem verò 16 − 5 N. fiet vtrobique valor Numeri $\frac{156}{441}$.

Tertius casus est, cùm in maiore propositorũ numerorum Numeri afficiuntur signo pluris, in minore verò afficiuntur signo minoris, vt si quadrato æquandi sint 16 + 6 N. & 16 − 2 N. Tuncque considerans tres numeros 16 + 6 N. 16. & 16 − 2 N. vbi maiorum interuallũ 6 N. triplum est interualli minorũ 2 N. quæro duos quadratos, vt interuallum maioris super 16. sit triplum interualli quo 16. superabit minorem. Esto latus minoris 4 − 1 N. fit quadratus 16 − 8 N. + 1 Q. qui superatur à 16. interuallo 8 N. − 1 Q. cuius triplum 24 N. − 3 Q. quod addito ad 16. fit maior quadratus 16 + 24 N. − 3 Q. cuius latus ita fingendũ, vt 1 N. sit maior quàm 4. quia latus minoris quadrati ponitur 4 − 1 N. Ponatur 5 N. − 4. fiet 1 N. $\frac{16}{7}$. eruntque quadratorũ latera $\frac{12}{7}$. & $\frac{52}{7}$. quadrati $\frac{2704}{49}$. $\frac{144}{49}$. quorum maior si fiat æqualis 16 + 6 N. vel minor æquetur 16 − 2 N. fiet vtrobique valor Numeri $\frac{320}{49}$.

Itaque quoniam vt suprà docuimus secundus casus secundi modi semper reduci potest ad primum, ac per consequens ad aliquem horum trium casuum, & in quolibet horum trium casuum solutiones infinitæ reperiri possunt, constat vtique & secundum casum secundi modi cum omnibus suis symptomatis semper infinitis modis resolui posse.

Quintus modus quem ipsi commenti sumus est. Quando vterque propositorum numerorum quadrato æquandorum componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent inter se rationem quadrati ad quadratum, nec etiam vnitatum numeri sint quadrati. Quoniam verò modum hunc, & duplicem illius casum fusè ad quadragesimam quintam quarti explicauimus, non est cur ibidem adnotata hîc reponantur, ne inani eiusdem rei repetitione commentarios nostros augere velle videamur.

Sextus modus est. Quando propositi numeri diuersimodè componuntur ex quadratis, Numeris & vnitatibus, & hîc pro omni casu qui excogitari possit, duæ regulæ sunt obseruandæ, vt æquatio fit explicabilis. Primo enim oportet, vt vel quadratorum, vel vnitatum numerus quadratus sit. Deinde oportet interuallum propositorum numerorum, ex vna vel ex duabus speciebus tantùm componi. Cæterùm casus omnes possibiles explicare nobis non est propositum, sed eos omnes in quos incidit Diophantus subiicere satis habebimus, cùm ex iis colligi possit quomodo in aliis sit procedendum.

Primò ergo accidit vtrumque propositorum Numerorum componi ex tribus speciebus supradictis, & eorum interuallum vnica tantùm constare specie, vt vigesima tertij, vbi æquantur quadrato 4 Q. + 3 N. − 1. & 4 Q. + 4 N. − 1. quorum interuallum 1 N. ad quod conficiendum mutuo ductu deligi possunt soli $\frac{1}{4}$. & 4 N. vt in eorum summa reperiantur 4 N. duplum scilicet 2 N. lateris quadrati 4 Q. Quare vnica contingit solutio. Sic etiam vigesima prima tertij, æquantur quadrato 4 Q. + 3 N. − 1. & 4 Q. − 1 N. − 1. quorum interuallum 4 N. quod mutuo ductu conficiunt 1. & 4 N. ob causam suprà allatam. Et vnica tantùm contingit solutio.

Secundò accidit vtrumque propositorum numerorum ex duabus componi speciebus, alterum scilicet ex quadratis & vnitatibus, alterum ex Numeris & vnitatibus, interuallum autem illorum constare ex quadratis & Numeris. Sic prima quinti æquantur quadrato 1 Q. − 12. & 6 $\frac{1}{2}$ N. − 12. quorum interuallum 1 Q. − 6 $\frac{1}{2}$ N. Quare tales deligendi numeri quorum mutuo ductu id fiat, vt in eorum summa reperiantur 2 N. duplum lateris quadrati 1 Q. Igitur alij sumi non possunt quàm 1 N. & 1 N. − 6 $\frac{1}{2}$. Sic rursus secunda quinti æquantur quadrato 1 Q. + 20. & 4 N. + 20. quorum interuallum 1 Q. − 4 N. quod fit ex 1 N. in 1 N. − 4. Sic denique sexta sexti, æquantur quadrato 1 Q. + 1. & 14 N. + 1. quorum interuallum 1 Q. − 14 N. quod fit ex 1 N. in 1 N. − 14.

Tertiò accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis, Numeris, & vnitatibus. Alterum ex quadratis & Numeris, vt decima quinta tertij, vbi æquantur quadrato 4 Q. − 1 N. − 4. & 4 Q. + 15 N. quorum interuallum 16 N. + 4. ad quod conficiendum deligendi numeri, in quorum summa re-

periantur 4 N. ac proinde soli 4. & 4 N. + 1 deligi possunt.

Quartò accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis, Numeris, & vnitatibus, alterum ex quadratis & vnitatibus. Sic vigesima quarta quarti, æquantur quadrato 1 Q. + 1 N. − 1. & 1 Q. − 1. quorum interuallum 1 N. quod fit ex $\frac{1}{2}$. in 2 N. Sic rursus octaua sexti, æquantur quadrato 1 Q. + 14 N. + 1. & 1 Q. + 1. quorum interuallum 14 N. quod fit ex 2 N. in 7. Posset etiam in hoc casu interuallum numerorum componi ex Numeris & vnitatibus, vt nobis accidit vigesimam tertiam quarti, per duplicatam æqualitatem soluentibus, æquauimus enim quadrato 1 Q. + 1 − 1 N. & 1 Q. − 1. quorum interuallum 2 − 1 N. quod fit ex $\frac{1}{2}$. in 4 − 2 N.

Quintò denique accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis, Numeris, & vnitatibus, alterum verò ex Numeris & vnitatibus, vt propositione hac vigesima quarta libri huius, vbi 1 Q. + 1048576 − 6144 N. & 1 N. + 64. æquantur quadrato. Quo casu vt interuallum ex duabus tantùm speciebus componatur, necesse est vel vnitates, vel Numeros vtrobique æquales multitudine reperiri, vel saltem inter eos esse rationem quadrati ad quadratum, quò possint ad æqualitatem reduci, vt in data hypothesi, quia vnitates 1048576. & 64. sunt in ratione quadrati ad quadratum, cùm vterque numerus sit quadratus, reducuntur ad æqualitatem ducendo 1 N. + 64. in 16384. denominatorem rationis quam habet 1048576. ad 64. & fit 16384 N. + 1048576. æquandus quadrato, vnà cum ipso 1 Q. + 1048576 − 6144 N. Quare horum interuallum, iam ex duabus tantùm constat speciebus, est enim 22528 N. − 1 Q. vel contrà 1 Q. − 22528 N. & duobus modis resolui potest æquatio, quia tam quadratorum quàm vnitatum numerus quadratus est, vt suprà satis supérque docuimus

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ᾖ ἄλλος τετράγωνος, καὶ πλευρά, καὶ μερισθεὶς παρὰ μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ποιῇ κύβον, καὶ πλευράν. τετάχθω ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ς^{ου} α. ἡ δὲ ἑτέρα ΔΥ α. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ὢν τετράγωνος, καὶ πλευρά. [καὶ μερισθεὶς παρὰ τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ποιεῖ κύβον καὶ πλευράν.] λοιπόν ἐστι ΔΥΔ α ΔΥ α. ἴσον εἶναι τετραγώνῳ, καὶ πάντα παρὰ δύναμιν. γίνεται δύναμις α μ° α. ἴση τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς^{ου} α. ⋔ μ° β. ὅθεν ὁ ς^{ος} γίνεται μ° γ^{δ}. καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt quadratus hypotenusæ sit alius quadratus, & latus; & diuisus per vnum laterum circa rectum, faciat cubum & latus. Statuatur vnum laterum circa rectum 1 N. alterum verò 1 Q. & manet quadratus hypotenusæ æqualis quadrato aucto suo latere, idemque diuisus per vnum laterum circa rectum, facit cubum cum suo latere. Restat vt 1 QQ. + 1 Q. æquetur quadrato. Et omnia per 1 Q. diuidatur, fit 1 Q. + 1. æqualis quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. − 2. fit 1 N. $\frac{3}{4}$. & reliqua sunt manifesta.

IN QVAESTIONEM XXIII.

NESCIO quid somniat hîc Xilander de quadrilatero regulari, & de numero 80. Sanè in codice manu exarato sic habebatur, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης

τετράγωνος, ἢ ἄλλος τετράγωνος καὶ π. Quare cùm passim hoc libro vox πλευρὰ exprimatur vnico π cum λ. superscripto, hac ratione $π^{λ}$. satis colligi poterat, veram lectionem esse, ἢ ἄλλος τετράγωνος, καὶ πλευρά.

Cæterùm artificiosè Diophantus per ipsas positiones, duabus propositi partibus satisfacit, nam quadratus hypotenusæ fit 1 QQ. + 1 Q. qui est quadratus cum suo latere, & idem quadratus hypotenusæ diuisus per alterum laterum circa rectum, puta per 1 N. dat quotientem 1 C. + 1 N. cubum scilicet cum suo latere. Quamobrem superest solùm, vt quadratus hypotenusæ, nempe 1 QQ. + 1 Q. æquetur quadrato. Et diuidendo per 1 Q. fit 1 Q. + 1. æquandus quadrato, cuius latus poni potest 1 N. – quotlibet vnitatibus quarum quadratus superet 1. Ponit Diophantus 1 N. – 2. vnde fit 1 N. $\frac{3}{4}$. suntque trianguli quæsiti latera $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{15}{16}$. Quadratus hypotenusæ est $\frac{225}{256}$. qui continet quadratum $\frac{81}{256}$. & eius latus $\frac{9}{16}$. seu $\frac{144}{256}$. & diuidendo eundem quadratum hypotenusæ per latus $\frac{3}{4}$. fit $\frac{900}{768}$. seu $\frac{75}{64}$. qui continet cubum $\frac{27}{64}$. & eius latus $\frac{3}{4}$. seu $\frac{48}{64}$. Non solùm autem inuenti hac arte numeri præstant ea quæ requirit Diophantus, sed præterea summa laterum circa rectum est quadratus cum suo latere, vt patet tum ex positionibus, nam summa laterum circa rectum posita est 1 Q. + 1 N. tum ex ipsa solutione, nam $\frac{3}{4}$. est latus quadratum de $\frac{9}{16}$.

Hîc etiam formari poterit expeditus Canon.

Quemlibet quadratum vnitate multatum, diuide per duplum sui lateris, vel è conuerso, vter volueris quotientum erit alterum laterum circa rectum, & eius quadratus erit alterum latus. Horum autem quadrati simul conficient hypotenusæ quadratum.

Verbi gratia aufer 1. à quadrato 9. & residuum 8. diuide per 6. duplum lateris ipsius 9. vel contrà diuide 6. per 8. fiet quotiens $\frac{4}{3}$. vel $\frac{3}{4}$. alterum laterum circa rectum. Ergo alterum erit $\frac{16}{9}$. vel $\frac{9}{16}$. & hypotenusa $\frac{20}{9}$. vel $\frac{15}{16}$. Quare vnica operatione duplex reperitur solutio, cuius rei ratio est, quia contingit 1 Q. + 1. æquari quadrato, & quia tam 1 Q. quàm 1. quadratus est, potest latus illius fingi vel 1 N. – quotlibet vnitatibus, vel 1 – quotlibet Numeris, puta, vel 1 N. – 3. vel 1 – 3 N.

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt vnum laterum circa rectum sit cubus; alterum verò sit cubus suo multatus latere, hypotenusa denique sit cubus auctus suo latere. Statuatur hypotenusa 1 C. + 1 N. vnum verò laterum circa rectum 1 C. – 1 N. Reliquum ergo latus erit 2 Q. Restat vt 2 Q. æquentur cubo. Esto 1 C. & fit 1 N. 2. Ad positiones. Erit triangulum 6. 8. 10. & constat.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ κύβος, ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ κύβος παρὰ πλευράν, ὁ δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ κύβος καὶ πλευρά. τετάχθω ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ κ^υ ᾱ. ἀριθμοῦ ᾱ. ὁ δὲ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν κ^υ ᾱ. λεῖψει ἀριθμοῦ ᾱ. ὁ ἄρα ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἔσται δυνάμεων β̄. λοιπόν ἐστι δυνάμεις β̄. ἰσῶσαι κύβῳ. ἔστω κ^υ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται τὸ τρίγωνον ϛ. η. ι. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XXVI.

HIc duo maximè notanda sunt. Primum non sine arte poni hypotenusam 1 C. + 1 N. & alterum laterum 1 C. – 1 N. Nam hac ratione satisfit duabus postulati partibus, siquidem hypotenusa est cubus cum suo latere, & alterum laterum est cubus suo latere multatus. Deinde cùm vt habeamus tertium latus, oporteat à quadrato hypotenusæ, nempe ab 1 CC. + 2 QQ. + 1 Q. auferre quadratum lateris secundi, puta 1 CC. – 2 QQ. + 1 Q. & quod superest, nempe 4 QQ. sit quadratus tertij lateris, res optimè succedit, eò quod 4 QQ. est quadratum, ac proinde latus eius 2 Q. est tertium latus. Et simile semper eueniet si hypotenusa ponatur quilibet cuborum numerus cubicus, plus suo latere, & secundum latus ponatur idem cubus, minus suo latere. Nam interuallum quadratorum, erit semper certus quadratoquadratorum numerus, qui fit quater ex cubo in suum latus, quandoquidem hi quadrati sunt omnino similes, nisi quod in quadrato hypotenusæ continetur duplum producti ex cubo in suum latus cum signo pluris, & in quadrato lateris secundi, continetur idem duplum producti ex cubo in suum latus cum signo minoris. Proinde quadratorum interuallum aliud non est quàm quadruplum producti ex cubo in suum latus. Igitur quadruplum hoc semper esse quadratum demonstrandum est. Non solùm autem hoc ostendemus, sed quod vniuersalius est, ducto quolibet quadrato in aliquem numerum, & producto in cubum eiusdem numeri multiplicato, produci quadratum, vt non de quadruplo tantùm, sed etiam de noncuplo, sedecuplo, &c. idem constet.

D 9. E 3. F 1.
A 2. B 4. C 8.
G 18. H 12.

Esto quilibet numerus A. cuius quadratus B. & cubus C. & sumatur quilibet quadratus D. quo ducto in A. fiat G. dico si G ducatur in cubum C. fieri quadratum. Sumatur enim E latus quadrati D. & sit F vnitas, ductoque E in B producatur H. Patet igitur per ea quæ ad definitionem quartam primi, demonstrata sunt, tam tres A B C. quàm tres D E F. esse proportionales. Quare cùm ex primo D in primum A. fiat G. & ex secundo E in secundum B fiat H. ac denique ex tertio F in tertium C. fiat ipse C.[1] erunt & tres G. H. C. proportionales.[2] Quare ex G in C. fiet quadratus ipsius H. Quod erat propositum.

Hinc euidens est dupliciter variari posse solutionem & positiones. Nam primò licet ponere pro hypotenusa quemlibet cuborum numerum cubicum, plus latere ipsius cubi, & pro altero laterum, eundem cubum minus suo latere. Deinde tertium latus quod semper reperitur certus quadratorum numerus, potest æquari diuersimodè alicui cuborum numero cubico, vt in hypothesi Diophanti 2 Q. possunt æquari $\frac{1}{8}$ C. $\frac{8}{27}$ C. $\frac{27}{64}$ C. &c. vt si ponas 2 Q. æquales $\frac{1}{8}$ C. fiet quæsitum triangulum 4112. 4080. 512. Necesse est autem hic 2 Q. æquari alicui cuborum numero cubico minori quàm 2. quia cùm alterum latus positum sit 1 C. – 1 N. oportet vt 1 C. sit maior suo latere, quod accidet si 1 N. sit maior vnitate. Id autem continget si 2 Q. æquentur cuilibet cubo minori quàm 2. vt euidens est, quia valor Numeri reperitur diuidendo 2. per aliquem cubum. Si ergo cubus ille sit minor quàm 2. fiet vtique quotiens maior vnitate.

Hîc etiam formabitur huiusmodi Canon.

Per quemlibet cubum minorem binario, diuide binarium, quotientem adde suo cubo, & deme à suo cubo, habebis hypotenusam, & vnum laterum. Tertium verò latus erit duplum quadrati quotientis eiusdem.

Sed & simili prorsus artificio licebit soluere huiusmodi quæstiones.

Inuenire triangulum rectangulum, vt vnum laterum circa rectum, sit quadratus, alterum quadratus absque latere: hypotenusa quadratus cum latere.

Esto hypotenusa 1 Q. + 1 N. vnum latus 1 Q. – 1 N. ergo à quadrato hypotenusæ auferendo lateris quadratum, manet tertij lateris quadratus 4 C. quod quia

volumus esse quadratum, oportet vt quadratus ipsius sit quadratoquadratus. Igitur 4 C. æquanrur quadratoquadrato. Esto 1 QQ. fit igitur 1 N. 4. estque triangulum 20. 12. 16. vbi etiam necesse est 4 C. æquari alicui quadratoquadrato minori quàm 4. ob causam suprà explicatam. Et si ponas 4 C. æquari $\frac{1}{16}$ QQ. fiet 1 N. 64. eritque triangulum 4160. 4032. 1024.

Hîc finem impositutus eram nostris commentariis in hosce Diophanti Arithmeticorum libros, cùm venit in mentem, multa alia, eaque non iniucunda proponi posse de triangulis rectangulis problemata, quę huic libro subiicere non abs re visum est, ab illis sumentes exordium quæ determinationes varias de lateribus, vel de ipsa trianguli area docent.

PROBLEMA PRIMVM.

Dato ambitu trianguli, inuenire terminos intra quos consistere debet hypotenusa. Datus ambitus esto 10.

Primum certum est hypotenusam, minorem esse debere semisse dati ambitus, eò quod cuiuslibet trianguli latus, minus est duobus reliquis simul. Quare maior quæsitorum terminorum est 5. exclusiuè. Vt autem habeatur minor terminus, ponatur hypotenusa 1 N. ergo reliqua latera simul erunt 10 − 1 N. Quare vt fiat triangulum rectangulum, oportet diuidere 10 − 1 N. in duos numeros, quorum quadrati simul conficiant 1 Q. Quod vt fieri possit per Canonem trigesimæ primi, constat oportere, vt duplum summæ quadratorum, putà 2 Q. superet quadratum summæ duorum numerorum, nempe 100 − 20 N. + 1 Q. Quare sublaris vtrimque æqualibus, & addito defectu, fit 1 Q. + 20 N. maior quàm 100. ex hac autem æquatione fit 1 N. ℞ 200 − 10. Ergo certum est hypotenusam, non posse esse minorem quàm ℞ 200 − 10. Quapropter ℞ 200 − 10. est minor terminus inclusiuè. Dico inclusiuè, quia hypotenusa poni potest ℞ 200 − 10. si videlicet latera circa rectum ponantur æqualia. Nam conditio ad trigesimam primam primi apposita, catenus locum habet, quatenus inæquales numeri quæruntur, vt ibi adnotauimus. Ex his igitur elici potest huiusmodi Canon.

Semissis dati ambitus est maior terminus exclusiuè. Et si sumas duplum quadrati eiusdem ambitus, & ab illius latere auferas ipsum ambitum, residuum erit minor terminus inclusiuè.

Itaque si in rationalibus numeris ipsum minorem terminum exhiberi cupias, id fiet per approximationem hac arte. Quia vt constat ex suprà dato Canone, minor terminus hypotenusæ respectu ambitus, est ℞ 2 Q. − 1 N. sume latus proximum de 2 Q. putà $\frac{99}{70}$ N. & hinc aufer 1 N. restat $\frac{29}{70}$ N. Quare talem habeto regulam.

Ducito datum ambitum in 29. productum diuide per 70. orietur minor terminus quæsitus.

Vt data circumferentia 10. ducito 10 in 29. fit 290. quem diuide per 70. fit minor terminus quæsitus 4 $\frac{1}{7}$. Quare dices dato ambitu 10. hypotenusam fore minorem quàm 5. non minorem quàm 4 $\frac{1}{7}$.

PROBLEMA II.

Dato ambitu trianguli rectanguli, inuenire terminos summæ laterum circa rectum.

Ex præcedente pendet hæc quæstio, quia enim summa laterum circa rectum, vna cum hypotenusa, conficit totum ambitum, paret terminos summæ laterum circa rectum respondere terminis hypotenusæ, ita vt ab ambitu trianguli auferendo sigillatim terminos hypotenusæ, relinquantur termini summæ laterum. Sic posito ambitu 10. cùm per præcedentem fiant termini hypotenusæ, 5. & ℞

200 – 10. si vtrumque auferas à toto ambitu 10. remanebunt termini summæ laterum circa rectum, nimirum minor exclusiuè 5. inclusiuè 20 – ℞ 200. Vnde Canon.

Semissis dati ambitus est minor terminus exclusiuè, & si à duplo ambitus, auferas latus dupli quadrati ipsius ambitus, residuum erit maior termnus inclusiuè.

Fiet igitur terminus respectu ambitus 2 N. – ℞ 2 Q. seu per approximationem $\frac{41}{70}$ N. vnde regula.

Ducito datum ambitum in 41. productum diuide per 70. orietur maior terminus quæsitus.

Vt dato ambitu 10. ducito 10. in 41. fit 410. quem diuide per 70. fit maior terminus quæsitus 5 $\frac{6}{7}$. Oportet ergo summam laterum circa rectum cadere inter 5. & 5 $\frac{6}{7}$.

PROBLEMA III.

Dato ambitu, inuenire terminos aggregati ex hypotenusa, & ex altero laterum. Ambitus esto 12.

Primo patet maiorem terminum exclusiuè esse ipsum ambitum 12. potest enim aggregatum hypotenusæ & alterius lateris, statui quilibet numerus infrà 12. & quantumuis exiguus numerus relinquatur pro tertio latere, perfici poterit triangulum. Minor vero terminus est 6. semissis ipsius 12. Quod sic probatur. Quia
19.3. poris. quadratus ipsius ambitus 12. [a] æquatur duplo producti ex aggregato hypotenusæ & baseos, in aggregatum hypotenusæ & perpendiculi, semissis eiusdem quadrati, puta 72. æquabitur producto ex aggregato eodem in idem aggregatum. At 72. fit vt patet, ex 12. in suum semissem 6. Quare si 72. diuidatur per 6. fit quotiens 12. & si 72. diuidatur per numerum minorem quàm 6. fit quotiens maior quàm 12. Euidens ergo est aggregatum hypotenusæ & baseos non posse esse 6. vel minorem quàm 6. alioquin sequeretur aggregatum hypotenusæ & perpendiculi esse 12. vel maius quàm 12. Quod est impossibile cùm totus ambitus ponatur 12. Itaque fiet breuissimus Canon.

Ipse ambitus, & eius semissis sunt quæsiti termini exclusiuè.

PROBLEMA IIII.

Dato ambitu inuenire maximum areæ terminum.
Datus ambitus esto 10.

Inueniatur per secundam harum maximus terminus summæ laterum circa rectum, puta 20 – ℞ 200. & huius quadratus esto 600 – ℞ 320000. cuius octaua pars sit 75 – ℞ 5000. dico hunc esse maximum areæ terminum; quia enim octaua pars alicuius quadrati æquatur semissi quadrati à latere subduplo lateris propositi quadrati, erit 75 – ℞ 500. semissis quadrati à semisse ipsius 20 – ℞ 200. puta semissis
2. 2. poris. quadrati ipsius 10 – ℞ 50. Itaque quoniam quadratus semissis alicuius numeri [a] maior est producto duarum quarumlibet inæqualium partium eiusdem numeri, erit quadratus ipsius 10 – ℞ 50. maior producto duarum quarumlibet inæqualium partium, in quas secari possit 20 – ℞ 200. Quare cùm area trianguli sit semissis producti duorum laterum, quorum summa 20 – ℞ 200. non poterit area maior esse semisse quadrati ipsius 10 ℞ 50. hoc est non poterit esse maior quàm 75 – ℞ 500. Hinc ergo fiet huiusmodi Canon.

A dodrante quadrati dati ambitus, aufer latus quadratum semissis quadratoquadrati eiusdem ambitus, residuum erit quæsitus terminus.

Proinde si libet in rationalibus quæsitũ terminum præscribere, cùm ex dato Canone area respectu ambitus sit $\frac{3}{4}$ Q. – ℞ $\frac{1}{2}$ QQ. sume proximũ latus de $\frac{1}{2}$ QQ. nempe $\frac{99}{140}$ Q. quem aufer à $\frac{3}{4}$ Q. superest $\frac{3}{70}$ Q. Hinc ergo formabitur Canon.

Ducito

Ducito quadratum ambitus in 3. productum diuide per 70. orietur areæ terminus.

Sic in data hypothesi duciro quadratum ipsius 10. puta 100. in 3. fiet 300. quem diuide per 70. fiet 4 $\frac{2}{7}$. quæsitus areæ terminus.

Non præscribirur aurem minimus terminus areæ, quia dari non poteſt. Etenim ſumma larerum circa rectum, ſemper diuidi poterit in duos numeros, quorum mutuo ductu fiat quantumlibet exiguus numerus, vt conſtat ex conditione appoſita trigèſimæ primi, quæ vt quæſtio ſit poſſibilis, requirit tantùm quadratum ſummæ maiorem eſſe quadruplo producti. Vnde euidens eſt, quò minor erit productus, eò magis ſolui poſſe quæſtionem.

PROBLEMA V.

Data hypotenuſa pręſcribere terminos ſummæ laterum circa rectum. Eſto hypotenuſa 5.

Quoniam ex conditione appoſita trigeſimæ primæ primi, oportet duplum quadrati hypotenuſæ ſuperare, vel ſaltem æquare quadratum ſummæ laterum circa rectum, cùm duplum quadrati 5. ſit 50. non poterit ſumma laterum circa rectum excedere ℞ 50. ſed eadem ſumma laterum circa rectum debet ſuperare hypotenuſam, vt duo trianguli latera ſimul ſint maiora reliquo. Igitur quæſiti termini ſunt 5. excluſiuè, & ℞ 50. incluſiuè. Hinc fiet Canon.

Ipſa hypotenuſa eſt minimus terminus. At latus dupli quadrati hypotenuſæ eſt maximus terminus.

Quia ergo reſpectu hypotenuſæ maximus terminus ſummæ laterum circa rectum eſt ℞ 2 Q. & latus proximum de 2 Q. eſt $\frac{99}{70}$ N. hunc habeto Canonem.

Ducito hypotenuſam in 99. productum diuide per 70. orietur quæſitus terminus.

Vt in data hypotheſi ducito 5. in 99. fit 495. quem diuide per 70. fit terminus quæſitus 7 $\frac{1}{14}$.

PROBLEMA VI.

Data ſumma laterum circa rectum præſcribere terminos hypotenuſę. Sit ſumma laterum circa rectum 6.

Igitur ex dictis ad precedentem quadratus ipſius 6. puta 36. non debet excedere duplum quadrati hypotenuſæ. Quare hypotenuſa non poteſt eſſe minor quàm ℞ 18. Debet autem eadem eſſe minor quàm ſumma laterum 6. Ergo quæſiti termini ſunt 6. excluſiuè, & ℞ 18. incluſiuè. Vnde formarur Canon.

Ipſa ſumma laterum circa rectum eſt maximus terminus excluſiuè. At latus ſemiſſis quadrati eiuſdem ſummæ laterum, eſt minimus terminus incluſiuè.

Quoniam igitur reſpectu ſummæ laterum circa rectum, ſit hypotenuſæ minimus terminus ℞ $\frac{1}{2}$ Q. cùm proximum latus de $\frac{1}{2}$ Q. ſit $\frac{70}{99}$. N. hanc habe regulã.

Ducito ſummam laterum circa rectum in 70. productum diuide per 99. orietur minimus terminus hypotenuſæ.

Vt in data hypotheſi ducito 6. in 70. fit 420. quem diuide per 99. fit quæſitus terminus hypotenuſæ 4 $\frac{3}{11}$.

PROBLEMA VII.

Data hypotenuſa præſcribere totius ambitus terminos. Sit data hypotenuſa 5.

Inueniantur per quintam termini laterum circa rectum, puta 5. & ℞ 50. qui addantur ſigillatim ipſi hypotenuſæ 5. fient quæſiti termini 10. excluſiuè, & 5 + ℞ 50. incluſiuè. Vnde Canon.

Duplum ipſius hypotenuſæ eſt minimus terminus excluſiuè. At aggregatum ex hypotenuſa & latere dupli quadrati eiuſdem hypotenuſæ, eſt maximus terminus incluſiuè.

Cùm ergo maximus ambitus terminus respectu hypotenusæ sit 1 N. + ℞ 2 Q. & ℞ 2 Q. per approximationem sit $\frac{169}{70}$ N. inuenietur quæsitus terminus in rationalibus hac arte.

Ducito hypotenusam in 169. productum diuide per 70. orietur maximus circumferentiæ terminus.

Sic in data hypothesi ducito 5. in 169. fit 845. quem diuide pet 70. fiet 12 $\frac{1}{14}$. quæsitus terminus.

PROBLEMA VIII.

Data summa laterum circa rectum, præscribere circumferentiæ terminos. Sit data summa 6.

Inueniantur per sextam hypotenusæ termini, puta 6. & ℞ 18. qui addantur sigillarim datæ summæ laterum 6. fient quæsiti circumferentiæ termini, puta 12. exclusiuè & 6 + ℞ 18. inclusiuè. vnde Canon.

Duplum summæ laterum circa rectum, est maximus terminus exclusiuè. At aggregatum ex summa laterum, & ex latere semissis quadrati eiusdem summæ, est minimus terminus inclusiuè.

Cùm ergo minimus circumferentiæ terminus, respectu summæ latetum circa rectum, sit 1 N. + ℞ $\frac{1}{2}$ Q. & ℞ $\frac{1}{2}$ Q. pet approximationem sit $\frac{99}{140}$. Inuenietur quæsitus terminus in rationalibus hoc pacto.

Ducito summam laterum in 239. productum diuide per 140. orietur minimus circumferentiæ terminus.

Sic in data hypothesi ducito 6. in 239. fit 1434. quem diuide pet 140. fiet quæsitus terminus 10 $\frac{17}{70}$.

PROBLEMA IX.

Data summa latetum circa rectum, inuenite maximum areæ terminum. Esto data summa 4.

Sume quadrarum datæ summæ, puta 16. huius octaua pars nempe 2. est quæsitus areæ terminus, vt demonstratum est quarta harum.

PROBLEMA X.

Data hypotenusa inuenire maximum areæ terminum. Data hypotenusa esto 6.

Sume quadratum datæ hypotenusæ, puta 36. huins quarta pars nempe 9. est quæsitus areæ terminus. Nam per quintam duplum quadrati hypotenusæ debet superare, vel saltem æquare quadratum summæ laterum circa rectum. Quare quadratns summæ larerum circa tectum, ad maximum est 72. cuius octaua pars per præcedenrem est maximus areæ terminus. At octaua pars de 72. est quarta pars semissis ipsius 72. puta ipsius 36. Igitur patet ptopositum.

PROBLEMA XI.

Data atea inuenire minimum terminum summæ latetum circa rectum. Area esto 6.

Sume octuplum areæ, puta 48. huius latus nempe ℞ 48. est minimus terminus summæ laterum circa rectum, vt constat ex quarta, & nona.

PROBLEMA XII.

Data area inuenire minimum terminum hypotenusæ. Area esto 6.

Sume quadruplum areæ, puta 24. huius latus nimirum ℞ 24. est minimus hypotenusæ terminus, vt constat ex quinta, & decima.

PROBLEMA XIII.

Data area præſcribere minimum ambitus terminum. Area eſto 6.

Sumantur per duas præcedentes minimi termini ſummæ laterum & hypotenuſæ, puta ℞ 48. & ℞ 24. horum ſumma ℞ 48. + ℞ 24. eſt quæſitus circumferentiæ terminus, vt euidens eſt.

PROBLEMA XIV.

Triangulum rectangulum in rationalibus conſtituere, vt ſumma laterum circa rectum ſit datus numerus.

Summa laterum circa rectum eſto 8.

Ponatur vnum latus 1 N. erit alterum 8 − 1 N. cùm ergo horum quadrati ſimul debeant æquari quadrato hypotenuſæ, fiet ſumma quadratorum 64 − 16 N. + 2 Q. æqualis quadrato, cuius latus ponatur 8 − tot numeris qui excedant 2. vt ſcilicet fiat 1 N. minor quàm 8. quia latus alterum poſitum eſt 8 − 1 N. fingatur ergo latus prædictum 8 − 3 N. fiet quadratus 64 − 48 N. + 9 Q. æqualis 64 − 16 N. + 2 Q. vnde fit 1 N. $\frac{32}{7}$. vnum laterum circa rectum, eſtque alterum $\frac{24}{7}$. ipſa hypotenuſa $\frac{40}{7}$. Hinc elicitur facilis Canon.

Sume quemlibet numerum maiorem binario, inde aufer 1. reſidui duplum ducito in datam ſummam, productum diuide per quadratum ſumpti numeri binario multatum, orietur vnum laterum circa rectum.

PROBLEMA XV.

Inuenire triangulum rectangulum in rationalibus, vt eius ambitus ſit datus numerus. Eſto ambitus 20.

Pone latera quæſiti trianguli 3 N. 4 N. 5 N. fit ſumma 12 N. æqualis 20. eſt ergo 1 N. $\frac{5}{3}$. & quæſitum triangulum 5. 6 $\frac{2}{3}$. 8 $\frac{1}{3}$. & ſic infinitæ reperientur ſolutiones ſi loco 3. 4. 5. deligantur alia atque alia triangula non ſimilia. Sed & licebit inuenire triangulum ſimile cuicunque dato triangulo rectangulo, eodem numero ambitus manente.

Aliter ſume ſemiſſem quadrati ipſis 20. puta 200. & ſtatue aggregatum hypotenuſæ & baſeos quemlibet numerum inter 20. & eius ſemiſſem 10. ob ea quæ demonſtrata ſunt tertia harum. Verbi gratia pone tale aggregatum 15. erit ergo perpendiculum 5. At diuidendo 200. per 15. quotiens 13 $\frac{1}{3}$. erit aggregatum hypotenuſæ & perpendiculi per decimam nonam tertij poriſmatum. Quare ſi inde auferas perpendiculum, puta 5. manebit hypotenuſa 8 $\frac{1}{3}$. quam ſi ſubtrahas à 15. fiet baſis 6 $\frac{2}{3}$.

PROBLEMA XVI.

Dato ambitu, & data area trianguli rectanguli, inuenire triangulum.

Eſto ambitus 40. Area 60.

Pone hypotenuſam 1 N. ergo latera circa rectum ſimul ſunt 40 − 1 N. cuius quadratus 1600 − 80 N. + 1 Q. æquatur quadratis laterum circa rectum, & duplo plani ſub ipſis contento, hoc eſt quadrato hypotenuſæ, & quadruplo areæ. 4. ſecundi.
Quare 1 Q. + 240. æquantur 1600 − 80 N. + 1 Q. Vnde fit 1 N. 17. Ipſa ſcilicet hypotenuſa. Igitur ſumma laterum circa rectum eſt 23. Quamobrem duplici via inueniri poſſunt ipſa latera, diuidendo ſcilicet 23. in duas partes, quarum quadrati ſimul efficiant 289. per trigeſimam primam primi: vel in duas partes quarum mutuo ductu fiat 120. per trigeſimam primi, & vtroque modo reperientur latera 15. & 8. Hinc fit Canon.

A quadrato ambitus aufer quadruplum areæ, reſiduum diuide per duplum ambitus, orietur hypotenuſa.

PROBLEMA XVII.

Dato ambitu, & ſolido ſub tribus lateribus, inuenire triangulum. Eſto ambitus 12. ſolidus 60.

Pone hypotenuſam 1 N. erunt latera circa rectum ſimul 12 – 1 N. At planus ſub iiſdem lateribus $\frac{60}{1 N}$. Quadratus autem ſummæ laterum circa rectum eſt 144 – 24 N. + 1 Q. vnde ſi auferas quadratos ipſorum laterum, hoc eſt illis æqualem quadratum hypotenuſæ, relinquetur 144 – 24 N. duplum plani ſub lateribus. Igitur huius dimidium, puta 72 – 12 N. æquatur $\frac{60}{1 N}$. Vnde fit 1 N. 5. hypotenuſa ſcilicet, eſt ergo ſumma laterum circa rectum 7. & planus ſub ipſis 12. vnde etiam vt ſuprà duplici via, nimirum per trigeſimam vel per trigeſimam primam primi inuenies latera 3. & 4. Hinc elicietur facilis Canon.

Diuide datum ſolidum per datum ambitum, quotientem aufer à quadrato quadrantis ipſius ambitus, reſidui latus addè eidem quadranti, fiet hypotenuſa.

PROBLEMA XVIII.

Dato vno laterum circa rectum, & plano ſub altero latere & hypotenuſa, inuenire alterum latus & hypotenuſam.

Eſto alterum latus 4. Planus ſub altero & hypotenuſa 15. faciat.

Ponatur latus quæſitum 1 N. ergo hypotenuſa eſt $\frac{15}{1 N}$. cuius quadratus $\frac{225}{1 Q}$. æquatur quadratis laterum, puta 16 + 1 Q. & tandem 1 QQ. + 16 Q. æquantur 225. & fit 1 N. 3. quæſitum latus. Eſt ergo hypotenuſa 5. Sic poni poteſt hypotenuſa 1 N. alterum latus $\frac{15}{1 N}$. & fiet 1 Q. æqualis 16 + $\frac{225}{1 Q}$. & tandem 1 QQ. æquabitur 16 Q. + 225. vnde fiet 1 N. 5. Hinc formatur Canon.

Quadrato dati plani adde quadratum ſemiſsis quadrati dati lateris, ſummæ latus adde vel adime iidem ſemiſsi quadrati dati lateris, proueniet hinc quadratus quæſiti lateris, inde quadratus hypotenuſæ.

PROBLEMA XIX.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius ambitus ſit quadratus, & idem ambitus ſiue adſumpta, ſiue detracta area quadratum faciat.

Primùm quærere oportet triangulum rectangulum, cuius ambitus ſit quadratus numerus, & fiet triangulum, per decimam quintam, cuius ambitus æqualis erit cuilibet dato quadrato. Eſto ergo tale triangulum 36. 48. 60. cuius ambitus eſt quadratus 144. & conſtituatur in quadratis, ſintque quæſiti trianguli latera 36 Q. 48 Q. 60 Q. Supereſt vt ambitus ſiue adſumpta ſiue detracta area faciat quadratum. Quia ergo in quolibet triangulo rectãgulo quadratus ſemiſſis hypotenuſæ ſiue illi addatur, ſiue adimatur area facit quadratum, vt ex demõſtratis ad vigeſimam ſecundam tertij facilè infertur, ſumatur quadratus ſemiſſis hypotenuſæ, puta 900 QQ. & is ſtatuatur æqualis ambitui, puta 144 Q. fiet ergo 1 N. $\frac{2}{5}$. & erunt quæſiti latera trianguli $\frac{144}{25}$. $\frac{192}{25}$. $\frac{240}{25}$. & conſtat.

PROBLEMA XX.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius area ſit datus numerus. Oportet autem vt quadratus areæ duplicatæ additus alicui quadratoquadrato, faciat quadratum.

D 81. E 225. F 144.
C 9. A 6. B 12.
K 3. G 2. H 4.

Sit A datus areæ Numerus, cuius duplum B. cuius quadratus F. quo addito ad quadratoquadratum D. fiat quadratus E. Oportet inuenire triangulum cuius area ſit A. ſumatur K latus quadratoquadrati D. & ſit ipſius K quadratus C. diuiſoque A per K producatur G. cuius duplum eſto H. Quia ergo ducto K in G. producitur A. eſt A ad G ſicut K ad vnitatem, ſed

ſicut K ad vnitatem, ita eſt C ad K. Igitur vt eſt C ad K. ſic A ad G. & permutando vt C ad A. ſic K ad G. ſed vt A ad B. ſic eſt G ad H (cùm vtrobique ſit ratio ſubdupla.) ergo ex æquo vt C ad B. ſic eſt K ad H. ſed C B ſunt latera circa rectum trianguli rectanguli, cùm eorum quadrati D F ſimul conficiant quadratum E. [1] Igitur & K H ſunt latera circa rectum trianguli rectanguli, cuius vtique area eſt A. cùm A producatur ex K in G. ſemiſſem ipſius H. Quamobrem conſtat propoſitum. 1. 3. poriſ.

Porro conditio adiecta non ſolùm ſufficiens eſt, ſed & neceſſaria, ita vt dari non poſſit triangulum rectangulum, quin quadratus areæ duplicatæ additus alicui quadratoquadrato, faciat quadratum. Quod eadem facilitate probatur. Sint enim K H. latera circa rectum trianguli dati, & ipſius H. dimidium ſit G quo ducto in K fiat area A. cuius duplum B. cuius quadratus F. dico F. additum alicui quadratoquadrato facere quadratum. ſit enim C quadratus ipſius K. & ipſius C quadratus, hoc eſt quadratoquadratus ipſius K eſto D. Oſtendetur vt ſuprà eſſe C ad B vt K ad H. Quare cùm K H ſint latera circa rectum trianguli rectanguli, erunt & C B latera circa rectum trianguli. Proinde quadrati ipſorum, puta D F. ſimul component quadratum. Quod erat propoſitum.

SCHOLIVM.

Hinc patet, idem oſtendi poſſe de quadratoquadrato ipſius H quod oſtenſum eſt de quadratoquadrato ipſius K. Quare verum eſt in quolibet triangulo rectangulo quadratum areæ duplicatæ additum quadratoquadrato cuiuſlibet lateris circa rectum efficere quadratum. Vt in data hypotheſi 144. cum quadratoquadratis ipſorum 3. & 4. puta cum 81. & 256. facit quadratos 225. & 400. ſed & conditionis adiectæ neceſſitas per Algebram ſic demonſtrabitur. Data area cuiuſlibet trianguli rectanguli puta 6. ponatur vnum laterum circa rectum 1 N. erit alterum $\frac{12}{1N}$. *Vt autem ſit triangulum rationale oportet, vt ſumma quadratorum, puta 1 Q. +* $\frac{144}{1Q}$. *æquetur quadrato, & omnia ducendo in 1 Q. fiet 1 QQ. + 144. æqualis quadrato. Vnde patet quadratoquadratum cuiuſlibet lateris circa rectum adſcito quadrato areæ duplicatæ, debere conficere quadratum.*

Porrò hanc ipſam quæſtionem tractans Franciſcus Vieta Zetetico 16. libri quarti, duas alias ei præfigit conditiones. Prima eſt. Oportet vt area addendo aliquem quadratoquadratum, fiat quadratoquadratus, vel vt ducendo aream in aliquem quadratum, & productum addendo alicui quadratoquadrato, fiat quadratoquadratus. Et hæc conditio, ſufficiens quidem eſt, vt demonſtrat Vieta, ſed an ſit neceſſaria meritò quis ambigat. Sanè arbitror cùm eius neceſſitatem demonſtrare non poſſet ſummi vir ingenij, ſecundam excogitaſſe. Secunda conditio eſt. Oportet vt datus areæ numerus, ſit cubus ſuo multatus latere, vel vt idem per quadratum aliquem multiplicatus, ſit cubus ſuo multatus latere. Et hæc conditio non ſolùm ſuffitiens eſt, vt oſtendit Vieta, ſed etiam neceſſaria vt demonſtrabimus, ne tanti viri cõmentum labare videatur. Quamuis tutius ſit hanc conditionem ita proponere. Oportet vt areæ numerus ſit cubus ſuo multatus latere, latuſve ſuo multatum cubo. Vel vt eo per aliquem quadratum multiplicato vel diuiſo, fiat cubus ſuo multatus latere, latuſve ſuo multatum cubo. Huius autem rei ratio eſt, quia quodlibet triangulum rectangulum, poteſt concipi ſimile alteri triangulo, quod formatum ſit ab vnitate, & ab alio quouis quadrato, cuius quadrati ſi ponas latus 1 N. fiet trianguli hypotenuſa 1 Q. + 1. alterum laterum circa rectum 2 N. alterum 1 Q. − 1. vel 1 − 1 Q. prout 1 N. ſupponitur maior vel minor vnitate. Quare ſit area 1 C. − 1 N. vel 1 N. − 1 C. ita ſi fingas triangulum ab 1. & 4. modo tradito tertia tertij poriſmatum. Fient latera 3. 4. 5. Area verò 6. cubus ſcilicet 8. ſuo multatus latere. At ſi formes triangulum ab 1. & $\frac{1}{4}$. *fiet triangulum* $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{4}$. $\frac{5}{4}$. *cuius area* $\frac{3}{8}$. *eſt latus* $\frac{1}{2}$. *multatum ſuo cubo* $\frac{1}{8}$.

Propoſito verò quolibet alio triangulo, cùm per quartam tertij poriſmatum, neceſſe ſit illud formari à duobus planis ſimilibus, hos planos ſumens, & vtrumque per minorem ipſorum ſigillatim diuidens, fient duo quotientes in eadem ratione, quorum minor erit vnitas, à quibus ſi formes triangulum, erit eius area, cubus ſuo multatus latere per ſuprà demonſtrata. [2] *Quia verò à proportionalibus numeris formata triangula ſimilia ſunt, erit inuentum triangulum primo propoſito ſimile.* [3] *Quare cùm ſimilium triangulorum areæ ſint in ratione duplicata laterum, ſi aream inuenti trianguli ducas in quadratum denominatoris proportionis laterum, fiet area pro-* 9. 3. poriſ. 2. 3. poriſ.

positi trianguli, & è conuerso diuidendo aream propositi trianguli per eundem quadratum, fiet area inuenti, seu cubus suo multatus latere. Sic proposito triangulo 9. 12. 15. inuenies illud formari à planis similibus 3. & 12. quos diuidendo sigillatim per minorem ipsorum 3. fient in eadem ratione 1. & 4. quorum minor vnitas, à quibus si formes triangulum priori simile, puta 5. 4. 3. erit eius area 6. cubus suo multatus latere per suprà demonstrata. Cùm ergo prioris trianguli latera sint tripla laterum posterioris, erit area area noncupla. Quare diuidendo aream 54. per 9. fiet area 6. cubus suo multatus latere. Rursus proposito triangulo 39. 36. 15. cuius area 270. Inuenies formari triangulum à planis similibus 12. & 27. quos si diuidas sigillatim per minorem 12. fient 1. & $\frac{9}{4}$. à quibus finges triangulum priori simile $\frac{13}{4}$. $\frac{12}{4}$. $\frac{5}{4}$. cuius area $\frac{15}{8}$. est cubus $\frac{27}{8}$. suo multatus latere. Quia verò proportio laterum prioris trianguli ad latera posterioris est duodecupla, si per quadratum ipsius 12. puta per 144. diuidas aream 270. fiet vtique $\frac{15}{8}$. cubus suo latere multatus. Quod si inuentis planis similibus à quibus propositum triangulum formatum est, diuidas vtrumque per maiorem ipsorum, fient duo numeri in eadem ratione, quorum maior erit vnitas, à quibus si fingas aliud triangulum, erit eius area latus suo multatum cubo, vt constat ex suprà demonstratis.

Itaque quia diuisio in multiplicationem verti potest, & è conuerso. Nam verbi gratia diuidere 54. per 9. idem est atque multiplicare 54. per $\frac{1}{9}$. ferri potest Vieta limitatio. Et absolutè verùm est aream cuiuslibet trianguli rectanguli esse cubum suo multatum latere, vel inuenire simile triangulum, cuius area sit cubus suo latere multatus.

PROBLEMA XXI.

Dato ambitu trianguli rectanguli, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenusam demissa, inuenire triangulum.

Sit datus ambitus 60. perpendicularis 12. Ponatur hypotenusa 1 N. erit sum-
4. secundi. ma laterum circa rectum 60 – 1 N. cuius quadratus 3600 – 120 N. + 1 Q. [1] æquatur quadratis ipsorum laterum, seu quadrato hypotenusæ, & duplo plani sub lateribus. Igitur 3600 – 120 N. est duplum plani sub lateribus, & 1800 – 60 N. est ipse planus sub lateribus. Quoniam verò, vt constat per octauam sexti, vt se habet hypotenusa ad vnum laterum, sic etiam se habet alterum latus ad perpendi-
19. septimi. cularem, [2] erit planus sub hypotenusa, & sub perpendiculari, æqualis plano sub lateribus. At ex hypotenusa in perpendicularem fiunt 12 N. ergo 12 N. æquantur 1800 – 60 N. & fit 1 N. 25. ipsa scilicet hypotenusa. Quare facile est inuenire latera circa rectum, puta 20. & 15.

Hinc elicitur Canon.

Semissem quadrati dati ambitus diuide per aggregatum ex ambitu & ex perpendiculari, orietur hypotenusa.

PROBLEMA XXII.

Data area trianguli rectanguli, & perpendiculari sub angulo recto in hypotenusam demissa, inuenire triangulum.

Esto area 150. Perpendicularis 12. Ponatur vnum laterum circa rectum 1 N. erit
8. sexti. ergo alterum $\frac{300}{1N}$. Quoniam verò [3] vt est perpendicularis 12. ad vnum laterum circa rectum 1 N. sic est alterum $\frac{300}{1N}$. ad hypotenusam. Inuenietur per regulam proportionum hypotenusa 25. & reliqua latera 20. & 15.

Hinc Canon.

Diuide duplum areæ per perpendicularem, orietur hypotenusa.

ADDENDA COMMENTARIIS IN Definitionem ſeptimam & octauam pag. 7. & 9.

RETRACTANTI commentaria noſtra occurrit mihi definitionem ſeptimam ad mentem Diophanti accommodatius explicari poſſe, ſi accipiatur de fractionibus, in quibus ſuperiores poteſtates per vnitates diuidi intelliguntur. Vt velit Diophantus, verbi gratia, ex $\frac{2}{1N}$. in $\frac{3}{1N}$. produci $\frac{6}{1Q}$. quemadmodum ex 2 N. in 3 N. producuntur 6 Q. & ex $\frac{3}{1N}$. in $\frac{4}{1Q}$. produci $\frac{12}{1C}$. eadem ratione, qua ex 3 N. in 4 Q. producuntur 12 C. & ſic de aliis. Sic enim vtraque definitio, ſeptima ſcilicet & octaua de iiſdem fractionibus accipientur, & tolletur ambiguitas illa, de qua ad definitionem octauam Diophantum criminabamur. ſemper enim apud Diophantum fractio numerica erit ſeu ἀριθμοστὸν, cùm vnitates per Numeros diuidentur, vt $\frac{1}{1N}$. & fractio Quadratica, ſeu δυναμοστὸν, cùm vnitates per quadratos diuidentur, vt $\frac{4}{1Q}$. & ſic de aliis. Et ſanè apparet ex reliquo opere ita ſenſiſſe Diophantum. Nam vbicumque ἀριθμοστὸν vel δυναμοστὸν vſurpat, huiuſmodi fractiones intelligit. Verum erit nihilominus, quod ad definitionem ſeptimam adnotauimus, nimirum eius demonſtrationem, ab iis quæ demonſtrauimus ad definitionem quartam, pendere omnino, vt per ſe manifeſtum eſt.

FINIS.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ
ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

DIOPHANTI ALEXANDRINI
DE MVLTANGVLIS NVMERIS.

PROPOSITIO PRIMA.

QVILIBET numerorum à tenario per vnitatis incrementũ progredientiũ, multangulus est, primus ab vnitate, & habet tot angulos, quot ipse vnitatibus constat. Latus autem ipsorum est, proximus ab vnitate numerus, puta 2. est autem 3. trangulus. 4. quadratus. 5. quinquangulus, & sic deinceps. Cùm autem de quadratis euidens sit, ita eos constitui, quod nascantur numeri alicuius in seipsum multiplicatione, exploratum est quemlibet multangulum multiplicatum aliquo numero secundum proportionem multitudinis angulorum eius, & adsumentem quadratum aliquem secundum proportionem multitudinis angulorum eius, apparere quadratum. Atque hoc nos demonstrabimus, ostendentes quomodo dato latere inueniatur qui poscitur multangulus; & quo-

Ἕκαστος τῶν ἀπὸ τῆς τριάδος ἀριθμῶν αὐξομένων μονάδι, πολύγωνός ἐστι πρῶτος ἀπὸ τῆς μονάδος. καὶ ἔχει γωνίας τοσαύτας, ὅσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐν αὐτῷ μονάδων. πλευρά τε αὐτοῦ ἐστιν ὁ ἑξῆς τῆς μονάδος ἀριθμός, ὁ β. ἔσται δὲ ὁ μὲν γ τρίγωνος, ὁ δὲ δ τετράγωνος, ὁ δὲ ε. πεντάγωνος, καὶ τοῦτο ἑξῆς. Τῶν δὴ τετραγώνων προδήλων ὄντων, ὅτι καθεστήκασι τετράγωνοι διὰ τὸ γεγονέναι αὐτοὺς ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, ἐδοκιμάσθη ἕκαστος τῶν πολυγώνων πολλαπλασιαζόμενος ἐπί τινος ἀριθμοῦ κατὰ τὴν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, καὶ προσλαβόντα τετράγωνόν τινα κατὰ τὴν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ φαίνεσθαι τετράγωνον. ὃ δὴ παραστήσομεν ὑποδείξαντες πῶς ἐκ δοθείσης πλευρᾶς ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος εὑρίσκεται· καὶ πῶς

AB.BG.BD. æqualib. interuallis se superantes; Ostendendum est eum qui fit octies ex AB. in BG. vna cum quadrato ipsius BD. facere quadratum, cuius latus æquale est ipsi AB. & duobus BG. Quoniam ergo AB. æqualis est ipsis BG. GD. diuidetur qui fit octies ex AB. in BG. in eũ qui fit octies ex BG. quadratum, & in eum qui fit octies ex BG. in GD. Et rursus diuiditur vnumquodque prædictorum bifariam, nimirum in eum qui fit quater ex AB. in BG. & in quadratum ex BG. quater, & in cum qui fit quater ex BG. in GD. At qui fit quater ex BG. in GD. vna cum quadrato ex DB. fit quadratus à latere AB. Quærendum igitur est, quomodo quadratus ex AB. & productus ex AB. in BG. quater, & quadratus ex BG. quater, compositi faciant quadratum. Itaque si ponamus ipsi BG. æqualem AE. traiiciemus eum qui fit quater ex AB. in BG. in eum qui fit quater ex BA. in AE. qui mixtus quadruplo quadrati ex GB. seu quadrati ex AE. facit æqualem quadruplo producti ex BE. in AE. qui mixtus quadrato ex AB. fit æqualis quadrato qui ex BE.EA. tanquam vna describitur. At ipsi BE.EA. æquales sunt ipsi AB. & duobus AE. seu duob. BG. quod erat ostendendum.

E....A......B..D...G

ὁ αβ. βγ. βδ. τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερεχέτωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βγ. [μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ βδ. τετραγώνου ποιεῖ τετράγωνον οὗ ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῷ τε. αβ. καὶ δυσὶ τοῖς βγ. ὅτι οὖν ὁ αβ. ἴσος ἐστὶ τοῖς βγ. γδ. διαιρεῖται ὁ ὀκτάκις ὑπὸ τῶν αβ. βγ. εἴς τε τὸν ὀκτάκις ἀπὸ τῶν βγ. τετράγωνον καὶ εἰς τὸν ὀκτάκις ὑπὸ βγ. γδ.] Καὶ πάλιν διαιρεῖται ἕκαστος τῶν εἰρημένων διχῶς, εἴς τε τὸν τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ἀπὸ βγ. τετράγωνον καὶ τὸν τετράκις ὑπὸ βγ. γδ. ὁ δὲ τετράκις ὑπὸ βγ. γδ. μετὰ τῶν ἀπὸ δβ. τετραγώνου, γίνεται τετράγωνος ὁ ἀπὸ αβ. ζητητέον οὖν πῶς ὁ ἀπὸ τῶν αβ. τετράγωνος, καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. καὶ ὁ τετράκις ἀπὸ τῶν βγ. τετράγωνος συντεθέντες ποιοῦσιν τετράγωνον· ἐὰν δὴ θῶμεν τῷ βγ. ἴσον τὸν αε. μεταβησόμεθα τὸν τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. εἰς τὸν τετράκις ὑπὸ βα. αε. ὃς μιγεὶς τῷ τετράκις ἀπὸ γβ. τουτέστι τῷ ἀπὸ αε. ποιήσει ἴσον τῷ τετράκις ὑπὸ βε. εα. ὃ μιγεὶς τῷ ἀπὸ τοῦ αβ. τετραγώνῳ, γίνεται ἴσος τῷ ἀπὸ βε. εα. ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ οἱ δὲ βε. εα. ἴσοι εἰσὶ τῷ τε αβ. καὶ δυσὶ τοῖς αε. τουτέστι δυσὶ τοῖς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε....α.......β..δ...γ

IN SECVNDAM.

IN huius propositionis demonstratione, nulla insignis est difficultas. Tria tamen sunt quæ tyrones fortassis morari queant. Primum est quod ait Diophantus Quadratum ex AB. æquari quadruplo producti

E.....A........B..D...G

a quinta 2. porism. ex BG[a] in GD. vna cum quadrato ex BD. Quod ita probatur. Quoniam AB. supponitur æqualis summæ duorum B G. D G. quorum interuallum BD. [a] patet quadruplum producti ex BG. in DG. vnà cum quadrato interualli BD. æquale esse quadrato summæ ipsorum B G. D G. hoc est quadrato ipsius AB.

Secundum est, quod ait Diophantus quadruplum producti BA. in [a] E vnà
b tertias. cum quadruplo quadrati ex AE. æquari quadruplo producti ex toto BE. in AE. Quod euidens est, quia [b] productus ex BE. in EA. æquatur producto ex BA. in AE. vnà cum quadrato ex AE.

Tertium est, quod ait Diophantus, quadruplum producti ex BE in AE, vna cum quadrato ex AB. æquari quadrato compositi ex BE. EA. Quod rursus patet per 5. 2. porismatum cùm AB. sit interuallum ipsorum BE. EA.

Potest autem hæc propositio & vniuersalius concipi, & breuius atque etiam facilius demonstrari, hac pacto.

Si fuerint tres numeri in mediate arithmetica, octuplum producti ex medio in quemlibet extremorum, adsciscens quadratum alterius extremi, æquatur quadrato compositi ex medii duplo, & ex illo extremo qui in medium octies ductus est.

D 10.
A 2. B 5. C 8.

Sint tres numeri ABC. in mediate arithmetica, & sit D. duplum medii, dico octuplum producti ex B in vnum extremorum C vnà cum quadrato alterius extremi A. æquari quadrato compositi ex ipsis DC. Quia enim sunt in medietate arithmetica ipsi
a quinta 1. porism. b quarta 2. ABC. erit duplum medii, puta D. [a] æquale summæ extremorum AC. Quare ipsorum f C. interuallum erit A. Quadratus autem compositi ex ipsis DC. [b]
c quarta 2. porism. æquatur quadratis ipsorum D. C. & duplo producti ex D. in C. seu quadruplo producti ex B. in C. Quadrati autem ipsorum D C. [c] æquantur rursus duplo producti ex D. in C. seu quadruplo producti ex B in C. & quadrato interualli A. Igitur quadratus compositi ex ipsis D. C. æquatur octuplo producti ex B. in C. vnà cum quadrato ipsius A Quod erat ostendendum. Eodem prorsus argumento probabitur octuplũ producti ex B. in A. vnà cum quadrato ipsius C. æquari quadrato compositi ex ipsis AD Igitur ex omni parte cõstat propositũ.

Aliter etiam Franciscus Vieta propositionem hanc demonstrauit lib. 8. variorum de rebus mathematicis responsorum, per ipsam scilicet Algebræ operationem hac arte. Sit minimus trium numerorum arithmeticæ medietatis A. & sit differentia B. erit ergo medius A + B. maximus vero A + B. bis & si ducatur medius A + B. in maximum A + B. bis fit A Quad. + A in B. ter + B Quad. bis. quod si sumatur octies, & producto addatur A Quad. fit vtique A Quad. nouies + A in B quater & viecsies + B Quad. sedecies. hic autem numerus est quadratus à latere A. ter + B. quater vt euidens est. Et A ter + B quater æquatur composito ex maximo & medii duplo, cùm maximus sit A + B bis. & duplum medii sit A bis + B bis. Ergo constat propositum.

Eodem artificio demonstrabitur altera nostræ propositionis pars. Ducatur enim minimus A in medium A + B octies, & producto addatur quadratus maximi, fiet A Quad. nouies + A in B. duodecies + B Quad. quater qui numerus quadratus est, à latere A ter + B bis quod æquatur minimo & medii duplo.

PROPOSITIO TERTIA.

B.A..G..D..E

SI sint quotcunque numeri æquali interuallo se super-

β.α..γ..δ..ε

ΕΆν ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, [ἡ ὑπεροχὴ] τοῦ με-

antes, interuallum maximi & minimi, multiplex est interualli ipsorum, secundum numerum vnitate minorem eo qui multitudinem propositorum numerorum exprimit. Sint enim quotlibet numeri AB. BG. BD. BE. æquali se superantes interuallo. Ostendendum est, quod interuallum ipsorum AB. BE. multiplex est interualli ipsorum AB BG. secundum numerum vnitate minorem multitudine ipsorum. AB. BG. BD. BE. Quoniam enim expositi sunt AB. BG. BD. BE æquali interuallo se superantes, erunt ipsi AG. GD DE. æquales inter se. Quamobrem ipse EA. ipsius AG. multiplex est, secundum multitudinem ipsorũ AG. GD. DE. Atqui multitudo ipsorum AG. GD. DE. est vnitate minor multitudine ipsorum AB. BG. BD. BE. Igitur EA. ipsius AG. multiplex est secundum numerum vnitate minorem multitudine ipsorum AB. BG. BD. BE. est autem AE. interuallum maximi & minimi, At AG. est vnum interuallũ ipsorum numerorũ.

γίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ἀριθμῶν. ἔστωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ αβ. βγ. βδ. βε. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. δεικτέον ὅτι ἡ τῶν αβ. βε. ὑπεροχὴ, τῆς τῶν αβ. βγ. ὑπεροχῆς πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τῶν αβ. βγ. βδ. βε. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκεινται οἱ αβ. βγ. βδ. βε. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, οἱ ἄρα αγ. γδ. δε. ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις. ὁ ἄρα εα τοῦ αγ. πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸ πλῆθος τῶν αγ. γδ. δε. τὸ δὲ πλῆθος τῶν αγ. γδ. δε. τοῦ πλήθους τῶν αβ. βγ. βδ. βε. μονάδι ἐλάσσων ἐστίν. ὥστε τὸ εα, τοῦ αγ. πολλαπλάσιόν ἐστι κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν αβ. βγ. βδ. βε. καὶ ἔστιν ὁ μὲν αε. ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, ὁ δὲ αγ. ἐστὶν αὐτῶν μία ὑπεροχή.

IN TERTIAM.

Nihil est hic difficultatis. Nam demonstratio Diophantis breuis est, & dilucida.

SI sint quocunque numeri æquali interuallo progredientes, summa maximi & minimi ducta in numerum multitudinis ipsorum, numerum producit duplum summæ expositorum numerorum. Sunto numeri quotcunque A. B. C. D. E. F. æquali interuallo progredientes. Ostendendum est summum duorum A F. ductam in

ἘΑν ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες καὶ πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν, ποιοῦσιν ἀριθμὸν διπλάσιον τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἐκτεθέντων. ἔστωσαν γὰρ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν οἱ α. β γ. δ. ε. ζ. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. δεικτέον ὅτι συναμφότερος ὁ αζ

πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ποιεῖ τινα ἀριθμὸν, ὅς ἐστι διπλασίων τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. τὸ γὰρ πλῆθος τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ἢ κατὰ ἄρτιόν ἐστιν ἢ περισσόν. ἔστω πρότερον ἄρτιον, καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ ἐκτεθέντες, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ηθ. ἀριθμῷ, ὥστε ἄρτιός ἐστιν ὁ ηθ. τετμήσθω δίχως τῷ κ. καὶ διῃρήσθω ὁ ηκ. εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κατὰ τὰ λ. μ. Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ ζ. τοῦ δ. τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ γ. τοῦ α. συναμφότερος ἄρα ὁ ζα συναμφοτέρῳ τῷ γδ. ἴσος ἐστίν. ἀλλὰ συναμφότερος ὁ ζα. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ ηλ. ὥστε καὶ ὁ γδ. ἴσος ἔσται τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ λμ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότερος ὁ εβ ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ μκ. ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ἴσος τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ ηκ. τοῦ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ ηκ διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ ηθ. ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ ηθ. τουτέστι τοῦ πλήθους τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

α. β. γ. δ. ε. ζ.
η. λ. μ. κ... θ

numerum multitudinis ipsorum A. B. C. D. E. F. producere numerum qui duplus est ad summam ipsorum A. B. C. D. E. F. Etenim numerus multitudinis ipsorum A. B. C. D. E. F. vel par est, vel impar. sit primùm par, & quot sunt expositi numeri, tot vnitates sint in ipso H G. erit ergo HG. par. Quare secetur bifariam in K, & diuidatur H K. in suas vnitates per L. & M. Tunc quia F. superat D. eodem numero, quo C. superat A. erit summa duorum F A. æqualis summæ duorum C D. Atqui summa duorum F A. æqualis est producto ex ipsamet in vnitatem H L. Igitur & summa duorum C D. æquabitur producto ex summa duorum F A. in vnitatem LM. Ob hæc eadem summa duorum E B. æqualis est producto ex summa duorum F A. in vnitatem MK. Quamobrem summa omnium A. B. C. D. E. F. æqualis est producto ex summa duorum F A. in H K. At producti ex summa duorum F A. in H K. duplum est productum ex summa duorum F A. in HG. Igitur & summæ omnium A. B. C. D. E. F. duplum est productum ex vtroque FA. in HG. hoc est in numerum multitudinis ipsorum A. B. C. D. E. F. Quod demonstrandum erat.

A.B.C.D.E.F.
H.L.M.K...G

PROPOSITIO QVINTA.

A.B.C.D.E.
G.M.L.K..H

Iisdem positis sit multitudo ipsorum A.B.C.D.E. impar, & sint in GH tot vnitates, quot sunt ipsi A.B.C.D.E. Erit ergo impar ipse GH. sumatur in eo vnitas GM. & secetur MH. bifariam in K. & secetur MK. in suas vnitates per L. & quoniam E. superat C. eodem numero quo C. superat A. súma ipsorum EA. dupla est ipsius C. Hoc est producti ex C. in vnitatem KL. Ob hæc eadem summa duorum BD. dupla est producti ex C. in LM quare summa ipsorum AEBD dupla est producti ex C. in MK. Atqui ipsius MK. duplus est MH. Igitur summa ipsorum AEBD. æqualis est producto ex C. in MH sed & ipse C. æqualis est producto ex C. in MG. Quamobrem summa omnium ABCDE. æqualis est producto ex C. in GH At producti ex C. in GH. duplus est productus ex vtroque AE. in GH. quare summæ omnium A.B.C.D.E. duplus est productus ex vtroque AE. in GH. hoc est in numerum multitudinis expositorum numerorum. Quod oportebat ostendere.

α.β.γ.δ.ε.
ζ.θ.κ..η

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ὁ τῶν α.β.γ.δ.ε. περισσός. καὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ζη. τοσαῦται μονάδες, ὅσοι εἰσὶν οἱ α.β.γ.δ.ε. περισσὸς ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ζη. κείσθω ἐν αὐτῷ μονὰς ζθ. καὶ τετμήσθω ὁ θη δίχα τῷ κ. καὶ τετμήσθω. ὁ θκ, εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κατὰ τὸ λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ ε. τοῦ γ. τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ γ. τοῦ α. συναμφότερος ἄρα ὁ εα. διπλασίων ἐστὶ τοῦ γ. τουτέστι τοῦ ὑπὸ γ. καὶ κλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότερος ὁ βδ. διπλασίων ἐστὶ τοῦ ὑπὸ γ. καὶ λθ. ὥστε οἱ α. ε. β. δ. διπλασίων εἰσὶ τοῦ ὑπὸ γ. καὶ τοῦ θκ. ἀλλὰ τοῦ θκ. διπλασίων ἐστὶν ὁ θη. ὥστε καὶ οἱ α.ε.β.δ. ἴσοι εἰσὶ τῷ ὑπὸ γ. καὶ τοῦ θη. ἔστι δὲ καὶ ὁ γ. ἴσος τῷ ὑπὸ τοῦ γ. καὶ τοῦ θζ. ὥστε ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν α.β.γ.δ.ε. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ. καὶ τοῦ ζη. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν γ. καὶ ζη διπλασίων ἐστὶν ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ αε καὶ τοῦ ζη. ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν α.β.γ.δ.ε. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αε. καὶ τοῦ ζη. τουτέστι τοῦ πλήθους τῶν ἐκτεθέντων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IN QVARTAM ET QVINTAM.

HÆ quoque demonstrationes faciles sunt, & vnicam tantum propositionem constituunt, vt euidens est, cuius demonstratio pendet omnino à propositione sexta libri primi porismatum, qua ostendimus in medietate ari-

thmetica summam extremorum æquari summæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, atque etiam duplo medii, si multitudo terminorum fuerit impar. Ex his porro collige summam quotlibet numerorum progressionis arithmeticæ, æqualem esse producto ex semisse numeri terminorum in summam extremorum, vel è converso, producto ex semisse summæ extremorum, in numerum terminorum. Semper enim accidit alterutro horum modorum summam omnium numerorum haberi nullis intercedentibus fractionibus. si enim numerus terminorum sit par, eius dimidium sumi potest absque fractione. si autem multitudo terminorum sit impar, semissis summæ extremorum haberi potest absque fractione, quia tunc summa extremorum est numerus par, quandoquidem est dupla medii termini.

PROPOSITIO SEXTA.

α.κ..ν..β γ.........δ ε.λ...............ζ
η.μ —— ξ —— θ.

A.K..N...B G....... ...D E. L...............Z
H. M—X — T

Ἐὰν ὦσιν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ σύμπας πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὀκταπλασίονα τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπεροχῆς αὐτοῦ τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα πολλαπλάσιος ἔσται τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, κατά τινα ἀριθμόν, ὃς προσλαβὼν μονάδα διπλασίων ἐστὶ τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων πάντων σὺν τῇ μονάδι· ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ οἱ αβ. γδ. εζ. λέγω ὅτι γίνεται τὸ προκείμενον. ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ ἐκτεθέντες σὺν τῇ μονάδι, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ εζ μονάδα, τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ αβ. πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ ηθ. ἐὰν ἄρα θῶμεν ἕκαστον μονάδα τὸν ακ. ελ. ημ. ἕξομεν τὸν λζ. τοῦ

Si sint ab vnitate quotcunque numeri æquali interuallo progredientes, summa omnium ducta in octuplum interualli ipsorum, & adsumens quadratum numeri qui binario minor est eodem interuallo, quadratus existit, cuius latus binario mulcatum multiplex est ad interuallum secundum quendam numerum, qui auctus vnitate, duplus est numeri multitudinis expositorum numerorum, vnitate in iis annumerata. Sint enim ab vnitate numeri æquali interuallo progredientes. AB.GD.EZ. dico fieri quod est propositum. Quot enim sunt expositi numeri cum vnitate, tot vnitatibus constet numerus HT. Et quoniam interuallū quo EZ. superat vnitatem, interualli quo AB. vnitatem superat multiplex est secundum numerum vnitate minorem ipso HT. si ponamus vnitati æquales singulos AK. EL. HM. habebimus

LZ. ipſius KB. multiplicem ſecundum MT. Quamobrē LZ. æqualis eſt producto ex KB. in MΓ. Et ſi ſumamus KN. binarium, quæremus an omnium ſumma ducta in octuplum ipſius KB. (quod eſt ipſotum interuallum) & adſumens quadratum ipſius NB. (qui binatio deficit ab interuallo) faciat quadratum, cuius latus binario multatum, faciat quendam numerum, qui interualli KB. multiplex ſit, ſecundum compoſitum ex vtroque HT. TM. Et quia ſumma omnium eſt dimidium producti ex vtroque ZE. EL. in HT. At productus ex vtroque ZE EL. in HT. diuiditur in productum ex LZ. in HT & in eum qui fit bis ex EL. in HΓ. hoc eſt in duos HT. Rurſum omnium ſumma eſt dimidium eius qui fit ex LZ. in HT. & duorum HT. At LZ. eſt oſtenſus æqualis producto ex KB in MΓ. Quare ſumma omnium eſt dimidium ſolidi ſub KB. MT. TH. contenti, & duorum HT. ſi ergo ſecemus MT. bifariam in X. habebimus ſummam omniū æqualē ſolido ſub KB. HT. TX. cōtento & vni HT. Quæramus igitur an ſolidus ſub KB. HT. TX. contentus, cū vno HT. multiplicatus in octo KB. & adſumēs quadratū ipſius NB. faciat quadratū. Atqui ſolidus ſub KB. HT. TX. contentus ductus in vnū KB. æquatur ei qui fit à producto ex HT. in TX. in quadratum ipſius KB. Quare ſolidus ſub KB. HT. TX. contētus, ductus in octo KB. æquatur ei qui fit à producto ex HT. in

κβ. πολλαπλάσιον κατὰ τὸν μθ. ὥστε ὁ λζ. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ κβ. μθ. καὶ ἐὰν θῶμεν δυάδα τὸν κν. ζητήσομεν εἰ ὁ σύμπας πολυπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. ὅς ἐστιν ὑπεροχὴ αὐτῶν, καὶ προσλαβὼν τὸ ἀπὸ τοῦ νβ. ὄντος δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ λυποῦσα δυάδα ποιεῖ τινα ἀριθμὸν, ὃς τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τοῦ κβ. πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ συναμφότερον τὸν ηθ. θμ. καὶ ἐπεὶ ὁ σύμπας ἥμισύς ἐστι τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν ζε. ελ. καὶ τοῦ θη. [ὁ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν ζε. ελ. καὶ τοῦ θη, διαιρεῖται] εἰς τε τὸν ὑπὸ λζ. ηθ καὶ εἰς τὸν δὶς ὑπὸ ελ. ηθ. τουτέστι δύο τοὺς ηθ. πάλιν ἄρα ὁ ὁ σύμπας [ἥμισύς] ἐστι τοῦ ὑπὸ λζ. ηθ. καὶ δύο τῶν ηθ. ἀλλὰ ὁ λζ. ἴσος ἐδείχθη τῷ ὑπὸ κβ. μθ. καὶ ὁ σύμπας ἄρα ἐστὶν ἥμισυς τοῦ τε ὑπὸ κβ. μθ. θη. στερεοῦ καὶ δύο τῶν ηθ. ἐὰν ἄρα τέμωμεν τὸν μθ δίχα κατὰ τὸ ξ. ἕξομεν τὸν ἐκ πάντων συγκείμενον ἴσον τῷ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ. στερεῷ καὶ ἑνὶ τῷ ηθ. ζητήσομεν ἄρα εἰ ὁ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ. στερεὸς μετὰ ἑνὸς ηθ. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος. ἀλλὰ ὁ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν κβ. ποιεῖ τὸν ὑπὸ ηθ. θξ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ τετράγωνον ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν κβ. ηθ. θξ. στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. ποιεῖ τὸν ὑπὸ ηθ. θξ.

ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς ἀπὸ κβ. τετραγώνους τουτέστι τὸν ὀκτάκις ὑπὸ ηθ. θξ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον τουτέστι τὸν τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ τετράγωνον [δεικτέον οὖν ὅτι ὁ τετράκις ἀπὸ ηθ. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον] προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ηθ. ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ ἔτι τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον γίνεται τετράγωνος. διαιρεῖται δὲ ὁ ὀκτάκις ὑπὸ ηθ. κβ. εἴς τε τὸν τετράκις ὑπὸ ημ. κβ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. [ζητητέον οὖν εἰ ὁ τετράκις ἀπὸ τῶν ηθ. θμ.] ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον, μετὰ τοῦ τετράκις ὑπὸ ημ. κβ. καὶ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνος ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ᾽ ὁ τετράκις ὑπὸ ημ. κβ. ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ νκ. κβ. καὶ μιγεὶς τῷ ἀπὸ νβ. τετραγώνῳ ποιεῖ τοὺς ἀπὸ κβ. κν. τετραγώνους: ζητήσομεν ἄρα εἰ καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ θη. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ μετὰ τῶν βκ. κν. τετραγώνων γίνεται τετράγωνος. πάλιν δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ βκ. τετράγωνος μεταβαίνει εἰς τὸν ἀπὸ τοῦ ημ. τετράγωνον ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον, καὶ μιγεὶς οὗτος τῷ τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον [ποιεῖ τὸν ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνον ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον: ζητητέον] ἄρα εἰ καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ θμ. τετράγωνος ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κβ.

TX. in octo quadratos KB. hoc est ei qui fit octies ex HT. in TX ducto in quadratum KB. hoc est ei qui fit quater ex HT. in TM. ducto in quadratum KB. ostendendum ergo quod qui fit quater ex HT. in TM. ductus in quadratum KB. & adsumens productum ex HT. in octo KB. & adhuc quadratum NB. fit quadratus. Diuiditur autem qui fit octies ex HT. in KB. in eum qui fit quater ex HM. in KB. & in eum qui fit quater ex vtroque HT. TM. in KB. quærendum ergo an qui fit quater ex HT. in TM ductus in quadratum KB. & adsciscens eum qui fit quater ex HM. in KB. & eum qui fit quater ex vtroque HT. TM. in KB. & adhuc quadratum NB. faciat quadratum. At qui fit quater ex HM. in KB. æqualis est ei qui fit bis ex NK. in KB. & mixtus quadrato NB. facit quadratos ipsorum KB. KN. Quæremus igitur an qui fit quater ex HT. in TM. ductus in quadratum KB. & adsumens eum qui fit quater ex vtroque HT. TM. in KB. & adhuc quadratos BK. KN. fiat quadratus. Rursus autem quadratus BK. transit in eum qui fit ex quadrato *HM*. in quadratũ KB. & mixtus hic ei qui fit quater ex *HT*. in TM. ducto in quadratũ KB. facit numerũ æqualẽ producto ex quadrato cõpositi ex vtroq. HT. TM. in quadratũ KB. Quærendum ergo an quadrat⁹ cõpositi ex vtroq; HT. TM. ductus in quadratum KB.

adſumens quadruplum producti ex vtroque *HT*. TM. in KB. & adhuc quadratum KN. fiat quadratus. Itaque ſi producto ex vtroque *HT*. TM. in KB. accipiamus æqualem numerum NR. erit productus ex quadrato vtriuſque *HT*. TM. in quadratum KB. æqualis quadrato NR. vt deinde oſtendetur. Videndum igitur an quadrati RN. NK cum quadruplo producti ex vtroque HT. TM. in KB faciant quadratum. Atqui quadruplum producti ex vtroque HT. TM. in KB. æquale eſt quadruplo ipſius NR. quandoquidem qui fit ſemel ex vtroque HT. TM. in KB. æqualis poſitus eſt NR. Atqui quatuor NR. æquales ſunt duplo producti ex NR. in NK. (nam NK. poſitus eſt binarius) quærendũ ergo an quadrati NR NK. cum duplo producti ex N*R*. in NK faciant quadratum; faciunt autem quadratum à latere RK. cuius latus RK. multatum binario NK. facit numerum quendam NR. qui interualli KB. multiplex eſt, ſecundum ſummam ipſorum HT. TM. quæ ad ſcita vnitate HM. duplum facit numeri multitudinis expoſitorum numerorum.

τετράγωνον; καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. μετὰ τοῦ ἀπὸ κν. τετραγώνου γίνεται τετράγωνος, ἐὰν δὴ θῶμεν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἴσον τὸν νρ. ἀριθμόν, ἔσται καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετραγώνος ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ νρ. τετραγώνῳ, ὅπερ ἑξῆς δειχθήσεται [σκεπτέον] ἄρα εἰ οἱ ἀπὸ τῶν ρν. νκ. τετράγωνοι μετὰ τοῦ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. γίνεται τετράγωνος ἀλλὰ ὁ τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. καὶ κβ. ἴσος ἐστὶ τῷ νρ. τετράκις, ἐπειδήπερ καὶ ὁ ἅπαξ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἴσος ἐτέθη ὁ νρ. Τέσσαρες δὲ οἱ νρ. ἴσοι εἰσὶ τῷ δὶς ὑπὸ νρ. νκ. δυὰς γὰρ ἐτέθη ὁ νκ. ζητητέον ἄρα εἰ καὶ οἱ ἀπὸ τῶν νρ. νκ. τετράγωνοι μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ νρ. νκ. ποιοῦσι τετράγωνον. ποιοῦσι δὲ τὸν ἀπὸ τοῦ ρκ. οὗ ἡ πλευρὰ ἡ ρκ. λιποῦσα δυάδα τὴν νκ. ποιεῖ τινα ἀριθμὸν τὸν νρ. ὃς τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τοῦ κβ. πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸ συναμφότερον τὸ ηθ. θμ. ὃς προσλαβὼν μονάδα τὸν ημ. [διπλασίων] ἐστὶ τοῦ ἐκτεθέντος παντὸς συστήματος.

A.K.. N...B——R
H. M——X——T

α.κ..ν...β
η.μ——ξ——θ

IN SEXTAM.

Hic nonnulla ſunt dilucidanda, quæ Diophantæa breuitas obſcuriora reddit.

A.K..N...B G.........D E. L..............Z
H. M—X—T

Primò quod ait summam omnium esse dimidium producti ex summa ipsorum EZ. EL. in HT. patet per 4. & 5. huius Cùm enim EL. sit vnitas, vtique EZ. EL. simul conficiũt summam extremorum, qua ducta in HT. numerum terminorum, fit duplum summæ omnium. Quia vero ducere EZ. in HT, [a] idem & ac ducere sigillatim EL. LZ. in eundem HT. rectè concludit summam omnium esse dimidium producti ex LZ. in HT. semel, & producti ex EL. in HT. bis, & cùm EL. sit vnitas, quæ non immutat numerum quem multiplicat, benè infert summam omnium esse dimidium producti ex LZ. in HT. adsciscentis duplum ipsius HT.

[a] prima. 2

Secundò. diuidentes MT. bifariam in X, rem per lineas expressimus, quia ex hypothesi Diophantæa sequitur MT. esse ternarium, qui bifariam per integros secari non potest, hoc autem nil facit ad demonstrationem.

Tertiò quod ait solidum sub KB. HT. TX contentum ductum in KB. æquari ei qui sit à producto ex HT. in TX, in quadratum ipsius KB. patet ex eo quod quatuor numeri quoquo modo & ordine inter se multiplicentur, [b] eundem semper numerum procreant.

[b] tertia 1. porism.

Quartò quod ait numerum qui fit bis ex KN. in KB. adsumpto quadrato ipsius NB. æquari quadratis ipsorum KB. KN. sic probatur. Qui fit ex KB. in KN. bis. [c] æquatur producto ex KN. in NB. bis & duplo quadrati ipsius KN. Igitur si addatur vtrimque quadratus ex NB. erit productus ex KB. in KN. bis, cum quadrato ex NB. æqualis producto ex KN. in NB. bis, & quadrato ex KN. bis, & quadrato ex NB. semel. At quadrati ipsorum KN. NB. cum duplo producti ex KN in NB. [d] æquantur quadrato totius KB. Igitur productus ex KN. in KB. bis cum quadrato ipsius NB. æquatur quadratis ipsorum KB. KN. Quod erat demonstrandum.

[c] tertia 2.
[d] quarta 2.

Quintò quod ait productum ex quadrato ipsius KB. in quadruplum producti ex HT. in MT. vnâ cum producto ex eodem quadrato KB. in quadratum HM. æquari producto ex quadrato KB. in quadratum compositi ex ipsis HT. MT. id sic infertur Quoniam datis duobus numeris HT. MT. quotum interuallum HM. quod fit quater ex HT. in MT. addito quadrato ipsius HM. [e] æquatur quadrato compositi ex ipsis HT. MT. patet ducere quadratum KB. in quadruplum producti ex HT. in MT. & in quadratum HM. idem esse atque ducere eundem quadratum KB. in quadratum compositi ex ipsis HT. MT.

[e] quinta 2. porism.

Quoniam vero demonstratio Diophanti ob illius prolixitatem, tyronibus fortasse videbitur obscurior, operæpretium duxi, propositionem istam aliter demonstrare. In quo præter quàm quod facilius & magis dilucide rem expediemus, id etiam nobis lucri accedet, quod in vniuersum de omni progressione Arithmetica ostendemus, quod demonstrauit Diophantus de sola progressione cuius minimus terminus est vnitas. Itaque more nostro, quinque vel sex Theorematis propositum concludemus.

THEOREMA PRIMVM.

Datis duobus numeris, quadratus primi cum quadrato semissis secundi, æquatur producto ex mutua datorum multiplicatione, vnâ cum quadrato interualli inter primum & semissem secundi.

D 8.	C 2.
A 10.	B 4.

Sint dati A. B. & ipsius B. semissis esto C. Ipsorum autem A C. interuallum esto D. dico quadratos ipsorum A. C. simul æquari producto ex A. in B. vna cum quadrato ipsius D. Etenim quadrati ipsorum A C. [f] æquantur duplo producti ex A. in C. & quadrato ipsius D. sed duplo producti ex A. in C. æquatur productus ex A. in B, quia B. duplus

[f] quarta 2. porism.

duplus est ad C. igitur quadrati ipsorum AC. æquantur producto ex A. in B. & quadrato ipsius D. quod demonstrandum erat.

Non curamus vtrum A. sit maior vel minor quam B. vel quam C. sed & eodem prorsus argumento si B. ponatur primus, A. secundus, ostendemus productum ex A. in B. cum quadrato interualli inter B. & semissem ipsius A. æquari quadratis tum ex B. tum ex semisse ipsius A. ortis.

THEOREMA SECVNDVM.

In progressione arithmetica, productus ex differentia progressionis in maximũ, vnâ cũ quadrato interualli inter minimũ & semissẽ differentiæ, æquatur quadrato minimi, & quadrato semissis differentiæ & quadrato differẽtiæ toties sumpto, quot sunt termini progressionis vno dempto.

H4. G1. E2.
A5. B7. C9. D11.

Sint ABCD. in arithmetica medietate, & sit E. differentia progressionis cuius semissis G. & interuallũ inter G. & A. esto H. dico productum ex E. in D. cum quadrato ipsius H. æquari quadratis ipsorum AG. & adhuc quadrato ipsius E. toties sumpto, quot sunt ipsi ABC. nam interuallum quo D. superat A. continet E. toties quot sunt ipsi ABC. per tertiam huius. igitur ducere E. in D. idẽ est ac ducere E. in A. & E. in seipsum toties, quot sunt ipsi ABC. at productus ex E. in A. cum quadrato ipsius H. æquatur quadratis ipsorum AG. per primũ theorema. Ergo productus ex E. in D. cum quadrato ipsius H. æquatur quadratis ipsorum AG. & præterea quadrato ipsius E. toties sumpto, quod sunt ipsi ABC. Quod erat ostendendum.

THEOREMA TERTIVM.

In progressione arithmetica, quadratus maximi æquatur producto ex diffrentia in omnes antecedentes bis, & quadrato minimi semel, & quadrato differentiæ toties sumpto, quot sunt ipsi antecedentes.

G2. G2. G2.
A5. B7. C9. D11.

Sint in progressione arithmetica ABCD. & sit G. differentia progressionis. dico quadratum maximi D. æquari producto bis ex G. in omnes antecedentes ABC. & quadrato ipsius A. semel, & quadrato ipsius G. toties sumpto, quot sunt ipsi ABC. quia enim GC. simul componunt D. [a] erit quadratus ipsius D. æqualis quadratis ipsorum GC. & duplo plani sub GC. eadem de causa quadratus ipsius C. æquatur quadratis ipsorum GB. & duplo plani sub GB. & rursus quadratus ipsius B. æquatur quadratis ipsorum GA. & duplo plani sub GA. igitur quadratus ipsius D. æquatur quadrato A. semel, & quadrato G. toties sumpto quod sunt ipsi ABC. & præterea duplo producti ex G. in ipsos ABC. quod erat ostendendum.

a 4. secundi

THEOREMA QVARTVM.

In progressione arithmetica, quadratus maximi aucti dimidio differẽtiæ, æquatur duplo plani sub sũma omniũ, & sub differẽtia cõtenti, vnâ cum quadrato interualli inter minimum & semissem differentiæ.

H.4. E.2. G.1.
A.5. B.7. C.9. D.11.
K.12.

Sint ABCD. in arithmetica progressione cuius differentia E. cuius semissis G. & interuallum inter A. & G. esto H. Ipsorum autem DG. summa esto K. dico quadratum ipsius K. æquari numero qui fit bis ex E. in summam omnium, vnâ cum quadrato ipsius H. Etenim quadratus ipsius K.

quarta 2. H.4. E.2. G.3. K.12. ·æquatur quadratis ipsorũ DG, & duplo producti ex G. in D. A.5. B.7. C.9. D.11. seu producto ex E. in D. (quandoquidẽ E. duplus est ad G.) At quadratus ipsius D. per præcedentem æquatur duplo producti ex E. in ipsos ABC. vnà cum quadrato ipsius A. semel, & quadrato ipsius E. toties sumpto quot sunt ipsi ABC. igitur quadratus ex K. æquatur numero qui fit bis ex E. in ABC. & semel in D. cum quadratis ex A. & G. semel sumptis, & quadrato ex E. toties sumpto quot sunt ipsi ABC. At per secundum theor. quadrati ex A. & G. vnà cum quadrato ex E. toties sumpto quot sunt ipsi ABC. æquatur producto ex E. in D. vna cum quadrato ex H. igitur quadratus ex K. æquatur duplo producti ex E. in omnes ABCD. vna cũ quadrato ex H. quod demõstrandũ erat.

THEOREMA 5.

In omni progressione arithmetica, numerus qui fit octies ex differentia in summam omnium, vna cum quadrato interualli inter duplum minimi & differentiæ, æquatur quadrato, cuius latus componitur ex duplo maximi, & ex differentia.

H.4. E.2. G.1. A.5. B.7. C.9. D.11. L.8. K.12.

Sint ABCD. in progressione arithmetica, cuius differentia E. cuius semissis G. & interuallũ inter A. & G. esse H. interuallũ autem inter duplum ipsius A. & E. esto L. dico quod fit octies ex E. in summam omnium ABCD. cum quadrato ipsius L. æquari quadrato composito ex duplo ipsius D. & ex E. sit enim K. summa ipsorum DG. quia igitur octuplum producti ex E. in omnes ABCD. cum quadruplo quadrati ex H. est quadruplum producti qui fit bis ex E. in eosdem ABCD. & quadrati ex H. at productus ex E. in ABCD. bis, & quadratus ex H. æquantur quadrato ex K. per præcedens theor. patet octuplum producti ex E. in ABCD. cum quadruplo quadrati ex H. æquari quadruplo quadrati ex K. at quadruplum quadrati ex K. est quadratus, cuius latus duplus est ad K. & cum K. componatur ex D. & ex G. duplum illius componitur ex duplo ipsius D. & ex duplo ipsius G. seu ex E. igitur octuplum producti ex E. in ABCD. cum quadruplo quadrati ex H. quadratus est, cuius latus componitur ex duplo ipsius D & ex E. Quia vero interuallum ipsorum AG. est H. vtique duplorum interuallum, puta L. duplum est ad H. ac proinde quadratus ex L. quadruplus est quadrati ex H. quamobrem octuplum producti ex E. in omnes ABCD. cum quadrato ex L. æquatur quadrato cuius latus componitur ex E. & ex duplo ipsius D. quod erat demonstrandum.

Sane hoc theoremate in vniuersum de omni progressione arithmetica demonstrauimus, quod Diophantus restringit ad solam progressionem quæ incipit ab vnitate. Nam illius propositionem ab hoc theoremate minime differre cuilibet rem attentius consideranti, statim innotescet, si hoc applicetur arithmeticæ progressioni ab vnitate incipienti. Quod tamen vt fiat commodissime, tale adhuc demonstrandum theorema.

THEOREMA 6.

In progressione arithmetica quæ incipit ab vnitate, productus ex duplo numeri terminorũ vnitate multato in differẽtiã progressionis, adsũpto binario, ęquatur cõposito ex differẽtia, & ex duplo maximi termini.

E.6. A.1. B.7. C.13. D.19. H.4. K.8. L.3. F.6. G.7.

Sint ABCD. in arithmetica progressione, cuius differentia E. & sit A. vnitas, numerus terminorum H. cuius duplum K. & sit L. vnitate minor ipso H. cuius duplum F. cui addita vnitate fiat G. eritque G. vnitate minor quam K. cũ enim HL. vnitate differant, erit duplorum KF. interuallũ binarius, quare G. excedẽs F. vnitate, deficiet vnitate ab ipso K. dico itaq; productũ ex G. in E. adsũpto binario, æquari cõposito ex duplo

ipſius D. & ex E. Nam productus ex L. in E. æquatur interuallo extremorum D A. per tertiam huius.

E 6.
A.1. B.7. C.13. D.19.
H 4. K 8.
L 3. F 6.
G 7.

Quare ſi producto ex L. in E. addatur vnitas A. fiet numerus D. ac proinde ſi producto ex F. in E. addatur binarius, fiet duplum ipſius D. quamobrem ſi G. vnitate maior quàm F. ducatur in eundẽ E. & producto addatur binarius fiet vtrique numerus continens bis ipsũ D. & ſemel ipſum E. quod erat demonſtrandũ.

Hinc porrò manifeſte infertur propoſitio Diophanti. ſint enim ABCD. in arithmetica medietate, & ſit A. vnitas, differentia progreſſionis E. quæ binario multata relinquat G. & duplum numeri terminorum eſto K. vnde ablata vnitate, ſuperſit L. dico ſi E. ducatur octies in ſummam omnium ABCD. & producto addatur quadratus ipſius G. fieri quadratum, cuius latus binario multatum, continet E toties, quot ſunt vnitates in L. quia enim à differentia E. auferendo duplum minimi termini A. puta binarium, relinquitur G. vtique

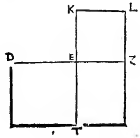
G 4. E 6.
A.1. B.7. C.13. D.19.
K 8. L 7.

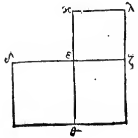
per 5. theorema numerus qui fit octies ex E. in ſummam omnium ABCD. cum quadrato ex G. æquatur quadrato cuius latus componitur ex E. & ex duplo ipſius D. At per ſextam theor. ipſi E. & duplo ipſius D. æquatur productus ex L. in E. auctus binario. Igitur qui fit octies ex E. in ſummam omnium ABCD. adſumens quadratum ex G. æquatur quadrato, cuius latus æquale eſt producto ex L. in E. adſumenti binarium. Patet ergo ſi à latere huius quadrati auferatur binarius, relinqui productum ex L. in E. ſeu numerum qui toties continet E. quot ſunt in L. vnitates. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO SEPTIMA.

SIt vtrique HT. TM. æqualis A. ipſi autem KB. æqualis B. At producto ex vtroque HT. TM. in KB. æqualis ſit G. dico quod quadratus compoſiti ex vtroque HT. TM. hoc eſt ipſius A. ductus in quadratum KB. hoc eſt in quadratum B. producit quadratum ipſius G. Ponantur ipſis A. & B. æquales in recta linea DE. EZ. & deſcribantur ab ipſis quadrati A.B.G.

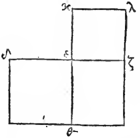
Ἔστω συναμφοτέρω τῶν ηθ. θμ. ἴσος ὁ α. τῶν δὲ κβ. ἴσος ὁ β. τῶν δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἴσος ὁ γ. λέγω ὅτι καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τουτέστι ὁ ἀπὸ του α. ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ κβ. τουτέστι ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ β. ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γ. κείσθω τοῖς α. β. ἴσοι ἐπ' εὐθείας οἱ δε. εζ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι α.β.γ.





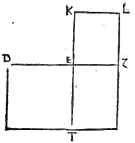
οἱ δθ. ελ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ θζ. παραπλήρωμα· ὡς ἄρα ἡ δε. ἐπὶ εζ, οὕτως τὸ δθ. ἐπὶ θζ. παραπλήρωμα· ὡσδὲ ἡ θε. ἐπὶ εκ. οὕτως τὸ θζ. παραπλήρωμα ἐπὶ ελ. τὸ ἄρα θζ. παραπλήρωμα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν δθ. θζ. τετραγώνων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν δθ. ζκ. τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ θζ. παραπληρώματος καὶ ἐστὶ τὸ μὲν δθ. ἴσον τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ζκ. τετράγωνον ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ κβ. τὸ δὲ θζ. παραπλήρωμα ἴσον τῷ νρ. καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ τετράγωνον, ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ κβ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ νρ. τετραγώνῳ.

α. β. γ.



DT. EL. & perficiatur complementum TZ. Itaque erit vt DE. ad EZ. Ita quadratus DT. ad complementum TZ. vt autem TE. ad EK. sic complementum TZ. ad quadratum EL. quare complementum TZ. est medium proportionale inter quadratos DT. ZK. Productus igitur ex quadrato DΓ. in quadratum ZK. æqualis est quadrato ex TZ. & est DT. æqualis quadrato compositi ex vtroque HT. TM. At ZK. est æqualis quadrato KB. & complementum TZ. æquale est NR. Quamobrem quod fit ex quadrato vtriusq; HT. TM. in quadratum KB. æquale est quadrato NR.

A.B.G.



IN SEPTIMAM.

Qnod demonstrat hic Diophantus per lineas, longe breuius & facilius per numeros ostendemus, & ipsam propositionem sic concipiemus.

Productus ex mutua duorum quadratorum multiplicatione, æquatur quadrato producti ex mutuo laterum ductu.

A. 25. B. 35. C. 49. Sint quadrati A. C. quorum latera D. E. & ex D. in E. fiat B. dico productum ex quadrato A. in quadratum
a 10. septi. D. 5. E. 7. C. æquari quadrato ipsius B. etenim vt constat ex demonstratione vndecimæ 8. Euclidis B. est medius proportionalis inter A. & C. quare productus ex A. in C. a æquatur quadrato ipsius B. Quod erat demonstrandum.

ο.α.κ..ν...β — ρ γ —— δ ε.λ —— ζ
η.μ —— ξ —— ϑ

O.A.K..N...B — R G. —— D E.L —— Z
H. M —— X — T

PROPOSITIO OCTAVA

CVm sint quæ proposuimus, pronunciamus. Si sint quotcunque numeri ab vnitate, æquali interuallo progredientes, omnium summa multangulus est, tot enim habet angulos, quot vnitates numerus binario superans interuallum; latus autem illius est numerus multitudinis expositorum numerorum cum vnitate. [a] Cùm enim ostenderimus summã expositorum omnium numerorum multiplicatam in octo KB. & adsumentem quadratum NB facere quadratum à latere RK. si aliam vnitatem sumamus AO habebimus KO. binarium. Et est similiter KN. binarius. Erunt ergo æquali interuallo progredientes OB. BK. BN. [b] Quamobrem qui fit octies ex maximo OB. in medium BK. adsumens quadratũ minimi BN. facit quadratum habentem latus summã conflatam ex maximo OB. & duplo medii BK. Igitur OB. ductus in octo KB. & adsumens quadratum NB. æqualis est quadrato compositi ex OB. & duobus KB. & huius latus multatum binario OK. relinquit tres KB.

Τῶν προκειμένων ὄντων, λέγομεν, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ σύμπας πολύγωνός ἐστι, καὶ γὰρ ἔχει γωνίας τοσαύτας, ὅσος ἐστὶν ὁ δυάδι μείζων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, πλευρά τε αὐτοῦ ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. ἐπεὶ γὰρ ἐδείξαμεν τὸν σύμπαντα τῶν ἐκκειμένων πάντων γενόμενον ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ προσλαβόντα τὸν ἀπὸ τοῦ νβ τετράγωνον, ποιεῖν τὸν ἀπὸ τοῦ ρκ τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἄλλην μονάδα θῶμεν τὴν αο. ἕξομεν τὴν κο δυάδα. καὶ ἔστιν δὲ ὁμοίως καὶ ὁ κν δυάς. ἔσονται ἄρα οἱ οβ. βκ. βν. τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχοντες, ὁ ἄρα ὀκτάκις ὑπὸ τοῦ μεγίστου τοῦ οβ. καὶ τοῦ μέσου τοῦ βκ. προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου τοῦ βν τετράγωνον, ποιεῖ τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ μεγίστου τοῦ οβ. καὶ δύο τῶν μέσων τῶν βκ. καὶ ὁ οβ ἄρα πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ὀκτὼ τοὺς κβ. καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ νβ τετράγωνον, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ τε οβ. καὶ δύο τῶν κβ. καὶ ἡ τούτου πλευρὰ λιποῦσα δυάδα τὴν οκ. καταλείψει τρεῖς κβ. οἵ εἰσι τοῦ κβ πολλαπλάσιοι κατὰ τριάδα, ἡ δὲ τριὰς

[a] 6. huius. [b] 2. huius.

προσλαβοῦσα τὴν μονάδα, διπλασίων ἐστὶ τῆς δυάδος. ἐπεὶ οὖν ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων σὺν τῇ μονάδι τὸ αὐτὸ πρόβλημα ποιεῖ τῷ οβ. ὁ δὲ οβ ὢν τυχὼν, καὶ πολύγωνός ἐστι πρῶτος ἀπὸ τῆς μονάδος, ἐπείπερ μονάς ἐστιν ὁ αο. ὁ δὲ δεύτερος ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ αβ. καὶ ἔχει πλευρὰν δυάδα. c 2. huius. ὥστε καὶ ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων πολύγωνός ἐστιν ἰσογώνιος τῷ οβ. ἔχων γωνίας τοσαύτας, ὅσος ἐστὶν ὁ δυάδι τῇ οκ. μείζων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τῷ κβ. καὶ πλευρὰν ἔχει τὴν ηθ. ὅς ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. Καὶ ἀπεδείχθη τὸ παρὰ Ὑψικλεῖ ἐν ὅρῳ λεγόμενον, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁποσοιοῦν, μονάδος μενούσης τῆς ὑπεροχῆς, ὁ σύμπας ἐστὶ τρίγωνος, δυάδος δὲ τετράγωνος, τριάδος δὲ πεντάγωνος. λέγεται δὲ τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν κατὰ τὴν δυάδι μείζονα τῇ ὑπεροχῇ, πλευρὰ δὲ αὐτῶν τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. ὅθεν ἐπεὶ οἱ τρίγωνοι μονάδος οὔσης τῆς ὑπεροχῆς γίνονται, καὶ πλευραὶ αὐτῶν εἰσιν οἱ μέγιστοι τῶν ἐκτεθειμένων, καὶ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου τῶν ἐκτεθειμένων, καὶ τοῦ μονάδι μείζονος αὐτοῦ, διπλασίων ἐστὶν τοῦ σημαινομένου τριγώνου. Καὶ ἐπεὶ ὁ οβ. πολύγωνος ὤν, καὶ οὐ τοσαῦται γωνίαι ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, πολλαπλασιασθεὶς ὀκτάκις ἐπὶ τῇ δυάδι αὐτοῦ ἐλάσσονα, τουτέστι ἐπὶ τῇ κβ. καὶ προσλαβὼν τὸν

qui sunt ipsius KB. multiplices secundum ternarium, at ternarius adsumens vnitatem, duplum efficit binarii. Quoniam igitur summa omnium progressionis terminorum cum vnitate idem præstat quod OB. & OB. vtcunque oblatus est, & multāgulus primus ab vnitate (quādoquidem AO. est vnitas, secundus autem post eam numerus est AB.) c & eius latus est binarius. sequitur & summā omnium progressionis terminorū esse multangulum æquiangulū ipsi OB. & habentem tot angulos, quod vnitates habet numerus superans binario OK. interuallum KB. & est eius latus HΓ. numerus multitudinis expositorum numerorum cum vnitate. Et demonstratum est quod ab *Hypsicle* in definitione dicitur. Quod si fuerint quotlibet numeri ab vnitate æquali interuallo progredientes, si interuallum sit vnitas, summa omnium est triangulus; si binarius, quadratus; si ternarius, quinquangulus. Exprimitur autem multitudo angulorum per numerum binario maiorem differentia; latera vero per numerum multitudinis terminorum cum vnitate. Itaque quoniam trianguli fiunt, cum interuallum est vnitas, latera ipsorum erunt maximi terminorum, & productus ex maximo terminorum in vnitate maiorem ipso, duplus est ipsius trianguli. Et quia OB. multangulus est, & illius tot sūt anguli, quot in ipso vnitates, & ductus octies in numerum bi-

nario minorem ipso, hoc est in KB. & adsumens quadratum numeri qui ab ipsomet, quaternario deficit hoc est quadratum NB. facit quadratum, talis erit multangulorum definitio. Omnis multangulus multiplicatus octies in numerum binario minorem eo qui exprimit multitudinem angulorum, & adsumens quadratum numeri quaternario minoris multitudine angulorum, facit quadratum. Simul ergo demonstrata *Hypsiclis* definitione, & horũ multangulorũ, reliquũ est vt ostendamus, quomodo dato latere, is qui requiritur multangulus inueniatur. Nam alicuius multanguli latus habentes HΓ. & habentes multitudinem angulorum eius, habebimus & datum KB. Quare & habebimus productum ex vtroque HT. TM. in KB. qui æqualis est ipsi NR. Quare & datum habebimus ipsum KR. quoniam binarius est NK. Quamobrem & datum habebimus ipsius KR. quadratum. A quo auferendo quadratum ipsius NB. qui & ipse datus est, habebimus reliquum datum, qui quæsiti multanguli multiplex est secundum, octuplum ipsius KB. Ergo inuentus est quæsitus multangulus. Similiter & dato multangulo, inueniemus latus eius HT, Quod demonstrandum erat.

ἀπὸ τῆς τετράδι αὐτῆς ἐλάσσονος, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς νβ. ποιεῖ τετράγωνον οὗτος ἔσται ὅρος τῶν πολυγώνων. ὅτι πᾶς πολύγωνος πολλαπλασιασθεὶς ὀκτάκις ἐπὶ τὴν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ προσλαβὼν τὸ ἀπὸ τῆς τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, ποιεῖ τετράγωνον. συναποδειχθέντος οὖν τοῦ τοῦ Ὑψικλέους ὅρου, καὶ τούτων τῶν πολυγώνων, ἑξῆς ἐστὶ δεικνῦναι πῶς δοθείσης πλευρᾶς ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος εὑρίσκεται. ἔχοντες γὰρ πλευρὰν δοθέντος τινὸς πολυγώνου τὸν ηθ. ἔχοντες δὲ καὶ τὸ πλῆθος αὐτοῦ γωνιῶν, ἕξομεν καὶ τὸν κβ. δοθέντα. ὥστε καὶ τὸν ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ηθ.θμ. καὶ τοῦ κβ. ἕξομεν δοθέντα. ὅς ἐστιν ἴσος τῷ νρ. ὥστε ἕξομεν καὶ τὸν κρ. δοθέντα, ἐπείπερ δυάς ἐστι ὁ νκ. ὥστε καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κρ. ἕξομεν δοθέντα, καὶ ἀπὸ τούτου ἀφελόντες τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον ὄντα δοθέντα, ἕξομεν καὶ τὸν λοιπὸν δοθέντα, ὅς ἐστιν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου πολλαπλασίων κατὰ τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ κβ. ὥστε εὑρετός ἐστιν ὁ ζητούμενος πολύγωνος. ὁμοίως δὲ καὶ πολυγώνου δοθέντος εὑρήσομεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὸν ηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ο.α.κ..ν...β——ρ γ——δ ε.λ——ζ
η.μ——ξ——θ

O.A.K..N...B——R G——D E.L——Z
H.M——X——T

IN OCTAVAM.

HÆc propositio, vt à nobis testitnta est, parum habet difficultatis, pendereius demonstratio à superioribus, præsertim à sexta, secunda, & prima, huius, quas idcirco suis locis in margine citauimus.

Quod ait Diophantus de numeris triangulis, nimirum, si latus cuiuslibet trianguli ducatur in numerum vnitate maiorem seipso, fit duplum ipsius trianguli, id sic infertur. Quoniam omnis triangulus ex definitione, est summa progressionis arithmeticæ quæ incipit ab vnitate, & cuius differentia est vnitas, patet numerum terminorum, seu ipsum latus trianguli æquari maximo termino, proinde si lateri addatur vnitas, seu minimus terminus, fier summa extremorum. Quamobrem cùm latus trianguli seu numerus terminorum, ducetur in numerum vnitate maiorem seipso, hoc est in summam extremorum, fiet duplum summæ omnium terminorum per 4. huius, hoc est dnplũ ipsius trianguli.

Hinc autem innotescir defectus sextæ propositionis vt concipitur à Diophãto, eam restringendo ad solam progressionem arithmeticam quæ incipit ab vnitate, sic enim per eam vix applicari potest hæc octaua propositio numeris triangulis. Etenim requirit hæc propositio vt à numero multitudinis angulorum auferatur quaternarius, vt residui quadratus additus octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum, fiat quadratus. At numerus angulorum trianguli est ternarius, à quo sane auferri non potest quaternarius. Euanescit autem hæc difficultas si vniuersalius enuncietur propositio sexta, vt à nobis præstitum est theoremate quinto. Nam per illud theorema octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum, addendus est quadratus interualli inter eundem numerum angulorum binario multatum, & duplum minimi termini, hoc est binarium, quare non refert vtrum numerus angulorum binario multatus sit maior binario, (vt accidit in omnibus polygonis supra quadratum) vel æqualis binario (vt accidit in quadrato) vel minor binario (vt accidit in triangulo) Nam in primo casu à numero angulorum binario multato, auferetur rursus binarius, seu vt vult Diophantus à numero angulorum auferetur quaternarius. & residui quadratus addetur octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum. In secundo casu etiam à numero angulorum binario multato auferetur rursus binarius, & quia nil supererit, nil addetur ad octuplum supradictum, sed huiusmodi octuplum erit numerus quadratus, etenim à numero angulorum quadrati auferendo 2. superest 2. cuius octuplum est 16. quo ducto in quemlibet quadratum, patet fieri quadratum.

In tertio denique casu numerus angulorum binario multatus auferetur à binario, & residui quadratus addetur octuplo producti ex triangulo in numerum angulorum binario multatum. Vnde quia numerus angulorum trianguli binario multatus est vnitas, quam auferendo à binario superest rursus vnitas, hinc demonstratur quod ait Diophantus propr. 44. lib. 4. omnis triangulus per octo multiplicatus, & adsumens vnitatem, facit quadratum.

Cæterum animaduersione dignum est hanc propositionem non conuerti nisi in triangulis & in quadratis. Quemadmodum enim ex hac propositione sequitur omnem quadratum ductum in 16. efficere quadratum, vt suprà docuimus, sic è conuerso omnis numerus qui ductus in 16. facit quadratum, quadratus est, vt manifestum est. & rursus quemadmodum hac propositione demonstratur, omnem triangulum per octo multiplicatum, & adsumentem 1. efficere quadratum; sic è conuerso omnis numerus cuius octuplum adscita vnitate facit quadratum, triangulus est, vt in promptu est demonstrare.

A. 10. B. 80. C. 81.
F. 4. E. 8. D. 9.
G. 10.

Sit numerus A. cuius octuplum B. cui addita vnitate fiat C. quadratus cuius latus D. dico A. esse triangulum. Etenim quia B. par est cùm sit octonarii multiplex, erit C. impar, ac proinde & latus eius D. impar est, quare si sumatur E. vnitate minor quàm D. erit E. par. sit ergo illius semissis F. & à latere F. fiat triangulus G. constat igitur octuplum ipsius G. adsumpta vnitate facere quadratum, cuius latus superat vnitate duplum ipsius F. tam ex demonstratis ad 44. 4. quàm ex hac propositone triangulis applicata. Quare cum D. superet vnitate duplum ipsius F. & ipsius D. quadratus sit C. vnde ablata vnitate superest B. patet B. esse octuplum trianguli G. sed idem B. ex hypothesi est octuplum numeri A ergo A. est æqualis triangulo G. Quod erat propositum.

In aliis autem polygonis non conuertitur hæc propositio, quod vno aut altero exemplo probasse sufficier. Quãuis enim vi huius propositionis omnis pentagonus ductus in 24. & adsumens vnitatem, faciat quadratum, tamen non omnis numerus qui ductus in 24. & adsumens 1. faciat quadratum, est pentagonus, etenim 2. ductus in 24. & adsumens 1. facit quadratum 49. & tamen 2. non est pentagonus. Rursus quamuis omnis heptagonus, vi huius propositionis ductus in 40. & adsumens 9. faciat quadratum, tamen non omnis numerus qui ductus in 40 & adsumens 9. facit quadratum, statim est heptagonus. Etenim 4. ductus in 40. & adsumens 9. facit quadratum 169. cum tamen 4. non sit heptagonus. & sic de aliis.

PROPOSITIO NONA.

AD docendum autem accommodatius, ostendemus hoc iis qui prompte volũt audire ea quæ quæruntur per methodos. sumpto enim latere multanguli, illud geminabimus, hinc aufetemus vnitatem, & reliquum ducemus in numerum multitudinis angulorum binario multatum; producto addemus binarium, quadratumque eius qui sic fit sumentes, aufetemus ab eo quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, reliquumque diuidentes in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, inueniemus quæsitum multangulum. Rursus ipso multangulo dato, inueniemus latus hac arte. Multiplicabimus eum per octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto adde-

Διδασκαλικώτερον δὲ ὑποδείξομεν καὶ τοῖς βουλομένοις εὐχερῶς ἀκούειν τὰ ζητούμενα διὰ μεθόδων. λαβόντες γὰρ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καὶ ἀεὶ δυπλασιάσαντες, ἀφελοῦμεν μονάδα, καὶ τὸ λοιπὸν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, τῷ γενομένῳ προσθήσομεν ἀεὶ δυάδα, καὶ λαβόντες τὸ ἀπὸ τοῦ γενομένου τετράγωνον, ἀφελοῦμεν ἀπ' αὐτοῦ τὸ ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν. καὶ τὸ λοιπὸν μερίσαντες εἰς τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν. εὑρήσομεν τὸν ζητούμενον πολύγωνον. πάλιν δ' αὐτοῦ πολυγώνου δοθέντος, εὑρήσομεν οὕτως τὴν πλευράν. πολλαπλασιάσαντες γὰρ αὐτὸν ἐπὶ τὸν ὀκταπλασίονα τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ γενομέ-

νῳ προσθέντες τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν τετράγωνον, εὑρήσομεν τετράγωνον, ἐάνπερ ᾖ ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος. τούτου δὲ τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ἀφελόντες ἀεὶ δυάδα, τὸν λοιπὸν μεριοῦμεν ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες μονάδα, καὶ τοῦ γενομένου λαβόντες τὸ ἥμισυ, ἕξομεν τὴν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου πλευράν.

mus quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, & inueniemus quadratum, si tamen datus est multangulus. De huius autem quadrati latere, semper auferemus binarium, residuum diuidemus in numerum multitudinis angulorum binario multatum, quotienti addemus vnitatem, & summæ semissem capientes, habebimus quæsiti multanguli latus.

IN NONAM.

NVlla omnino hîc est difficultas. solum moneo has duas regulas paulò aliter tradi in excerptis nondũ editis Apofrodiri, & Betrubi Rubi architectonis, itemque in Hygini gromatico, nimirum sic.

DATO LATERE INVENIRE POLYGONVM.

Sume quadratum dati lateris, hunc ducito in numerum binario minorem multitudine angulorum, à producto aufer quod fit ex dato latere in numerum quaternario minorem multitudine angulorum, residui semissis erit quæsitus polygonus.

Verbi gratia dato latere 10. si velis hexagonum; quadra 10. fit 100. quem ducito in 4. binario minorem multitudine angulorum, fit 400. hinc aufer 20. qui fit ex latere dato 10. in 2. numerum multitudinis angulorum quaternario multatum, relinquitur 380. cuius semissis 190. est hexagonus à latere 10.

DATO POLYGONO INVENIRE LATVS.

Datum polygonum ducito in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto adde quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, summæ cape latus, huic adde numerum quaternario minorem multitudine angulorum, summam diuide per duplum numeri angulorum binario multati, quotiens erit quæsitum latus.

Vt sit datus hexagonus 190. hunc ducito in 32. octuplum ipsius 4. binario minoris multitudine angulorum, fit 6080. adde 4. quadratum numeri angulorum quaternario multati, fit 6084. cuius latus 78. cui adde 2. numerũ scilicet angulorum quaternario multatum, fit 80. quem diuide per duplum ipsius 4. numeri angulorum binario multati, puta per 8. fit quotiens 10. quæsitum latus.

Nos etiam alias multas, & faciles regulas ad inueniendum polygonum dato latere trademus in Appendicis libro 1.

Cæterum quamuis vt monuimus ad præcedentem, neque regulæ Diophanti, neque hæ Apofroditi possint proprie applicari triangulis, quandoquidem

in his omnibus regulis oportet à numero angulorum auferre quaternarium, quod in triangulis propriè fieri nequit. Attamen impropriè & per numeros fictos quos vocant, etiam in triangulis hæ omnes regulæ locum habent, quod exemplis fiet manifestum.

Dato enim latere 6. quæratur triangulus per regulam Apofrodiri, sumo quadratum ipsius 6. puta 36. quem duco in numerum angulorum binario multatum, puta in 1. fit 36. Tum sumo numerum angulorum multatum quaternario, puta -1. quem duco in datum latus, fit -6. quem aufero à 36. fit 42. cuius semissis 21. est triangulus à latere 6.

Rursus dato triangulo 21. quæro eius latus per regulam Apofrodiri. Duco 21. in octuplum numeri angulorum binario multati, puta in 8. fit 168. & quia numerus angulorum multatus quaternario, est - 1. cuius quadratus est +1. addo 1. ad 168. fit quadratus 169. cuius latus 13. cui addo numerum angulorum quaternario multatum, puta -1. fit 12. quem diuido per duplum numeri angulorum binario multati, puta per 2. fit quæsitum latus 6. eademque ratio est de regulis à Diophanto traditis.

PROPOSITIO DECIMA.

Dato numero inuenire quot modis multangulus esse possit. Esto datus numerus AB. & multitudo angulorum eius BG. & sumatur in ipso BG. binarius GD. & quaternarius GE. & quoniam AB. multangulus existens, tot habet angulos quot sunt in BG. vnitates, qui fit octies ex AB. in BD. adscito quadrato ex BE. [a] quadratum facit, esto eius latus ZH. igitur quadratus ex ZH. æqualis est numero qui fit octies ex AB. in BD & quadrato ipsius BE. sumatur in AB. vnitas AT. Itaque qui fit octies ex AB. in BD. diuiditur in eum qui fit quater ex AT. in BD. & in eum qui fit quater ex vtroque AB. TB. in BD. sumatur ergo DK. æqualis quadruplo vtriusque AB. TB. & transferramus eum qui fit quater ex vtroque AB. TB. in BD. in eum qui fit ex KD. in DB. loco autē illius qui fit quater ex AT. in BD sumamus eum qui fit bis ex BD in DE. (etenim DE. est binarius) igitur quadratus ipsius ZH. æqualis erit producto ex KD. in

A.T——B — E..D..G——K
Z——H

Δοθέντος ἀριθμοῦ. εὑρεῖν ποσαχῶς δύναται εἶναι πολύγωνος. ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ αβ. πλῆθος δὲ αὐτοῦ γωνιῶν ὁ βγ. καὶ κείσθω ἐν τῷ βγ. δυὰς μὲν ὁ γδ. τετρὰς δὲ ὁ γε. καὶ ἐπεὶ ὁ αβ ὢν πολύγωνος ἔχει γωνίας τοσαύτας, ὅσος ἐστὶν ὁ βγ. ὁ ἄρα ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. μετὰ τοῦ ἀπὸ βε τετραγώνου ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω αὐτοῦ πλευρὰ ὁ ζη. ὥστε ὁ ἀπὸ τοῦ ζη τετράγωνος ἴσος τῷ τε ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. καὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ. κείσθω ἐν τῷ αβ. μονὰς ὁ αθ. καὶ διήρηται ὁ ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. εἴς τε τὸν τετράκις ὑπὸ αθ. βδ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αβ. θβ. [καὶ τοῦ βδ. καὶ κείσθω συναμφοτέρῳ αβ. θβ. ἴσος] ὁ δκ. καὶ μεταβησόμεθα τὸν μὲν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αβ. θβ. καὶ τοῦ βδ. εἰς τὸν ὑπὸ κδβ. τὸν δὲ τετράκις ὑπὸ αθ. βδ. εἰς τὸν δὶς ὑπὸ βδ. δε, δυὰς γάρ ἐστιν ὁ εδ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ζη. ἄρα τετράγωνος ἴσος τῷ ὑπὸ κδβ. καὶ τῷ

[a] 8. huius

α.θ——β——ε..δ..γ——κ
ζ——η

δὶς ὑπὸ βδ. δε. καὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ ἀλλὰ τῷ δὶς ὑπὸ βδε καὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ ἴσοι οἱ ἀπὸ τῶν βδ. δε. τετράγωνοι καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ζη ἄρα τετράγωνος ἴσος τῷ τε ὑπὸ κδβ. καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βδ. δε. τετραγώνοις. τῷ δὲ ὑπὸ κδβ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ δβ. ἴσον τὸ ὑπὸ κβδ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ζη. ἄρα ἴσος τῷ τε ὑπὸ κβδ καὶ τῷ ἀπὸ δε. τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ὁ δκ. ἴσος ὢν τετράκις συναμφοτέρῳ τῷ αβ. βθ. μείζων ἐστὶ τετράκις τοῦ αθ. τουτέστι τετράδος, ὧν ὁ βγ. ἐστὶ δυάς. λοιπὸς ἄρα ὁ γκ. μείζων δυάδος τοῦ γδ. ἡ ἄρα διχοτομία τοῦ δκ. πεσεῖται μεταξὺ τοῦ γκ. ἔστω τὸ λ. καὶ μεταβησόμεθα τὸ ἀπὸ βλ. εἰς τὸ ἀπὸ λδ. καὶ τὸ ὑπὸ κβδ. ἐπεὶ γὰρ ἡ δκ. τέτμηται δίχα κατὰ τὸ λ. πρόσκειται δὲ ἡ δβ καὶ ἔστι τό τε ὑπὸ κβδ. καὶ τὸ ἀπὸ λδ. ἴσον τῷ ἀπὸ λβ. καὶ τὸ ἀπὸ λβ ἄρα τοῦ ἀπὸ λδ. ὑπερέχει τῷ ὑπὸ κβδ. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ζη ἄρα τετράγωνος ἴσος τῇ τε ἀπὸ τῶν βλ. λδ. ὑπεροχῇ καὶ τῷ ἀπὸ δε τετραγώνῳ. κοινὸς προσκείσθω ὁ ἀπὸ δλ. καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ζη. δλ. ἄρα ἴσοι τετράγωνοι εἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βλ. λε. τετραγώνοις. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοί, δυσὶν ἀριθμοῖς ἴσοι ὦσι, καὶ ἐναλλὰξ αἱ ὑπεροχαὶ αὐτῶν μόναι, ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν λδ. δε. ὑπεροχὴ ἴση τῇ τῶν λβ. ζη. ὑπεροχῇ. καὶ ἐπεὶ ὁ εδ. τῷ δγ. ἴσος, πρόσκειται δὲ ὁ γλ. τὸ ἄρα ὑπὸ ελγ. μετὰ τοῦ ἀπὸ γδ. ἴσον τῷ ἀπὸ δλ. ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν λδ. δγ. ὑπεροχή, τουτέστιν ἡ ἀπὸ τῶν λδ. δε. ἥτις ἐστὶν ὁ ὑπὸ ελγ. ἴση τῇ ἀπὸ

DB. & ei qui fit bis ex BD. in DE vna cum quadrato ex BE. atqui duplo producti ex BD. in DE. vna cum quadrato ex BE. æquales sunt quadrati ex BD DE. ergo & quadratus ex ZH. æqualis erit producto ex KD. in DB. & quadratis ipsorum BD. DE. at producto ex KD. in DB. vna cum quadrato ex DB. æqualis est qui fit ex KB. in BD. igitur & quadratus ex ZH. æqualis erit producto ex KB. in BD. & quadrato ex DE. & quoniam DK. æqualis existēs quadruplo vtriusq; AB. BT. maior est quadruplo ipsius AT. hoc est quaternario, & quaternarij semissis est binarius DG. reliquus vtiq. GK. maior erit binario GD. igitur si diuidatur DK. bifariam in L. cadet L. inter G. & K. itaque loco quadrati ex LB. sumamus quadratum ex LD. cū producto ex KB. in BD. quandoquidē DK. secatur bifariam in L. & additur ei DB. ideoque producto ex KB. in BD. cū quadrato ex LD. æquatur quadratus ex LB. igitur quadratus ex LB. superat quadratū ex LD. producto ex KB. in BD. quocirca quadratus ex ZH. æqualis est interuallo quadratorum BL. LD. & quadrato DE. addatur vtrimque quadratus DL. igitur quadrati ZH. DL. æquales sunt quadratis BL. DE. cùm autem duo numeri simul, duobus simul æquales sunt, sunt & permutando æqualia eorū interualla. igitur interuallū quadratorū LD. DE. æquale est interuallo quadratorum LB. ZH. & quoniā ED. æqualis est DG. & additur illis GL. productus vtique ex EL. in LG. cum quadrato GD. æquatur quadrato DL. quamobrem interuallum quadratorū LD. DG. seu quadratorū LD. DE. quod est productus

A.T——B — E..D..G——L——K
Z — H——N——M

ex EL. in LG. æquale est interuallo quadratorũ LB. ZH. ponatur ipsi BL. æqualis ZM. nam BL. maior est quam ZH. quoniã quadrati ZH. DL. ostensi sunt æquales quadratis BL. ED. cæterũ quadratus DL. maior est quadrato DE. (quandoquidẽ maior est quadrato DG.) idcirco & quadratus BL. maior est quadrato ZH. ponatur ergo ipsi BL. æqualis ZM. erit igitur interuallũ quadratorum ZM. ZH. æquale producto ex EL. in LG. & quoniã DK. quadruplus est vtriusq. AB. BT. at DK. bifariã secatur in L. erit vtiq. DL. duplus vtriusque AB. BT. atqui DG. duplus est vnitatis AT. ergo reliquus GL. dupl⁹ est duorũ BT. igitur GL. quadruplus est ipsius BT. & BT. est quarta pars ipsius GL. sed & AT. vnitas est quarta pars quaternarii EG. ergo totus AB. totius EL. quarta pars est. sed & TB. ostensus est esse quarta pars ipsius LG. igitur productus ex AB. in BT. est sextadecima pars producti ex EL. in LG. productus ergo ex EL. in LG. æquale est producto ex AB. in BT sedecies. sed iã ostensum est productum ex EL. in LG. æquari interuallo quadratorũ MZ. ZH. ergo qui fit sedecies ex AB. in BT. æquatur interuallo quadratorũ MZ. ZH. hoc est quadrato MH. & duplo producti ex ZH. in HM. quare qui fit sedecies ex AB. in BT. æqualis est quadrato HM. & duplo producti ex ZH. in HM. quamobrem HM. par est. Secetur bifariam in N.

α.θ——β——ε..δ..γ——λ——κ
ζ——η——ν——μ

τῶν λβ. ζη. κείσθω τῷ βλ. ἴσος ὁ ζμ. μείζων γάρ ἐστιν ὁ βλ. τοῦ ζη. ἐπείπερ ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ζη. δλ. τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ βλ. εδ. τετραγώνοις. λοιπὸν τὸ ἀπὸ δλ. μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ δε, ἐπείπερ καὶ τοῦ ἀπὸ δγ. μεῖζόν ἐστιν, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ βλ. τοῦ ἀπὸ ζη. μεῖζόν ἐστι. κείσθω οὖν τῷ βλ. ἴσος ὁ ζμ. ἔσται δὴ καὶ ἡ τῶν ἀπὸ ζμ. ζη. ὑπεροχὴ ἴση τῷ ὑπὸ ελ. λγ. καὶ ἐπεὶ ὁ δκ. τετραπλασίων ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ αβ. βθ. ὁ δὲ δκ. διχῶς τέτμηται κατὰ τὸ λ. καὶ ὁ δλ. ἄρα διπλασίων ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ αβ. βθ. ὧν ὁ δγ. διπλασίων ἐστὶ τοῦ αθ. λοιπὸς ἄρα ὁ γλ. διπλασίων ἐστὶ δύο τῶν βθ. τετραπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ γλ. τοῦ θβ. ὥστε τέταρτον μέρος ἐστὶν ὁ θβ. τοῦ λγ. ἀλλὰ καὶ ἡ αθ. μονὰς τέταρτόν ἐστι τῆς εγ. τετράδος. ὅλος ἄρα ὁ αβ. τέταρτόν ἐστι μέρος τοῦ ελ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ θβ. τοῦ λγ. μέρος τέταρτον. τὸ ἄρα ὑπὸ αβ. βθ. ἑκκαιδέκατόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ελ. λγ. τὸ ἄρα ὑπὸ ελ. λγ. ἴσον τῷ ἑκκαιδεκάκις ὑπὸ αβ. βθ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ελ. λγ. ἴσον τῇ τῶν ἀπὸ μζ. ζη. ὑπεροχῇ. καὶ τὸ ἑκκαιδεκάκις ἄρα ὑπὸ αβ. βθ. ἴσον τῇ τῶν ἀπὸ μζ. ζη. ὑπεροχῇ, τουτέστι τῷ τε ἀπὸ μη. καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ζη. ημ. ὥστε ὁ ἑκκαιδεκάκις ὑπὸ αβ. βθ. ἴσος τῷ τε ἀπὸ ημ. καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ζη. ημ. ὥστε ἄρτιός ἐστιν ὁ ημ. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ ν.

ΤΕΛΟΣ.

CLAVDII GASPARIS

BACHETI SEBVSIANI APPENDICIS AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS.

LIBER PRIMVS.

PROPOTIO PRIMA.

In progressione arithmetica, quilibet terminorum post minimum, continet minimum semel, & differentiam toties, quotus quisque est à minimo; nimirum primus a minimo, semel: secundus bis: tertius ter & ita deinceps.

E. 2. F. 4. G. 6.
A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

Sint in progressione arithmetica ABCD. & sit differentia E. cuius duplum F. & triplum G. & sic deinceps, dico B. continere A. & E. Itemque C. continere A. & F. atque etiam D. continere A. & G. & euidens est ex sola definitione progressionis arithmeticæ. Aliter per 3. Diophanti D. continet A. semel, & differentiã E. secundum numerum terminorum vnitate multatum id est ter, & eadem de causa C. continet A. semel, & E. bis, & rursus B. continet A. & E. semel eademque ratio si plures exponantur numeri. Ergo patet propositum.

PROPOSITIO SECVNDA.

In progressione arithmetica, si differentia ducatur in triangulum numeri terminorum, vnitate multati, & producto addatur quod fit ex numero terminorum in minus extremum, fiet summa terminorũ omniũ.

E. 2.
A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

Sint ABCD. in progressione arithmetica, cuius differentia E. dico si triangulum lateris vnitate minoris numero terminorum ducatur in E & producto addatur quod fit ex ipso numero terminorum in A. fieri summam omnium ABCD. nam per præced. A. continetur semel in quolibet ipsorum ABCD. & præterea B. continet E. semel; C. bis continet eundem E. & D. continet ter eundẽ E. & sic deinceps. Quare patet E. contineri in ipsis BCD. secundũ vnitates trianguli cuius latus est numerus ipsorum BCD. minor scilicet vnitate quàm numerus omnium ABCD. quare patet propositum.

PROPOSITIO TERTIA.

Dato latere polygoni, si numerus angulorum binario multatus ducatur in datum latus vnitate multatum, & qui producitur, binario auctus ducatur in datum latus, fiet duplum polygoni.

H. 3. G. 4 F. 5.
A. 1. B. 4. C. 7. D. 10. E. 13.
K. 12. L. 14 M. 70.

Sit F. datum latus polygoni, vnde ablata vnitate supersit G. & sit H. numerus angulorum binario multatus; quo ducto in G. fiat K. qui auctus binario faciat L. quo ducto in F. fiat M. dico M. esse duplum polygoni à latere F. exponantur termini ABCDE. in progressione arithmetica constitutiua polygoni à latere F. erit ergo summa omnium ABCDE. æqualis polygono illi, & erit A. vnitas, H. differentia, numerus terminorum ipse F. vt constat ex demonstratis à Diophanto. Quoniam

igitur interuallum extremorum AE. per tertiam Diophanti æquatur producto ex H. in G. nempe ipsi K. & addendo interuallum numerorum duorum, duplo minoris, fit summa ipsorum; patet addito binario qui duplus est ipsius A. ad K, aggregatum L. æquari summæ ipsorum AE. Quamobrem qui fiet ex numero terminorum F. in summam extremorum L. nimirum M. æquatur duplo summæ omnium per quartam Diophanti, seu duplo polygoni à latere F. quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO QVARTA.

Si latus polygoni ducatur in seipsum vnitate multatum & productum ducatur in numerum angulorum binario multatum, fiet numerus qui adscito duplo lateris, æquabitur duplo polygoni.

A. 5. B. 4. C. 3.
D. 70. E. 60. F. 20.
G. 70. H. 14. K. 12.

Sit A. latus polygoni & B. vnitate minor, & C. numerus angulorum binario multatus ductoque A. in B. fiat F. quo ducto in C. fiat E. & ad ipsum E. addendo duplum lateris A. fiat D. dico D. esse duplum polygoni à latere A. etenim ducto B. in C. fiat K. cui addito binario fiat H. quo ducto in A. fiat G. eritque G. per præced. duplum polygoni à latere A. quare probandum ipsos DG. esse æquales. Quoniã igitur idem B. ductus in A. & in C. producit F. & K. erit vt A ad C. sic F. ad K. quare ex A in K. fiet idem E. qui fit ex C. in F. cum itaq; H. contineat K. & binarium, productus ex A. in H. nẽpe G. æquatur productis ex A. in K. nempe ipsi E. & ex A. in binarium, nempe duplo ipsius A. At eidem E. & duplo A. æquatur D. ex hypothesi. ergo DG. sunt æquales, & ideo D. est duplus polygoni à latere A. quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO QVINTA.

Si quadratus dati lateris ducatur in numerum angulorum binario multatum, & à producto auferatur quod fit ex dato latere in numerum angulorum quaternario multatum, residuum est duplum polygoni à dato latere.

K. 42. L. 210. M. 14. N. 224.
A. 7. B. 6. C. 5. D. 3.
E. 49. F. 245. G. 21. H. 224.

Sit A. datum latus, & B. vnitate minor, & sit C. numerus angulorum binario multatus, & D. idem numerus angulorum multatus quaternario, seu numerus binario minor ipso C. & sit E. quadratus ipsius A. quo ducto in C. fiat F. vnde auferendo G. qui fit ex D. in A. superfit H dico H. esse duplum polygoni à latere A. etenim ducto B. in A. fiat K. quo ducto in C. fiat L. cui addendo M. duplum ipsius A. fiat N. constat ex præced. ipsum N. esse duplum polygoni à latere A. Probandum ergo N. H. æquales esse. Quoniam itaque A. excedit B. vnitate qui fit ex A. in A. nempe E. æquatur iis qui fiũt ex A. in B. nempe ipsi K. & ex A. in vnitatem, nempe ipsi A. cum ergo KA. æquentur E. qui fit ex C. in E. nempe F. æquatur iis qui fiunt ex C. in K. nempe L. & ex C. in A. sed quoniã C. superat D. binario, productus ex C. in A. æquatur G. producto ex D. in A. & duplo ipsius A. nẽpe ipsi M. igitur F. æquatur tribus numeris L. M. G. Quamobrem auferendo vtrimque eundem G. remanent æquales hinc quidem H. inde vero LM. seu illis æqualis N. Quare cum N. ostensus sit duplus polygoni à latere A. erit & H. eiusdem polygoni duplus. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Hæc est demonstratio regulæ quam tradunt Hyginus & Apofroditus, ad inueniendum polygonum dato latere, de qua supra ad nonam Diophanti.

PROPOSITIO SEXTA.

Dato latere polygoni, si triangulus à dato latere vnitate multato ducatur in numerum angulorum binario multatum, fit numerus qui adscito dato latere æquatur ipsi polygono.

G. 42. H. 210.
A. 7. B. 6. C. 5.
D. 21. E. 105. F. 112

Sit datum latus A. & numerus vnitate minor B. & sit C. numerus angulorum binario multatus, triangulus autem à latere B. esto D. quo ducto in C. fiat. E. cui addendo datum latus A. fiat F. dico F. esse polygonum à latere A. etenim ducatur B. in A. & fiat G. quo ducto in C. fiat H. Tunc patet per octauam Diophanti ipsum G. esse duplum trianguli à latere B. nempe ipsius D. quare cùm ex eodē C. in ipsos GD. fiant HE. erit & H. duplus ipsius E. Itaque cùm ad H. addetur duplum ipsius A. & ad E. addetur A. vnde fit F. erit H. cum duplo A. duplus ipsius F. Atqui H cum duplo A. est duplus polygoni à latere A. per quartam huius. Ergo F. est huiusmodi polygonus. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Si quilibet polygonus adsciscat suum latus secundum numerum angulorum binario multatum, & præterea vnitatem, fiet polygonus similis proximè maior.

F. 51. E. 16. D. 35.
B. 6. A. 5. C. 3.
G. 1. H. 4 K. 7. L. 10. M. 13. N. 16.

Esto polygonus D. cuius latus A. cui addita vnitate fiat B. & sit numerus angulorum binario multatus C. Et productus ex A. in C. vnitate auctus esto E. additisque simul ED. fiat F. dico F. esse polygonum proximè maiorem ipso D seu à latere B. Etenim exponatur progressio arithmetica constitutiua huiusmodi polygonorum, & sumantur in ea tot termini G. H. K. L. M. N. quot sūt in B. vnitates. Igitur per octauam Diophanti differētia progressionis est C. & summa omniū est polygonus à latere B. At summa ipsorum G. H. K. L. M. est polygonus D. Polygonus ergo à latere B. excedit ipsum D. numero N. Atqui per tertiam Diophanti N. continet vnitatem G. & productum ex differentia C. in A. vnitate minorem numero terminorum, & productus ex C. in A. vnitate auctus est E. Igitur E. æquatur ipsi N. cum ergo vt ostensum est compositus ex ND. æquetur polygono à latere B. vtique compositus ex ED. nempe F. erit huiusmodi polygonus quod erat propositum.

PROPOSITIO OCTAVA.

Si triangulus collateralis polygono ducatur in numerum angulorum binario multatum, & à producto auferatur, quod fit ex latere polygoni in numerum angulorum ternario multatum, residuum æquabitur ipsi polygono.

Esto polygonus K. cuius latus A. & numerus angulorum binario multatus B. vnde ablata vnitate superfit C. ternario minor numero angulorum. sitque D. triangulus à latere A. quo ducto in B. fiat E. ductoque

D.15. E.45. F.10.
A.5.B.3.C.2.
G.10.H.30. K.35.

C. in A. fiat F. dico ſi F. auferatur ex E relinqui polygonum K. etenim ſumatur G. triangulus à latere vnitate minore ipſo A. ductoq; B. in G. fiat H. vnde per ſextã huius additis ſimul A. & H. fiet K. Quia igitur per præced. ſi ad G. addatur vnitas, & ſuum latus, fiet D. vnitas autem & latus ipſius G. æquantur A. erit D. æqualis duob. AG. ſimul. quamobrem qui fit ex B. in D. nempe E. æquatur iis qui fiunt ex B. in A. & ex B. in G. qui eſt H. Productus autem ex B. in A. (quãdoquidem B. ſuperat vnitate ipſum C.) æquatur producto ex C. in A. nempe F. & præterea ipſi A, Igitur E. æquatur tribus numeris H. A. F. vnde auferendo vtrimque eundem F. remanet ſumma duorum A. H. nempe polygonus K. æqualis ei qui reſtat ſi ex E. auferatur F. quod demonſtrandum erat

SCHOLIVM.

Ex multis harum propoſitionum, ad inueniendum polygonum dato latere collige canones elegantes, & quidem faciliores & compendioſiores eo quem tradit Diophantus propoſitione nona.

I. CANON

Ducito datum latus vnitate multatum in numerum angulorum binario multatum, & productum binario auctum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni. conſtat per tertiam huius.

Vt dato latere 7. ſi quæratur eius pentagonus: latus vnitate multatum eſt 6. numerus angulorum binario multatus 3. quo ducto in 6. fit 18. qui binario auctus fit 20. quo ducto in 7. fit 140. cuius ſemiſsis 70. eſt quæſitus pentagonus.

2. CANON.

Ducito datum latus in numerum vnitate minorem, productum ducito in numerum angulorum binario multatum producto adde duplum lateris, fiet duplum polygoni per quartam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ducito 7. in 6. fit 42. quo ducto in 3. fit 126. cui ſi addas duplum 7. nimirum 14. fit vt prius 140. cuius ſemiſsis 70. eſt quæſitus pentagonus.

3. CANON.

Ducito quadratum dati lateris in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer quod fit à dato latere in numerum angulorum quaternario multatum reſiduum erit duplum polygoni per quintam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ducito 49. in 3. fit 147. hinc aufer productum ex 7. in 1. nempe 7. reſiderium eſt vt prius 140. cuius ſemiſsis 70. eſt quæſitus pentagonus.

4. CANON.

Sume triangulum à latere dato vnitate multato, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, producto adde datum latus, fiet quæſitus polygonus per ſextam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. sume triangulum à latere 6. nempe 21. quo ducto in 3. fit 63. cui si addas datum latus 7. fit pentagonus quæsitus 70.

5. CANON.

Sume triangulum à dato latere, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer quod fit ex latere dato in numerum angulorum multatum ternario, residuum erit quæsitus poligonus per octauam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. sume triangulum illius nempe 28. quo ducto in 3. fit 84. vnde aufer quod fit ex 7. in 2. nempe 14. residuum 70. est quæsitus pentagonus. vide rursus omnium expeditissimum Canonem in scholio vndecimæ.

PROPOSITIO NONA.

Si numerus secetur in duas partes, triangulus totius æqualis est triangulis partium & plano sub partibus comprehenso.

D.....E...F.G
A.....B...C
K 72.

Numerus AC. secetur in AB BC. dico triangulum totius AC. æquari triangulis partium AB. BC. & plano sub AB. BC. sumatur DE. æqualis ipsi AB. & ei apponatur EF. æqualis BC. & adiiciatur ei vnitas FG. constat ergo DG. superare AC. vnitate, sicut & EG. superat BC. vnitate. Ducto insuper AC. in DG. fiat K. patet ergo per octauam Diophanti vel per tertiam huius ipsum K. esse duplum trianguli à latere AC. quia vero ducere AC. in DG. idem est atque ducere sigillatim AB. in DE. EF. FG. & BC. in DE. EG. erit K. æqualis productis illis omnibus. At ducere AB. in DE. sibi æqualem & in vnitatem FG. idem est atque ducere AB in numerum vnitate maiorem seipso, vnde fit duplum trianguli ipsius AB. ducere autem AB. in EF. idem est atque ducere AB. in BC. igitur patet ex ductu AB. in totum DG. fieri duplum trianguli AB. & planum sub AB. BC. similiter productus ex BC. in DE. æquatur plano sub AB. BC. & productus ex BC. in EG. qui vnitate maior est, æquatur duplo trianguli ipsius BC. igitur productus ex BC. in totum DG. æquatur duplo trianguli ipsius BC. & plano sub AB. BC. quamobrem compositum ex productis ex AB. in DG. & ex BC. in DG. nempe productus ex AC. in DG. nimirum ipse K. æqualis est duplo triangulorum AB. BC. & duplo plani sub AB. BC. igitur dimidium ipsius K. nempe triangulus AC. æquatur triangulis AB. BC. & plano sub AB. BC. quod demonsttandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc sequitur duplum cuiuslibet trianguli adsumpto collaterali quadrato, facere triangulum à latere duplicato; quod euidens est si AB. BC. ponantur æquales.

PROPOSITIO DECIMA.

Si numerus secetur in duas partes, polygonus totius æqualis est similibus polygonis partium, & plano sub partibus comprehenso, sumpto secundum numerum angulorum binario multatum.

D 3. E 2.
A.....B....C
F.15. G.10. H.20.
K.45. L.30. M.60.
N.10. P. 8. Q.57.
R.35. S.22. T.117.

Sit numerus AC. sectus in AB. BC. & sit D. numerus angulorum binario multatus, & E. vnitate minor. dico polygonum totius AC. æquari polygonis similib. partium AB. BC. & producto ex D. in planum sub AB. BC. comprehensum. Etenim sumantur F. & G. trianguli ipsorum AB. BC. & sit H. planus sub AB. BC. Tum ducto D. in ipsos F.G.H. sigillatim, fiant K.L.M. & ducto E. qui est numerus angulorum ternario multatus in AB. BC. fiant N. P. quibus detractis ab ipsis K L. relinquantur R. S. quorum summa Q. qua addita ad M. fiat T. Patet itaque ex sola constructione & per octauam huius numeros R. S. esse polygonos ipsorum AB. BC. quorum summa Q. addita ad M. (qui fit ex D. in H. planum sub partib.) fiet vtique T. continens polygonos partium, & planum sub partib. sumptum secundū numerum angulorum binario multatum. Restat ergo probandum ipsū T. esse polygonum similem totius AC. Quoniā ergo FG. sunt trianguli partium AB. BC. & H. planus sub partib. erit aggregatum ipsorum F. G. H. æquale triangulo totius AC. per præced. Quare cùm ex D. in ipsos F. G. H. fiant K. L. M. erit aggregatum ipsorum K. L. M. æquale producto ex D. in triangulum ipsius AC. Quare cum etiā N P. æquentur producto ex E. in AC. & iis sublatis de aggregato ipsorum K L. M. supersint R. S. M. seu T. patet T. esse id quod restat si productus ex E in AC. auferatur à producto ex D. in triangulum eiusdem AC. ergo T. est polygonus ipsius AC. per octauam huius. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Quod peculiariter de triangulis ostensum est in præcedenti, & ab Euclide de quadratis quarta secundi. Hîc vniuersaliter ostenditur de omnibus polygonis, vt merito inter pulcherrimas propositiones hæc censeri debeat quam primus omnium (quod sciam) ego demonstraui.

Et quemadmodum quartam secundi extendimus ad sectionem numeri in quotlibet partes. Sic & istam vniuersalius proponemus, hoc scilicet modo.

Si numerus secetur in quotlibet partes, polygonus totius æqualis est similibus polygonis partium, & productis ex qualibet parte in quamlibet aliam toties sumptis quot sunt vnitates in numero angulorum binario multato.

K. 3.
A....B...C..D

Esto enim AD. sectus in quotlibet partes AB. BC. CD. *& sit* K. *numerus angulorum binario multatus. Dico polygonum totius AD. æquari polygonis singulorum AB. BC. CD. & productis ex qualibet parte in quamlibet sumptis secundum* K. *consideretur prius AD. vt sectus in duas partes AC. CD. Tunc per hanc propositionem decimam polygonus totius æquatur polygonis ipsorum AC. CD. & producto ex AC. in CD. ducto in* K. *similiter polygonus AC. æquatur polygonis ipsorum* AB. *BC. & producto ex AB. in BC. ducto in* K. *Quare cum & productus ex AC. in* CD. *ductus in* K. *æquetur productis ex AB. & BC. in CD. ductis in* K. *patet polygonum totius æquari polygonis partium AB. BC. CD. & productis ex qualibet in quamlibet ductis in* K. *quod si ponatur numerus diuisus in quatuor partes, simile concludetur per id quod de diuisione in tres ostensum est, & sic in infinitum. Ergo patet propositum.*

PROPOSITIO VNDECIMA.

Quilibet Polygonus componitur ex tot triangulis, quod vnitates continet numerus angulorum binario multatus. Ex his autem vnus est collateralis ipsi polygono, reliqui vero à latere proximè minori.

A. 51.
D. 3. B. 6. C. 5.

Esto quilibet polygonus A. cuius latus B. quod vnitate multatum sit C. & numerus angulorum binario multatus esto D. dico polygonum A. componi ex tot triangulis quod sunt in D. vnitates, quorum vnus est ab ipso latere B. reliqui à latere C. Etenim per sextam huius polygonus A. æquatur producto ex D. in triangulum abs C. adscito latere B. sed si vni triangulorum abs C. concipiatur addi B. fiet triangulum ab ipso B. per septimam huius (quia B. continet C. & prætetea vnitatem) Patet ergo polygonum A. componi ex tot triangulis quot sunt in D. vnitates quorum vnus est à latere B. reliqui à latere C. quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc etiã elicietur Canon ad inueniendum polygonum dato latere. Nam si quæratur pentagonum à latere 6. quia numerus angulorum binario multatus est 3. constat quæsitum pentagonum componi ex tribus triangulis quorum vnus est à latere 6. reliqui duo à latere 5. si ergo sumas huiusmodi triangulos 21. 15. 15. horum summa erit 51. quæsitus pentagonus. Quia vero si datum latus ducatur in seipsum vnitate auctum fit duplum trianguli à dato latere, & si idem latus ducatur in seipsum vnitate multatum, fit duplum trianguli proxime minoris. formari poterit Canon omnium elegantissimus & expeditissimus.

CANON.

Dato lateri vnitate aucto adde ipsummet latus vnitate multatum toties, quot sunt vnitates in numero angulorum multato ternario, summam ducito in datum latus, fiet duplum quæsiti polygoni.

Vt si quæratur pentagonum à latere 6. adde ad 7. duplum ipsius 5. nempe 10. fiet 17. quo ducto in datum latus 6. fit 102. cuius semissis 51. est quæsitus pentagonus.

ALITER.

Ducito datum latus in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer numerum angulorum multatum quaternario, residuum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni.

Vt in dato exemplo ducito 6. in 3. fit 18. hinc aufer 1. restant 17. qua ducta in 6. faciunt 102. vt prius, cuius semissis 51. Quoniam vero conuersum huius propositionis vtile est ad perficiendum vltimum problema Diophanti vt suo loco patebit, operæpretium est illud demonstrare, nimirum.

Si quilibet numerus ducatur in quemlibet triangulum, & producto addatur triangulum proxime maius, totum erit numerus polygonus, collateralis quidem maiori triangulo, sed tot angulorum duobus amplius, quot ipse triangulis constat.

G.144. H.189. K.189.
A. 36. B. 45. C. 9.
D. 4. E. 5. F. 7.

Esto A. quilibet triangulus; & proxime maior B. cuius latus C. *Tum sumatur quilibet numerus* D. *qui vnitate auctus fiat E. & huic addendo binarium fiat F. & ducto D. in A. fiat G. cui addendo B. fiat H. Patet ergo H. tot constare triangulis quot sunt vnitates in E. etenim H. constat ex triangulo B. & numero G. qui continet toties triangulum A. quot sunt vnitates in D. quare cum E. superet D. vnitate, patet H. tot triangulis constare quot sunt vnitates in E. cum igitur F. sit binario amplior quàm E. dico* H. *esse poligonum à latere quidem C. sed tot angulorum quod sunt vnitates in* F. *etenim si non sit, sumatur talis polygonus* K. *facile est ostendere* K. *æquari ipsi H.* Quia *enim* K. *est polygonus à latere* C. *tot angulorum, quot sunt vnitates in F. sequitur per hanc vndecimam propositionem ipsum* K. *tot constare triangulis quot sunt vnitates in E. quorum vnum collate-*

rale eſt ipſi K. hoc eſt æquale ipſi B. reliqua æqualia ſunt ipſi A. ſed & H iiſdem prorſus triangulis conſtat ex conſtructione. Igitur K. eſt æqualis ipſi H. ac proinde H. eſt polygonus à latere C. tot angulorum, quot ſunt vnitates in F. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DVODECIMA.

Si quotlibet polygoni collaterales ordinate diſponantur, ij cum ſuo communi latere conſtituent progreſſionẽ arithmeticam, cuius differentia erit triangulus ab eodem latere vnitate multato.

H. 1. K. 2. L. 3. M. 4.
A. 7. B. 28. C. 49. D. 70. E. 91.
F. 6. G. 21.

Sit A. datum latus cuius triangulus B. quadratus C. pentagonus D. hexagonus E. & ſic deinceps. ſitque F. minor vnitate quam A. cuius triangulus G. dico ipſos ABCDE. conſtituere progreſſionem arithmeticam cuius differentia eſt G. etenim cum numeri angulorum ipſorũ BCDE. ſint numeri 3. 4. 5. 6. & ſic deinceps per additionẽ vnitatis creſcentes, ſi ſumantur HKLM. numeri angulorum binario multati erunt hi 1. 2. 3. 4. qui etiam per additionem vnitatis creſcent. Itaque quoniam per 7. huius G. adſciſcens A. maiorem vnitate quam ſuum latus F. facit triangulum B. patet G. eſſe differentiam duorum AB. Rurſus quia per præced ſinguli CDE. continent tot triangulos quot ſunt vnitates in ſingulis K. M. quorum vnus eſt B. reliqui omnes æquales ipſi G. patet C. continere B. & ipſum G. ſemel, at D. continere B. & inſuper G. bis, atque etiam E. continere B. & ipſum præterea G. ter, & ſic in infinitum quilibet altior polygonus continet B. & adhuc ipſum G. ſemel amplius quam antecedens polygonus. Conſtat igitur per primam huius G. eſſe differentiam per quam progrediuntur ipſi ABCDE. quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc elicitur Canon ad inueniendam ſummam quotlibet polygonorum collateralium ordinate diſpoſitorum dato latere, vt ſi quæratur ſumma quadrati, pentagoni, hexagoni, heptagoni & octogoni à latere 4.

CANON.

Ducito triangulum lateris vnitate multati in numerum multitudinis polygonorum vnitate multatũ, producto adde duplum minimi polygoni, ſummam ducito in numerum multitudinis polygonorum, fiet duplum quæſitæ ſummæ.

Vt in exemplo propoſito triangulum lateris vnitate multati eſt 6. quo ducto in 4. numerum multitudinis polygonorum vnitate multatum fit 24. duplum autem minimi polygoni, nempe quadrati à latere 4. eſt 32. qui cum 24. facit 56. quo ducto in 5. numerum multitudinis polygonorum fit 280. cuius ſemiſſis 140. eſt ſumma quæſita.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

In progreſſione numerorum ſecundũ ſeriem naturalem diſpoſitorum ab vnitate, polygonus maximi, æquatur maximo terminorum, & ſummæ reliquorum ſumptæ ſecundum numerum angulorum binario multatum.

H 3. G 51.

A 1. B 2. C 3 D 4. E 5. F 6.

hæc facile per 6. concluditur, cum qua idem ferè est mutatis verbis. Sint ABCDEF. quotlibet numeri secundũ seriem naturalem numerorũ ab vnitate dispositi, & maximi F. polygonus esto G. & numerus angulorum binario multatus sit H. dico G. æquari ipsi F & summæ reliquorum ABCDE. sumptæ secundum H. Quia enim summa ipsorum ABCDE. est triangulos à latere E. vnitate minore ipso F. patet per 6. productum ex H. in illum triangulum adscito F. æquari ipsi G. vnde patet propositum.

PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

In progressione numerorum secundum seriem naturalẽ dispositorũ, aggregatum similium polygonorum à singulis, æquatur productis ex sic dispositis numeris in totidẽ numeros progressionis huiusmodi polygonorum constitutiuæ, si videlicet maximus vnius ordinis ducatur in minimum alterius ordinis. Tum primus à maximo ducatur in primum à minimo, & secundus à maximo in secundum à minimo, & ita deinceps.

X 40 V 40

A 1. B 2. C 3. D 4.

Q 1. R 3. S 3. T 3. M 1 N 3. P 3 K 1. L 3.

H 10. G 7. F 4. E 1.

Sint ABCD secundũ seriem naturalẽ dispositi & summa polygonorum à singulis esto V. tum sumantur totidem termini in progressione huiusmodi polygonorũ constitutiua. ordine inuerso dispositi EFGH. ductisq; A in H. B in G C in F. D in E sit productorum summa X. dico VX esse æquales sit enim L differentia progressionis constitutiuæ, seu numerus angulorum binario multatus: patet per primam huius F continere vnitatem E & L semel; G continere vnitatem semel, & L bis; H continere vnitatem semel, & L ter. Diuidantur ergo numeri H.G.F. in partes ex quibus componuntur, nimirum F. in vnitatem K. & in L. Ipse autem G in vnitatem M & in N.P. æquales ipsi L, Denique ipse H. resoluatur in vnitatem Q & in R. S. T. æquales ipsi L. Patet numeros qui fiunt ex A in H. ex B in G. ex C in F ex D in E simul iunctos, nempe X. æquari omnibus qui fiunt ex A in Q.R.S.T. ex B. in M N P. & ex C in K L. & ex D. in E. Quia igitur ex E in D fit ipse D (quia E est vnitas) At ducere L in C. P in B & T in A. idem est ac ducere L in summam omnium ABC. productus autem ex L in summam omnium ABC. adscito D facit polygonum ipsius D per præcedentem. Patet productos ex E in D. ex L in C. ex P in B. & ex T in A. æquari polygono ipsius D. simili prorsus argumẽto ostẽdemus productos ex K in C. ex N in B. & ex S in A æquari polygono ipsius C. & rursus productos ex M in B. & ex R in A æquari polygono ipsius B. & denique constat ex Q vnitate in A vnitatem fieri polygonum ipsios A. Igtur euidens est omnia illa producta seu numerum X æquari polygonis à singulis ABCD. seu numero V. quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

Si sint quotlibet numeri ab vnitate secundum seriem naturalem dispositi, aggregatum productorum ex numero angulorum binario multato in primum à maximo semel; in secundum bis; in tertium ter, & sic deinceps adscita summa numerorum, æquatur aggregato polygonorum à singulis.

Repetatur enim præcedens figura. Dico aggregatum productorũ ex L in C semel, in B. bis in A ter & sic deinceps, adscita summa ipsorũ ABCD. æquari V. aggregato polygonorum à singulis. Nam ex præcedenti constat V. æquari pro-

X 40 V 40
A 1. B 2. C 3. D 4.
Q 1. R 3. S 3. T 3. M 1. N 3. P 3. K 1. L 3.
H 10. G 7. F 4. E 1.

ductis ex E. in D. ex KL. in C. ex MNP. in B. & ex QRST. in A. Qoia vero ſinguli E. K. M. Q. æquatur vnitati, producta ex E. in D. ex K in C. ex M. in B. & ex Q. in A. ſimul æquantur ſummæ ipſorũ ABCD. Rurſus quia ſinguli L. N. P. R. S. T. sũt æquales inter ſe, ducere L. in C. & NP. in B. & RST. in A. idẽ eſt atque ducere L. in C. ſemel. & in B. bis & in A. ter. Igitur productis ex L. in C. ſemel in B. bis in A. ter, & ſic deinceps, ſi addatur ſumma omnium ABCD. fit V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Si ſint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, & numerus angulorum binario multatus ducatur in aggregatũ triangulorum à ſingulis relicto maximo, & producto addatur triangulus maximi, fiet aggregatum polygonorum à ſingulis.

V 40.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
L. 3.

Sint iidẽ qui ſupra ABCD. dico ſi L. ducatur in aggregatum triangulorum à ſingulis ABC. & producto addatur triangulus ipſius D. fieri V. aggregatũ polygonorum à ſingulis. Nam triangulus C. æquatur ſummæ ipſorum ABC. triangulus B æquatur ſummæ ipſorum AB. & triangulus A. æquatur ipſi A. ſumere autẽ ABC. tũ AB. tum A. idem eſt atq; ſumere C. ſemel B. bis A. ter, & ſic deinceps, ergo aggregatum triangulorum à ſingulis ABC. æquatur ipſi C. ſemel, & B. bis, & A. ter. Quare ducere L. in aggregatum illud triangulorum, idem eſt ac ducere L. in C. ſemel, in B. bis, in A. ter. At productis ex L. in C. ſemel in B. bis in A. ter, ſi addatur ſumma omnium ABCD. ſeu triangulus D. fit V. per præced. Igitur ſi & producto ex L. in aggregatum triangulorum à ſingulis ABC. addatur triangulus D. fiet idem V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem numerorum diſpoſiti, productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, adſcita ſumma numerorum, vel adſcito triangulo maximi, æquatur triplo ſimilium polygonorum à ſingulis.

M. 5. L. 4. k. 3. H. 2 G. 1.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. E. 5. F. 6.
N. 3.

Sint ABCDEF. numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, dico ſi polygonus maximi F. ducatur in numerum terminorum vnitate auctum & producto addatur ſumma ipſorum ABCDEF. ſeu quod idem eſt triangulus ipſius F. ſummã æquari triplo polygonorum ſimiliũ, à ſingulis. Sit enim N. numerus angulorum binario multatus, & ſuper ipſos ABCDE. diſponantur totidem illis æquales ordine inuerſo G. H. K. L. M. ita vt G. ſit vnitas. H. binarius k. ternarius & ſic deinceps. tũc patet ambos GE. æquari ipſi F. & ſimiliter ambos AM. ſed & ob medietatẽ arithmeticã sũma duorũ AE. æqualis eſt sũmæ duorũ BD. atq; etiã duplo ipſius C Igitur cùm ambo AE æquẽtur ipſi F. & sũma duorũ BD. ſit eadẽ quæ duorũ BL. & eadẽ quæ duorũ DH. & k. ſit æqualis ipſi C. patet ſingulas ſummas binorũ MA. LB. kC. HD. GE. æquari ipſi F. Quare ſi harũ ſummarũ polygoni ſumantur, & præterea polygonus ipſius F. bis, æquabuntur hi omnes polygoni ſimul producto ex polygono ipſius F. in numerum terminorum vnitate auctum. Itaq; cum polygonus ſummæ MA. per decimam huius ſit æqualis polygonis ipſorum M. & A. & plano ſub MA. ducto in N. Item polygonus ſummæ LB. ſit æqualis polygonis

K. &

L & B,& plano sub LB. ducto in N. Itē polygonus sūmæ KC sit æqualis polygonis K. & C.& plano sub KC. ducto in N. Itemq; polygoni summarū HD.GE. sint æquales polygonis ipsorum H. D G. E. & planis sub HD. GE. ductis in N. polygoni autem ipsorum G. H. k. L. M. sint æquales polygonis ipsorum ABCDE. si his addatur duplum polygoni F, sequitur duplum polygonorum à singulis ABCDEF. vna cum planis sub MA. sub LB. sub KC. sub AD. sub GE. ductis in N. æquari producto ex polygono ipsius F in numerum terminorum vnitate auctum. Quare si adiiciatur vtrimque summa omnium ABCDEF, erunt summæ vtrimque æquales. Quia vero G est vnitas H binarius. K ternarius & sic deinceps patet productum ex G in E æquari ipsi E & productum ex H in D æquari duplo D & productum ex K in C æquari C ter, & productum ex L in B æquari B quater & productū ex M in A æquari A quinquies & sic deinceps. Igitur ducere N. in omnia illa producta, idem est atque ducere N in E semel, in D bis, in C ter, in B quater, in A quinquies & sic deinceps. Quare per 15. huius qui fit ex N in omnia illa producta, adscita summa ipsorum ABCDEF æquatur polygonis à singulis. Quamobrem qui fit ex polygono F in numerum terminorum vnitate auctum adscita summa omnium, æquatur triplo polygonorum à singulis. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate secundū seriem naturalem numerum dispositi, productus ex duplo polygoni maximi, aucto latere eiusdem polygoni, in idem latus vnitate auctum, æquatur sextuplo similium polygonorum à singulis.

A1. B2. C3. D4. E5. F35. G70. H75. K6. M210. L450.

Sint ABCDE. ab vnitate secundū seriem naturalem dispositi, & maximi E polygonus esto F cuius duplum G. quo addito ad ipsum E fiat H quo ducto in K. vnitate maiorem ipso E fiat L dico L esse sextuplum similium polygonorum à singulis ABCDE. Etenim ex K in F fiat M. Patet ergo per præced. si ad M. addatur summa omnium ABCDE. fieri triplum polygonorum à singulis. Quia vero productus ex K in H nempe L æquatur productis ex K in G & in E ex quib. H componitur. Productus autem ex K in G est duplus ad M (quia G duplus est ipsius F) & productus ex K in E est duplus summæ omnium ABCDE. per 4. Diophanti. sequitur L continere duplum ipsius M & summæ omnium ABCDE, idest duplum tripli polygonorum à singulis. Igitur L est sextuplum huiusmodi polygonorum. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Ex his duab. propositionib. elicies canones ad inueniendum summam quotlibet polygonorum similium ab vnitate ordinate dispositorum.

CANON I.

Cape maximum polygonorum quem ducito in suum latus vnitate auctū, producto adde triangulū ipsius lateris, sūmæ triens erit aggregatū polygonorū per 17.

Vt si quaratur summa 5. pentagonorū ab vnitate cape pentagonū ipsius 5. nempe 35. quē ducito in 6. fit 210. cui adde triangulū ipsius 5. nempe 15. fiet 225. cuius triens 75. est quæsita summa.

CANON II.

Duplo maximi polygoni adde latus illius, summam ducito in idem latus vnitate auctum, producti sextans erit aggregatum polygonorum per 18.

X 40 V 40
A 1. B 2. C 3. D 4.
Q 1. R 3. S 3. T 3. M 1. N 3. P 3. K 1. L 3.
H 10. G 7. F 4. E 1.

ductis ex E. in D. ex KL. in C. ex MNP. in B. & ex QRST. in A. Quia vero ſinguli E. K. M. Q. æquātur vnitati, producta ex E. in D. ex K in C. ex M. in B. & ex Q. in A. ſimul æquantur ſummæ ipſorū ABCD. Rurſus quia ſinguli L. N. P. R. S. T. ſūt æquales inter ſe, ducere L. in C. & NP. in B. & RST. in A. idē eſt atque ducere L. in C. ſemel. & in B. bis & in A. ter. Igitur productis ex L. in C. ſemel in B. bis in A. ter, & ſic deinceps, ſi addatur ſumma omnium ABCD. fit V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Si ſint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, & numerus angulorum binario multatus ducatur in aggregatū triangulorum à ſingulis relicto maximo, & producto addatur triangulus maximi, fiet aggregatum polygonorum à ſingulis.

V 40.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
L. 3.

Sint iidē qui ſupra ABCD. dico ſi L. ducatur in aggregatum triangulorum à ſingulis ABC. & producto addatur triangulus ipſius D. fieri V. aggregatū polygonorum à ſingulis. Nam triangulus C. æquatur ſummæ ipſorum ABC. triangulus B æquatur ſummæ ipſorum AB. & triangulus A. æquatur ipſi A. ſumere autē ABC. tū AB. tum A. idem eſt atq; ſumere C. ſemel B. bis A. ter, & ſic deinceps, ergo aggregatum triangulorum à ſingulis ABC. æquatur ipſi C. ſemel, & B. bis, & A. ter. Quare ducere L. in aggregatum illud triangulorum, idem eſt ac ducere L. in C. ſemel, in B. bis, in A. ter. At productis ex L. in C. ſemel in B. bis in A. ter, ſi addatur ſumma omnium ABCD. ſeu triangulus D. fit V. per præced. Igitur ſi & producto ex L. in aggregatum triangulorum à ſingulis ABC. addatur triangulus D. fiet idem V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem numerorum diſpoſiti, productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, adſcita ſumma numerorum, vel adſcito triangulo maximi, æquatur triplo ſimilium polygonorum à ſingulis.

M. 5. L. 4. k. 3. H. 2 G. 1.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. E. 5. F. 6.
N. 3.

Sint ABCDEF. numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, dico ſi polygonus maximi F. ducatur in numerum terminorum vnitate auctum & producto addatur ſumma ipſorum ABCDEF. ſeu quod idem eſt triangulus ipſius F. ſummā æquari triplo polygonorum ſimiliū à ſingulis. Sit enim N. numerus angulorum binario multatus, & ſuper ipſos ABCDE. diſponantur totidem illis æquales ordine inuerſo G. H. K. L. M. ita vt G. ſit vnitas. H. binarius k. ternarius & ſic deinceps. tūc pater ambos GE. æquari ipſi F. & ſimiliter ambos AM. ſed & ob medietatē arithticā ſūma duorū AE. æqualis eſt ſūmæ duorū BD. atq; etiā duplo ipſius C. Igitur cùm ambo AE æquētur ipſi F. & ſūma duorū BD. ſit eadē quæ duorū BL. & eadē quæ duorū DH. & k. ſit æqualis ipſi C. patet ſingulas ſummas binorū MA. LB. kC. HD. GE. æquari ipſi F. Quare ſi harū ſummarū polygoni ſumantur, & præterea polygonus ipſius F. bis, æquabuntur hi omnes polygoni ſimul producto ex polygono ipſius F. in numerum terminorum vnitate auctum. Itaq; cum polygonus ſummæ MA. per decimam huius ſit æqualis polygonis ipſorum M. & A. & plano ſub MA. ducto in N. Item polygonus ſummæ LB. ſit æqualis polygonis

K. &

L & B, & plano sub LB. ducto in N. Itē polygonus sūmæ KC fit æqualis polygonis K. & C. & plano sub KC. ducto in N. Itemq; polygoni summarū HD. GE. sint æquales polygonis ipsorum H. D G. E. & planis sub HD. GE. ductis in N. polygoni autem ipsorum G. H. k. L. M. sint æquales polygonis ipsorum ABCDE. si his addatur duplum polygoni F, sequitur duplum polygonorum à singulis ABCDEF. vna cum planis sub MA. sub LB. sub KC. sub AD. sub GE. ductis in N. æquati producto ex polygono ipsius F in numerum terminorum vnitate auctum. Quare si adiiciatur vtrimque summa omnium ABCDEF. erunt summæ vtrimque æquales. Quia vero G est vnitas H binarius. K ternarius & sic deinceps patet productum ex G in E æquari ipsi E & productum ex H in D æquari duplo D & productum ex K in C æquari C ter, & productum ex L in B æquari B quater & productū ex M in A æquari A quinquies & sic deinceps. Igitur ducere N. in omnia illa producta, idem est atque ducere N in E semel, in D bis, in C ter, in B quater, in A quinquies & sic deinceps. Quare per 15. huius qui fit ex N in omnia illa producta, adscita summa ipsorum ABCDEF æquatur polygonis à singulis. Quamobrem qui fit ex polygono F in numerum terminorum vnitate auctum adscita summa omnium, æquatur triplo polygonorum à singulis. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate secundū seriem naturalem numerum dispositi, productus ex duplo polygoni maximi, aucto latere eiusdem polygoni, in idem latus vnitate auctum, æquatur sextuplo similium polygonorum à singulis.

A1. B2. C3. D4. E5. F35. G70. H75. K6. M210. L450.

Sint ABCDE. ab vnitate secundū seriem naturalem dispositi, & maximi E polygonus esto F euius duplum G. quo addito ad ipsum E fiat H quo ducto in K. vnitate maiorem ipso E fiat L dico L esse sextuplum similium polygonorum à singulis ABCDE. Etenim ex K in F fiat M. Patet ergo per præced. si ad M. addatur summa omnium ABCDE. fieri triplum polygonorum à singulis. Quia vero productus ex K in H nempe L æquatur productis ex K in G & in E ex quib. H componitur. Productus autem ex K in G est duplus ad M (quia G duplus est ipsius F) & productus ex K in E est duplus summæ omnium ABCDE. per 4. Diophanti. sequitur L continere duplum ipsius M & summæ omnium ABCDE, idest duplum tripli polygonorum à singulis. Igitur L est sextuplum huiusmodi polygonorum. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Ex his duab. propositionib. elicies canones ad inueniendum summam quotlibet polygonorum similium ab vnitate ordinate dispositorum.

CANON I.

Cape maximum polygonorum quem ducito in suum latus vnitate auctū, producto adde triangulū ipsius lateris, sūmæ triens erit aggregatū polygonorū per 17.

Vt si quæratur summa 5. pentagonorū ab vnitate cape pentagonū ipsius 5. nempe 35. quē ducito in 6. fit 210. cui adde triangulū ipsius 5. nempe 15. fiet 225. cuius triens 75. est quæsita summa.

CANON II.

Duplo maximi polygoni adde latus illius, summam ducito in idem latus vnitate auctum, producti sextans erit aggregatum polygonorum per 18.

Vt in dato exemplo duplo 35. nempe 70. adde 5. fit 75. quo ducto in 6. fit 450. cuius sextans 75. est quæsita summa.

Hac eadem regula habetur in excerptis nondum editis ex libro Apofroditi & Betrubi Rust Architectonis, quam tamen à nemine hactenus demonstratam vidi.

Quoniam vero regulæ generales de polygonis ad triangulos vtpote simpliciores applicatæ, sunt simpliciores & faciliores, fiet forte Canon facilior applicando 17. huius ad triangulos & implorando auxilium 16. hac arte.

3. CANON.

Cape triangulum maximi lateris vnitate multati, quem ducito in idem latus vnitate auctum, producti cape trientem, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, producto adde triangulum maximi lateris, fiet aggregatum polygonorum.

Vt si quæratur aggregatum 7. pentagonorum ab vnitate cape 21. triangulum ipsius 6. quem ducito in 8. fit 168. cuius triens 56. quo ducto in 3. fit 168. cui si addas 28. fit 196. aggregatum quæsitum.

Quoniam vero in hunc locum reiecimus explicationem vltimæ propositis Diophanti, cuius tractatio mutila est apud ipsum, eia promissi fide nos exoluamus, non quidem insistentes vestigijs Diophanti sed aliam prorsus amplectentes viam.

PROPOSITIO 19. PROBLEMA I.

Proposito quolibet numero, inuestigare quot modis polygonus dici possit.

Sit propositus numerus 120. Primo quidem constat ex definitione Diophanti, eum esse polygonum à latere 2 totque angulorum, quot ipse continet vnitates, & sic dicetur hecaconticosigonalis. Deinde inuenietur triangulus esse à latere 15. quia eius octuplum vnitate auctum, quadratum 961. efficit, cuius latus 31. vnde ablata vnitate superest 30. cuius semissis 15. est latus trigoni 120. vt constat ex Diophanto.

Denique vt sciamus an aliis modis idem 120. possit esse polygonus. Exponantur ab vnitate omnes in infinitum ordinarim numeri, puta 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. & illis subiiciantur ab vnitate triangulares omnes ordinate dispositi, puta 1. 3. 6 10. 15. 21. 28. vt factum vides in apposita tabella, quæ potest in infinitum extendi. Tum propositus numerus 120. diuidatur sigillatim per numeros triangulos, & obseruetur, quoties residuum ex diuisione æquale erit lateri proximo maioris trianguli, toties enim numerus 120. polygonus erit, cuius latus erit ipsum residuum diuisionis. At quotiens ostendet differentiam progressionis huiusmodi polygonorum constitutiuæ, seu quod idem est, idem quotiens binario auctus, numerum angulorum indicabit. Hac arte si diuidas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	620

120. per triangulum 3. ita vt residuum sit 3. fiet quotiens 39. indicans 120. esse polygonum angulorum 41. seu tessaracontahenagonalem, & residuum 3. latus illius denotat, ita si instituas progressionem trium terminorum quorum differentia sit 39. fient hi 1. 40. 79. & ex his polygoni angulorũ 41. formabũtur 1. 41. 120. Rursus si diuidas 120. per triangulum 28. ita vt residuum sit 8. fiet quotiens 4. indicans 120. esse hexagonum, at residuum 8. radicem illius designat. Ita si instituas progressionem octo terminorum quorum differentia sit 4. erunt hi 1. 5. 9. 13. 17 21. 25. 29. quorum summa vtique est 120. Quia vero 120. per nullum alium triangulum diuidi potest, ita vt residuum sit æquale lateri proxime maioris trianguli, ideo pronunciamus propositum eundem numerum, pluribus aliis modis esse non posse polygonum quàm quatuor; cùm sit vt ostensum est triangulus, hexagonus, tessaracontahenagonus, & hecacontaicosigonus. Huius rei demonstratio facilis est, quod vno exemplo fiet manifestum. Quia 28. diuidens 120. dat quotientem 4. & residuum 8. patet 120. æquari quadruplo ipsius 28. & numero 8. atqui per septimam huius triangulus 28. cum 8. (qui vnitate maior est quam latus ipsius) facit triangulum 36. proxime maiorem. igitur iungendo 28. semel cum residuo 8. semel, erit 120. æqualis triangulo 28. ter, & triangulo sequenti 36. semel quamobrem per demonstrata in scholio 11. huius 120. est polygonus collateralis ipsi 36. hoc est à latere 8 & habens tot angulos, quot triangulis ipse constat plus duobus hoc est 6. quod erat demonstrandum. Et euidens est si diuisio tentata sit per omnes triangulos, donec deuentum sit ad æqualem vel maiorem ipso 120. eundem 120. non posse esse polygonum aliter quam modis sic inuentis. etenim quomodocunque dicatur esse polygonus, oportebit per 11. huius vt componatur ex tot triangulis quot ipse angulos habet, minus duobus, quorum vnus erit illi collateralis, alii à latere vnitate minore. quare si collateralis triangulus resoluatur in suum latus, & in proxime minorem triangulum, quibus æquatur, iam propositus numerus continebit aliquoties minorem triangulum, & præterea latus maioris trianguli semel, & ideo propositus numerus ex demonstratis ostendetur esse polygonus vno inuentorum modorum, vel inferetur omnes diuisiones non esse tentatas. Quorum primum negabatur, alterum asserebatur. vnde manifesta sequitur contradictio. igitur ex omni parte proposito est satisfactum.

Aduerte autem compendii gratia, non omnino tentandam esse diuisionẽ donec peruenias ad triangulum æqualem vel maiorem proposito numero; sufficit enim si deuenias ad triangulum qui semel tantum in proposito numero contineatur; cùm enim ex huiusmodi diuisione quotiens non possit esse nisi 1. qui auctus binario efficit 3. numerum angulorum trianguli, patet per hanc diuisionem propositum numerum non posse esse nisi triangulum, si forte triangulus per quem fit diuisio, cum latere sequentis iunctus, efficiat ipsum sequentem triangulum. Quare cùm per regulam Diophanti iam expertus sis an propositus numerus sit triangulus, superfluum erit id amplius inquirere. sic in data hypothesi numeri 120. cum perueneris ad triangulum 66. qui semel tantum continetur in 120. iam desistere poteris ab examine, cum per id nil amplius tibi possit innotescere nisi 120. esse triangulum, cùm diuides scilicet eum per triangulum 105. sed id iam tibi constat.

Rursus si propositus numerus sit par, frustra tentabitur diuisio per triangulum parem cum latus sequentis est impar, quia enim cuiuslibet trianguli paris multiplex quilibet est par, eo detracto à proposito numero pari, impossibile est relinqui imparem vt cõstat ex Euclide. Hac de causa proposito numero 120. frustra tentabitur diuisio per triangulos 10. & 36. quia latera sequentium, sunt 5. & 9. impares numeri.

Eadem de cauſa ſi propoſitus numerus ſit impar, fruſtra tentabitur diuiſio per triangulum parem quando ſequentis latus eſt etiam par. etenim trianguli paris multiplex quilibet, par eſt, quo detracto à numero propoſito impari, impoſſibile eſt reſiduum eſſe par. Itaque in hoc caſu non tentabitur diuiſio per triangulos 6. 28. 66. quia latera ſequentium ſunt 4. 8. 12. numeri pares. & ſic de aliis.

Denique poſſunt & alia compendia obſeruari, quib. iam prouecta diuiſione, antequam penitus abſoluatur, dignoſci poſſit an vtilis ſit futura necne, quæ ſtudioſo lectori indaganda relinquo.

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI APPENDICIS AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS.

LIBER SECVNDVS.

Actum est superiore libro de progressione polygonorum, quorum latera secundum seriem naturalem numerorum ab vnitate disposita sunt. Hoc vero agemus de illorum progressione quotum latera reperiuntur in qualibet medietate arithmetica continua, cuius differentia æquatur minimo termino. Et primum quidem insignes aliquot huius medietatis proprietates persequemur. deinde peculiares de quadratorum progressione trademus regulas, tum generales de omnibus polygonis. demum singularia quædam de cubis deque eorum progressione proferemus.

PROPOSITIO PRIMA.

In medietate arithmetica, in qua differentia minimo termino est æqualis, productus ex numero terminorum in minimum, æquatur maximo.

A2. B4. C6. D8. Sint in medietate arithmetica ABCD. & differentia
E2. F4. progressionis sit E. æqualis ipsi A. & sit F. numerus terminorum, dico productum ex A. in F. æquari maximo D. etenim [a] B. continet A semel & differentiam E. semel, at C. continet A semel & differentiam E bis, ac denique D. continet A semel & differentiam E. ter, & sic deinceps. Quare cum E. sit æqualis ipsi A patet B continere A bis, C. ter, D quater, & sic deinceps quilibet sequentium continet minimum toties quot sunt à minimo vsque ad ipsum inclusiuè numeri terminorum. quamobrem D. continet A secundum vnitates ipsius F. ac proinde ducto A. in F. producitur D. quod demonstrandum erat.

COROLLRAIVM.

Hinc patet secundum à minimo continere minimum bis, tertium ter, quartum quater, & sic deinceps quotus quisq; est in serie progressionis, toties continet minimum.

PROPOSITIO SECVNDA.

In hac progressione, productus ex numero terminorum vnitate multato in maximum, duplus est summæ reliquorum.

A2. B4. C6. D8. E10. Sint in hac progressione ABCDE. sitque G. numerus
G5. H4. terminorum & H. vnitate minor. dico productum ex H in E. duplum esse summæ reliquorum ABCD. quia enim H. est numerus terminorum ABCD. productus ex H. in summam extremorum AD. æquatur duplo summæ ipsorum ABCD. per quartam Diophanti. at summa extremorum AD. æquatur ipsi E. quandoquidem A. æqualis est differentiæ. Igitur ex H. in E. fit duplum summæ antecedentium ABCD, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO TERTIA.

In hac progressione Quadratus maximi æquatur producto ex numero terminorum in planum sub extremis.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. K. 20. G. 5. Sint numeri qui suprà, & planus sub extremis esto K. dico quadratum maximi E. æquari producto ex G. in K. Etenim ex A. in G. fit ipse E. Quare sumendo tres numeros A. G. E. idem producetur numerus ducendo A. in E. & productum K. in G. qui fiet ducendo A in G. & productum E. in E. hoc est quadratus ipsius E. Quare patet propositum.

a 1. huius. b 3. 1. porif.

COROLLARIVM.

Quadratus maximi æquatur producto ex quolibet extremo, in planum sub numero terminorum, & altero extremo.

Eadem enim ratione ostendetur quadratum ex E. æquari producto ex A. in planum sub G. & E. vel producto ex E. in planum sub G. & A.

PROPOSITIO QVARTA.

In hac progressione, quadratus maximi æquatur producto ex minimo in compositum ex maximo & summa reliquorum dupla.

L. 50. M. 40. A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. G. 5. H. 4. Sint numeri qui suprà, & duplum summæ ipsorum ABCD. esto M. dico quadratum ipsius E. æquari producto ex A. in aggregatũ ipsorũ M E. fit enim H. vnitate deficiens a G. & ducto G. in E. fiat L. Quia igitur a ex H. in E. fit M. & ex G. in eundem E. fit L. cùm G. H. differant vnitate patet L. æquari vtrique M. E. simul. At ex A. in L. fit. quadratus ipsius E. per corollarium præcedentis. Igitur ex A. in vtrumque M E. simul, fit idẽ quadratus. Quod erat ostendendum.

a 2. huius.

COROLLARIVM

In progressione quæ ab vnitate incipit, quadratus maximi æquatur duplo summæ antecedentium adsumente ipsum maximum.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. E. 5. Etenim si ponatur A. vnitas, & differentia etiam progressionis vnitas, erit per hanc quartam propositionem quadratus E. æqualis producto ex A. in E. & in duplum ipsorum ABCD. Quia ergo A. est vnitas quæ non mutat numeros quos multiplicat, patet quadratum E. æquari ipsi E. & duplo summæ ipsorum ABCD. quod erat propositum.

PROPOSITIO QVINTA.

In hac progressione aggregatum quadratorum à singulis, æquatur productis ex minimo in maximum semel, & in secundum ab illo ter, & in tertium quinquies, & in quartum septies, & sic continue per numeros impares ascendendo.

A 2.B 4.C 6.D 8.E 10.

Sint in hac progressione numeri ABCDE. dico aggregatum quadratorum à singulis æquari productis ex A in E semel, in D. ter, in C. quinquies in B. septies, in A. nouies, & sic deinceps per numeros impares ascendendo. Etenim per præcedentem quadratus ex E. æquatur producto ex A. in E. semel, & in reliquos bis. Rursus quadratus ex D. æquatur producto ex A, in D. semel, & in antecedentes bis. Quare quadrati ex E. & D. æquantur productis ex A in E semel, in D. ter, & in reliquos quater. At rursus quadratus ex C. æquatur producto ex A. in C. semel, & in antecedentes bis. Igitur quadrati ex EDC. æquantur productis ex A. in E. semel, in D ter, in C. quinquies, & in reliquos sexies. Rursus denique quadratus ex B. æquatur producto ex A. in B. semel, & in A. bis. Igitur qradrati ex EDCB. æquantur productis ex A. in E. semel, in D. ter, in C. quinquies, in B. septies, & in A. octies. quare addito quadrato ex A. fiunt quadrati omnium ABCDE. æquales productis ex A. in E. semel, in D. ter, in C. quinquies, in B. septies, in A. nouies. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO SEXTA

In hac progressione, qui fit ex numero terminorum in summam extremorum, æquatur producto ex numero terminorum vnitate aucto in maximum.

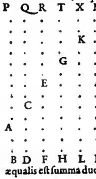
K 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
G 5. H 6.

Sint numeri qui prius, & sit numerus terminorum G. cui addendo vnitatem, fiat H. & sit summa extremorum K. dico ex K. in G. eundem produci numerum qui ex E. in H. etenim [a] E. continet A. secundum vnitates numeri G. quare cùm addito A. ad E. fiat K. ac proinde K. contineat A. semel amplius quàm E. patet K. continere A. secundum numerum H. qui vnitate superat G. quamobrem cùm ex eodem A. in H. & in G. fiant K. & E. [b] erit K. ad E. sicut H. ad G. ac proinde [c] ex K. in G. producetur numerus æqualis producto ex E. in H. quod erat demonstrandum.

[a] 1. huius.
[b] 17. 7.
[c] 19. 7.

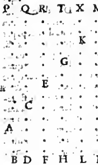
PROPOSITIO SEPTIMA.

In hac progressione, productus ex numero terminorum vnitate aucto in quadratum maximi, vnâ cum producto ex minimo in summam omnium, æquatur triplo aggregati quadratorum à singulis.



Hæc est decima propositio archimedis de lineis spiralibus, quæ sic ostenditur. Sint in hac progressione AB.CD.EF.GH.KL.MN. dico quadratum ex MN. sumptum secundum vnitates numeri terminorũ vnitate aucti, vna cum producto ex AB. in summam omnium æquati triplo summæ quadratorum à singulis. Etenim adiiciatur ipsi KL. numerus XK. æqualis ipsi AB. ipsi quoque GH. addatur TG. æqualis ipsi CD. & ipsi EF. addatur RE. eidem EF. æqualis. At ipsi CD. addatur QC. æqualis ipsi GH. & demum ipsi AB. addatur PA. æqualis ipsi kL. Tunc patet totos PB. QD. TH. XL. æquales esse ipsi MN. Quia enim AB. est æqualis differentiæ, eo addito ad KL. & ad PA fiunt XL. PB. qui singuli æquantur ipsi MN. [d] sed ob medietatem arithmeticam summæ duorum AB. KL. æqualis est summa duorum CD. GH. itemq; duplum ipsius EF. igitur constat

[d] 6. primi potism.



& totos QD.RF.TH. æquales eſſe ſingulos ſingulis PB.XL. ſeu ipſi MN. quamobtem ſi ſumaotur quadrati ipſotum PB.QD.RF.TH.XL.MN. & adhuc ſemel quadratus ipſius MN. ſumetur vtique quadratus MN. ſecundum vnitates numeri terminorum voitate aucti. Oſtendendum ergo. hos quadraros, vna cũ producto ex AB. in ſũmã omniũ AB.CD.EF.GH.KL. MN. efficere triplum quadratorũ à ſingulis. Itaq; [a] quadratus ex PB. æquatur quadratis ex PA & AB & plaoo bis ſub PA.AB. contento. Itẽ quadratus ex QD. æquatur quadratis ex QC.CD. & plano bis ſub QC.CD. cõtento. Et ſimiliter quadrati reliquorum æquantur quadratis partium, & plano bis ſub partibus contento. at quadrati ex AB.CD.EF.GH.KL. æquales ſunt quadratis ex XK.TG.RE.QC.PA. quate ſi his addas duplum quadrati MN. patet iam haberi duplum quadratorum à ſingulis. Reſtat ergo probandum dupla planorum ſub partibus contentorum, voa cũ producto ex AB. in AB.CD. EF. GH. KL. MN. æquari adhuc ſummæ quadratorum à ſingulis. Quoniam itaque quod fit bis ex XK. in KL. æquator ei quod fit bis ex AB in KL. at quod fit bis ex TG. in GH. æquatur ei quod fit quater ex AB. in GH. [b] quia TG duplus eſt ipſius AB. ſimiliter quod fit bis ex RE. in EF. æquatur ei quod fit ſexies ex AB. in EF. quia RE tripl⁹ eſt ipſius AB. & eadẽ de cauſa quæ bis ſub aliis partibus contineotur, æquantur producto ex AB. in alios numeros, ſecundum numeros pares continenter aſceodendo multiplicatos, omnia vtique plana illa ſimul ſumpta cum producto ex AB. in omnes AB. CD. EF. GH. KL. MN. æquabuntur productis ex AB. in MN. ſemel, in KL. ter, in GH. quinquies, in EF. ſepties, & ſic per numeros impares aſcendendo. His autem productis æquantur quadrati à ſingulis per quiotam huius. ergo conſtat propoſitum.

a 4. ſecundi

b coroll. 1. huius.

PROPOSITIO OCTAVA.

In hac progreſſione productus ex maximo in ſummam extremorum, æquatur producto ex minimo in duplum ſummæ omnium.

F 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
G 5. H 6.

Sint in hac progreſſiooe ABCDE. & ſit ſumma extremorum F. Dico productum ex E in F. æquari producto ex A in duplum ſummæ omnium. eteoim cùm F. componatur ex duobus A. & E. productus ex E. in F. æquatur quadrato ipſius E. & producto ex A. in E. at [c] quadratus ex E. æquatur producto ex A. in E. ſemel, & in aorecedentes bis, igitur addito producto ex A. in E. patet productum ex E. in F. æquari producto ex A. in duplum ſummæ omnium. quod demonſtraodum erat.

c 4. huius.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur euidenter productum ex minimo in ſummam omnium æquari producto ex maximo in ſemiſſem ſummæ extremorum, vel producto ex ſumma extremorum in ſemiſſem maximi.

PROPOSITIO NONA.

In hac progreſſione productus ex numero terminorum in quadratum ſummæ extremorum, æquatur producto ex eodem numero terminorum vnitate aucto, in quadratum maximi, vna cum producto ex minimo in duplum ſummæ omnium.

Sint numeri qui supra, & sit G numerus terminorum, & vnitate maior sit H dico productum ex G in quadratum ipsius F æquari productis ex H in quadratum E & ex A in duplum summæ omnium. etenim [a] quadratus F æquatur quadratis partium AE. & duplo plani sub A & E. quare productus ex G. in quadratum F æquatur productis ex G in quadratos AE. & in duplum plani sub A E. & loco producti ex G in planum sub AE semel, sumendo [b] illi æqualem quadratum ipsius E, erit productus ex G in quadratum F æqualis productis ex G in planum sub AE & in quadratos AE. & ipsi quadrato E. quia vero H superat G vnitate, productus ex H in quadratum E æquatur producto ex G in quadratum E & ipsi quadrato E. Igitur productus ex G in quadratum F æquatur productis ex G in planum sub AE. & in quadratum A. & ex H in quadratum E. atqui cum F æquetur ipsis AE. [c] planus sub AE. cum quadrato A æquatur producto ex F in A ac proinde producti ex G in planum sub AE. & in quadratum A æquantur producto ex G. in planum sub FA. igitur productus ex G in quadratum F æquatur productis ex G. in planum sub FA. & ex H. in quadratum E. quia vero sumptis tribus numeris F.A.G. [d] fit idem numerus si F ducatur in A & productus in G qui fit si G ducatur in F & productus, [e] nempe duplum summæ omnium, ducatur in A patet productum ex G in quadratum F æquari productis ex H in quadratum F & ex A in duplum summæ omnium. Quod erat demonstrandum.

[a] quarta 2.
[b] 3. huius.
[c] tertia 2.
[d] tertia 2. porism.
[e] 4. Diophanti.

COROLLARIVM

Ex hac & ex præcedente collige tres numeros æquales esse, nimirum.
Productũ ex numero terminorũ, in planũ sub minimo, & sub sũma extremorũ.
Productum ex minimo in duplum summæ omnium.
Productum ex maximo in summam extremorum.

PROPOSITIO DECIMA.

In hac progressione productus ex minimo in duplum summæ omnium, æquatur quadrato maximi, & plano sub extremis.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10. Sint numeri qui supra. dico quadratum maximi E cum plano sub AE. æquari producto ex A. in duplum summæ omnium. etenim quadratus E. [f] æquatur producto ex A in ipsos ABCD. bis, & in E semel, quare si eidem quadrato addatur rursus productus ex A. in E semel, erit vtique quadratus E cum plano sub AE. æqualis producto ex A. in omnes ABCDE. bis. quod erat ostendendum.

[f] 4. huius.

COROLLARIVM.

Hinc rursus collige quadratum maximi cum plano sub extremis, æquari cuilibet trium illorum productorum, de quibus in corollario præcedentis.

PROPOSITIO VNDEDECIMA.

In hac progressione productus ex duplo numeri terminorum ternario aucto in quadratum maximi, vna cum plano sub extremis, æquatur sextuplo aggregati quadratorum à singulis.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10. K 13. H 6. G 5. Sint numeri qui prius, & ſit G numerus terminorum, & H vnitate maior, & K. duplum ipſius G ternario auctum. dico productum ex k in quadratum ipſius E cum plano ſub A E. æquari ſextuplo quadratorum à ſingulis. etenim quia H ſuperat G. vnitate, duplum ipſius H ſuperat binario duplum ipſius G ac proinde cum k ſuperet ternario duplum ipſius G idem K ſuperat vnitate duplum ipſius H.
a 7. huius. Itaque quia triplum quadratorum à ſingulis, ᵃ æquatur productis ex H in quadratum E & ex A. in ſummam omnium, vtique ſextuplum quadratorum à ſin-
b 10. huius. gulis æquatur productis ex duplo H in quadratum E & ex A in duplum ſummæ omnium; at productus ex A. in duplum ſummæ omnium, ᵇ æquatur quadrato E & plano ſub A E. igitur ſextuplum quadratorum à ſingulis, æquatur producto ex duplo H in quadratum E, ipſi quadrato E & plano ſub A E. quia vero K. ſuperat vnitate duplum H vt oſtenſum eſt, patet productum ex k in quadratum E æquari producto ex duplo H in quadratum E & ipſi quadrato E. igitur ſextuplum quadratorum à ſingulis, æquatur producto ex K in quadratum E & plano ſub A E. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Quia E multiplex eſt ad A ſecundum ipſum G per primam huius, patet ducto A in E produci partem quadrati ipſius E denominatam a G quare ſi ipſi K addatur pars vnitatis ab ipſo G denominata, & ſumma ducatur in quadratum E fiet ſextuplum aggregati quadratorum à ſingulis, vt euidens eſt.

PROPOSITIO DVODECIMA.

In hac progreſſione productus ex numero terminorum in planum ſub maximo, & ſub ſumma extremorum, æquatur producto ex numero terminorum vnitate aucto, in quadratum maximi.

F 12. A 2. B 4. C 6. D 8. E 10. H 6. G 5. Sint numeri qui ſupra, & ſumma extremorum eſto F dico productum ex G in planum ſub F E. æquari producto ex H in quadratum ipſius E. etenim quia F ex
c tertia 2. ipſis A E componitur planus ſub F E ᶜ æquatur quadrato ipſius E & plano ſub A E. Quare productus ex G in planum ſub F E æqua-
d 3. huius. tur productis ex G in quadratum E & in planum ſub A E. ſed productus ex G in planum ſub A E. ᵈ æquatur quadrato ipſius E. Igitur productus ex G in planum ſub F E. æquatur producto ex G in quadratum E & ipſi quadrato E hoc eſt producto ex H in quadratum E. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

In hac progreſſione producti ex numero terminorum in quadratum ſummæ extremorum, & in planum ſub ſumma extremorum, & ſub maximo comprehenſum, æquatur ſextuplo quadratorum à ſingulis.

F 12. A 2. B 4. C 6. D 8. E 10. H 6. G 5. Sint numeri qui prius. Dico productos ex G in quadratum F & in planum ſub F E contentum, æquari ſextuplo quadratorum à ſingulis. Nam productus ex G in quadra-
e 9. huius. tum F ᵉ æquatur productis ex H in quadratum E & ex A
f 12. huius. in duplum ſummæ omnium. At productus ex G in planum ſub F E ᶠ æquatur producto ex H in quadratum E. Igitur producti ex G in quadratum F & in pla-

numſub FE. æquantur producti ex H. in quadratum E. bis, & ex A in ſummam omnium bis. Verum producti ex H in quadratum E & ex A in ſummam omnium,[a] æquantur triplo quadratorum à ſingulis. Igitur iidem producti bis, ſeu illis æquales producti ex G in quadratum F & in planum ſub FE. æquantur ſextuplo quadratorum à ſingulis. Quod demonſtrandum fuit. a 7. huius.

PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

In hac progreſſione, eſt vt minimus ad maximum, ita quadratus ſummæ extremorum, cum plano ſub eadem ſumma & ſub maximo comprehenſo, ad ſextuplum aggregati quadratorum à ſingulis.

Sint numeri qui ſupra, dico eſſe A ad E, ſicut quadratum F cum plano ſub FE. ad ſextuplum quadratorum à ſingulis Nam[b] cùm ex A in G fiat E, eſt A ad E vt vnitas ad G. ſed etiam[c] quia ex G in quadratum F & in planum ſub FE. fit ſextuplum quadratorum à ſingulis, eſt vnitas ad G, ſicut quadratus F cum plano ſub FE. ad ſextuplum quadratorum à ſingulis. Ergo eſt A ad E ſicut quadratus F cum plano ſub FE. ad ſextuplum quadratorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat. b 1. huius c 13. huius

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

In hac progreſſione, productus ex maximo in dimidium numeri terminorum vnitate aucti, vel ex numero terminorum vnitate aucto in dimidium maximi, æquatur ſummæ omnium.

Sint numeri qui prius. Dico productum ex E in ſemiſſem ipſius H vel ex H in dimidium E æquari ſummæ omnium. Etenim productus ex G in F æquatur duplo ſummæ omnium per 4. Diophanti. at producto ex G in F.[d] æquatur productus ex H in E. Igitur cùm ex H in E fiat duplum ſummæ omnium, ſane ex E in dimidium H, vel ex H in dimidium E fiet ipſa ſumma omnium. Quod erat oſtendendum. d 6. huius.

SCHOLIVM.

Semper autem continget vel E vel H. parem eſſe, & alterutrius dimidium poſſe ſumi ſine fractione; nam vel G. par eſt, vel impar; ſi G ſit par[e] cum eo ducto in A fiat E. erit & E par. ſi autem G ſit impar, ſane qui eum ſuperat vnitate, puta H par erit. e 1. huius.

Cæterum ex multis harum propoſitionum eliciuntur regulæ ad inueniendam ſummam quadratorum à quotlibet numeris in hac progreſſione diſpoſitis.

PRIMA.

Ducito numerum terminorum vnitate auctum in quadratum maximi, & producto adde quod fit ex minimo in ſummam omnium, compoſiti triens erit ſumma quadratorum.

Conſtat per ſeptimam huius. ſic ducendo 6. in 100. fit 600. cui addendo productum ex 2. in 30. nempe 60. fit 660. cuius triens 220. eſt ſumma quadratorum.

SECVNDA.

Ducito numerum terminorum in planum ſub maximo, & ſub ſumma extreorum, & producto adde quod ſit ex minimo in ſummam omnium, compoſiti
trm *iens erit ſumma quadratorum.*

Conſtat per duodecimam adiuuante ſeptima: ſic ducendo 5. in 120. (qui ſit ex 10. in 12.) ſit 600, cui reddendo 60. vt prius, ſit 660. cuius triens eſt 220. vt ſupra.

TERTIA.

Ducito numerum terminorum in quadratum ſummæ extremorum, à producto aufer quod ſit ex minimo in ſummam omnium, reſidui triens erit ſumma quadratorum.

Conſtat per nonam adiuuante ſeptima, ſic ducto 5. in 144. quadratum ipſius 12. ſit 720. vnde ſi auferas 60. reſtat 660. cuius triens eſt 220. vt prius.

Porro ſicut tribus modis, huius regulæ prima pars variata eſt in tribus hiſce præceptis: ita & totidem modis variari poteſt ſecunda. Nam loco producti ex minimo in ſummam omnium ſumi poteſt productus ex minimo in planum ſub maximo & ſub dimidio numeri terminorum vnitate aucti per decimam-quintam, vel productus ex maximo in dimidium ſummæ extremorum per corollarium octauæ.

QVARTA.

Ducito duplum numeri terminorum ternario auctum in quadratum maximi, producto adde planum ſub extremis, compoſiti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per vndecimam: ſic ducendo 13. in 100. ſit 1300. cui addendo 20. ſit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt prius.

QVINTA.

Ducito quadratum maximi in duplum numeri terminorum auctum ternario, & parte vnitatis à numero terminorum denominata, producti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per corollarium vndecimæ ſic ducendo 100. in 13$\frac{1}{3}$. ſit 1320. cuius ſextus eſt 220. vt ſupra.

SEXTA.

Ducito numerum terminorum in aggregatum ex quadrato ſummæ extremorum, & ex plano ſub maximo & ſub ſumma extremorum contento, producti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per decimam-tertiam: ſic ducendo 5. in aggregatum ex 144. & ex 120. nempe in 264. ſit 2640. quo diuiſo per 2. ſit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt prius.

SEPTIMA.

SEPTIMA.

Ducito maximum in aggregatum ex quadrato summæ extremorum, & ex plano sub maximo & sub summa extremorum, productum diuide per minimũ, quotientis sextans erit summa quadratorum.

Constat per decimamquartam indagando quartum proportionalem, tribus cognitis. Sic ducendo 10. *in* 264. *fit* 2640. *quo diuiso per* 2. *fit* 1320. *cuius sextans est* 220. *vt ante.*

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

In hac progressione: Octuplum plani sub minimo, & sub summa omnium adscito minimi quadraro, æquatur quadrato compositi ex minimo, & duplo maximi.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
F. 30.

Sint numeri qui prius, & sit summa omnium F. Dico octuplum plani ex A. in F. adsumpto quadrato ipsius A. æquari quadrato compositi ex A. & duplo ipsius E. Etenim [a] productus bis ex A. in F. æquatur quadrato E. cum plano sub AE. Quare octuplum producti ex A. in F. æquatur quadruplo quadrati E. & quadruplo plani sub AE. Proinde si addatur vtrimque quadratus A. vtique octuplum plani sub AF. cum quadrato A. æquabitur quadrato E. quater, plano sub AE. quater, & quadrato A. semel. Atqui quadruplum quadrati E. æquatur quadrato dupli ipsius E. & quadruplum plani sub AE. æquatur duplo plani sub A. & sub duplo ipsius E. Rursus autem [b] quadrati ex A. & ex duplo ipsius E. cum duplo plani sub A, & sub duplo ipsius E. æquantur quadrato compositi ex A. & ex duplo E. Igitur hic quadratus æquatur octuplo plani sub AF. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. huius. [b] 4. secundi.

SCHOLIVM.

Hinc rursus demonstratur quod ait Diophantus quæst. 44. *lib.* 4. *Itemque Plutarcus quæstione Platonica quarta nimirum* Πᾶς τρίγωνος ἀριθμὸς ὀκτάκις γενόμενος καὶ μονάδα προσλαβὼν, γίνεται τετράγωνος. *vt euidens est si A. ponatur vnitas, & differentia progressionis vnitas. Tunc enim F. erit triangulus ex definitione. Etenim cum vnitas non mutet numerum quem multiplicat, & quadratus vnitatis sit ipsa vnitas patet octuplum producti ex A. in F. fore octuplum ipsius F. cui addendo quadratum ipsius A. puta vnitatem fiet quadratus, cuius latus æquabitur duplo ipsius* E. *& vnitati. Itaque hanc eandem propositionem iam tripliciter demonstrauimus. Primò ad quadragesimam quartam* 4. *peculiari demonstratione. Secundo hîc vniuersalius, prout hæc proprietas conuenit omni progressioni arithmeticæ, cuius minimus terminus æqualis est differentiæ. Tertio vniuersalissime, ad octauam Diophanti de numeris multangulis, proprietatem hanc omni in vniuersum progressioni arithmeticæ applicantes vi theorematis* 5. *eorum quæ ad sextam demonstrauimus.*

A1. B2. C3. D4. E5.
F 15.

Hæc ergo dixisse sufficiat de progressione quadratorum, quorum latera in hac progressione sunt ordinata. Agemus iam de omnium polygonorum in vniuersum progressione.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si numerus secetur in duas partes, tum in tres, tum in quatuor, tum in quinque; & sic deinceps, & quælibet pars vnius sectionis comparetur, cuilibet ex aliis partibus eiusdem sectionis, continget hanc cõparationẽ in prima sectione fieri semel, in secunda ter, in tertia sexies, in quarta decies, & sic continue per numeros triangulos ascendendo

A......C......B Secetur AB in duas partes AC. CB. & ſecetur DG. in tres
D....E....F....G DE.EF.FG. & ſecetur HN in quatuor Hk. kL. LM.MN.
H...k...L...M...N & ſic deinceps, & comparetur quælibet pars vnius ſectionis cuilibet ex aliis eiuſdem ſectionis, dico in ſectione numeri AB hanc comparationem fieri ſemel. in ſectione DG, fieri ter, in ſectione HN. fieri ſexies, & ſic continue per numeros triangulos aſcendendo.

Primo enim in ſectione AB, patet AC tantum comparari poſſe ipſi CB. vnde conſtat propoſitum.

Secundo in ſectione DG. quia DE comparari poteſt ſingulis EF. FG. & ipſæ EF. FG. rurſus inter ſe ſemel comparantur, patet tres hic fieri comparationes. Quod erat intentum.

Tertio in ſectione HN quia Hk comparari poteſt ſigillatim, tribus reliquis, vnde tres oriuntur comparationes, & rurſus tres reliquæ per proxime demonſtrata, ter inter ſe comparantur. Patet hic in vniuerſum ſex fieri comparationes. quod erat propoſitum.

Denique ſi numerus ſecetur in quinque partes, cùm prima pars comparari poſſit quatuor reliquis, & quatuor reliquæ per iam demonſtrata ſexies inter ſe comparentur, fient omnino decem comparationes. Et ſic in infinitum ſi adiiciatur ſemper vna diuiſio, numerus comparationum æquabitur triangulo præcedentium comparationum adſciſcenti ſuum latus vnitate auctum, vnde fiet triangulus proxime maior ex definitione triangulorum. Quamobrem ex omni parte patet propoſitum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA

In hac progreſſione ſi polygonus quilibet minimi ducatur in triangulum numeri terminorum, & producto addatur ſolidus contentus ſub quadrato minimi, ſub numero angulorum, binario multato, & ſub ſumma totidem triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi numeri vno minus, fiet ſumma ſimilium polygonorum à ſingulis.

			L 2.	
		G2.	M2.	
	E2.	H2.	N2.	
	F2.	K 2.	O2.	
A 2.	B 4.	C 6.	D 8.	
P7.	Q10.	R 4.	T5.	V10.
	X70.	Y200.		

Sint in hac progreſſione ABCD. & ſit P quilibet polygonus minimi, puta heptagonus. ſitque Q triangulus numeri terminorum, quo ducto in P. fiat X. ſitque R quadratus ipſius A. & T numerus angulorum binario multatus, & V ſumma totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi BCD. & ſolidus ſub ipſis RTV. eſto Y dico aggregatum duorum XY. æquari ſummæ ſimilium polygonorum, puta heptagonorum à ſingulis ABCD. Quia [a] enim A continetur in B bis, in C ter, in D quater, reſoluantur BCD in numeros æquales ipſi A, puta B in EF. At C in GHK. ac demum D in LMNO. Itaque per ſcholium 10. primi polygonus B. æquatur polygonis ipſorum EF. & producto ex E in F ſeu quadrato R ducto in T. ſimiliter polygonus C. æquatur polygonis GHK. & productis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, ſeu totidem quadratis R ductis in T. denique polygonus D. æquatur polygonis ipſorũ LMNO. & productis ex quolibet in quelibet ex aliis, ſeu totidem R ductis in T. quamobrem ſi his omnibus polygonis & productis addatur polygonus ipſius A, patet polygonos à ſingulis A B C D. continere

[a] coroll. 1. huius.

polygonum ipsius A. seu ipsum P. semel, bis, ter, quater, & sic deinceps, id est, secundum vnitates trianguli Q. & prætera ipsum R. ductum in T. semel, ter, sexies & sic deinceps secundum triangulos ab vnitate, id est, secundum vnitates ipsius V. per præcedentem. Quamobrem polygoni à singulis ABCD. æquantur producto ex Q. in P. seu ipsi X. adsciscenti solidum sub R. T. V. nempe ipsum Y. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO DECIMA NONA.

In hac progressione aggregatum productorum ex minimo in maximum semel, in secundum ab illo bis, in tertium ter, in quartum quater, & sic deinceps, æquatur producto ex quadrato minimi in summam totidem triangulorum ab vnitate, quot sunt ipsi numeri.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.
N. 4. M. 3. L. 2. k. 1.
E. 1. F. 2. G. 3. H. 4.
O. 4. P. 6. Q. 6. R. 4.

Sint in hac progressione ABCD. Dico si A. ducatur in D. semel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, & sic deinceps, aggregatum productorum, æquari producto ex A. in summam totidem triangulorum ab vnitate. Etenim sumantur totidem numeri ab vnitate secundum seriem naturalem dispositi E. F. G. H. quibus superponantur totidem illis æquales ordine inuerso, puta KLMN. & ex k. in H. fiat R. ex L. in G. fiat Q. ex M. in F. fiat P. ex N. in E. fiat O. [a] Patet A. contineri in A. secundum E. in B. secundum F. in C. secundum Q. in D. secundum H. Quare cùm K. sit vnitas, si A. ducatur semel in D. productus continebit quadratum ipsius A. toties, quoties productus ex k. in H. puta R. continet vnitatem. Similiter quia L. est binarius, si A ducatur bis in C. productus continebit quadratum A. toties quoties productus ex L. in G. puta Q. continet vnitatē. Eodē argumento probabitur productū ex A. in B. ter toties continere quadratum A. quoties P. continet vnitatem, & rursus productum ex A. in A. quater toties contiuere quadratum A. quoties O. continet vnitatem. Quamobrem producti omnes ex A. in D. semel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, toties continent quadratum A. quot sunt vnitates in summa ipsorum OPQR. sed summa ipsorum OPQR. [b] æquatur summæ triangulorum ab ipsis E. F. G. H. Igitur producti omnes ex A. in D. semel, in C. bis, in B. ter, in A. quater toties continent quadratum A. quot sunt vnitates in sūma totidem triangulorum ab vnitate. Quod demonstrandum erat.

[a] Coroll. 1. huius.
[b] 14. 1 appē.

PROPOSITIO VIGESIMA.

In hac progressione, si numerus terminorum vnitate auctus, ducatur in polygonum maximi, & à producto auferatur solidus contentus sub quadrato minimi, sub numero angulorum binario multato, & sub summa totidem triangulorum ab vnitate, quot sunt ipsi numeri vno minus, residuum æquatur duplo polygonorum à singulis.

K. 8. H. 6. G. 4. F. 2.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L. 3.

Sint in hac progressione ABCDE. & numerus angulorum binario multatus esto L. Dico si numerus terminorum vnitate auctus ducatur in poligonum ipsius E. & à producto auferatur solidus contentus sub quadrato A. numero L. & summa totidē triangulorū ab vnitate, quot sunt ipsi ABCD. residuū æquari duplo poligonorū à singulis ABCDE. Etenim superponātur ipsis totidē illis æquales ordine inuerso FGHK. Tunc ex demonstratione septimæ huius patet binos AK. BH. CG. DF. æquari sigillatim ipsi E. quare si sumantur

polygoni harum summarum, & præterea polygonus ipsius E. bis, horum aggregatum æquabitur producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum ipsius E. Atqui polygoni summæ binorum AK. BH. CG. DF. [a] æquantur polygonis omnium omnium AK. BH. CG. DF. seu duplo polygonorum à singulis ABCD. & præterea productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F. ductis in L. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E. æquatur duplo polygonorum à singulis A B C D E. & productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F ductis in L. sed hi producti ([b] quandoquidem A cõtinetur in F semel, in G bis, in H ter, in K quater) æquantur productis ex A in D semel, in C bis, in B ter in A quater, ac proinde per præcedentem iidem producti æquantur producto ex quadrato A in summam tot triãgulorum ab vnitate quot sunt ipsi ABCD. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E æquatur duplo polygonorum à singulis, & producto ex quadrato A in summam tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi ABCD. ducto in L. quare si solidus sub quadrato A numero L, & summa tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi ABCD. auferatur à producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E, residuum erit duplum polygonorum à singulis ABCDE. quod demonstrare oportuit.

a 10. 1. app.

b coroll. 1. huius.

K.8. H.6. G.4. F.2.
A.2. B.4. C.6. D.8. E.10.
L.3.

PROPOSITIO VIGESIMAPRIMA.

In hac progressione, qui fit ex polygono minimi in triangulum numeri terminorum, adscito producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, æquatur triplo polygonorum à singulis.

A2. B4. C6. D8.
E50. F460.
K120.

Sint in hac progressione ABCD. & qui fit ex polygono minimi A in triangulum numeri terminorum esto E. qui fit autem ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi esto F dico aggregatum duorum EF. æquari triplo polygonorum à singulis. etenim sumatur K solidus sub quadrato A, sub numero angulorum binario multato, & sub summa tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi ABC. igitur per 18 ambo EK. simul æquantur summæ polygonorum à singulis ABCD. sed per præcedentem, detracto K ex F. manet duplum polygonorum à singulis. Igitur si ad F multatum numero K concipiamus addi ipsos EK nempe summam polygonorum à singulis; fiet vtique summa ipsorum EF. æqualis triplo polygonorum à singulis. quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO VIGESIMASECVNDA.

In hac progressione si productus ex polygono minimi in numerum terminorum; adsciscat duplum polygoni maximi, & aggregatum ducatur in numerum terminorum vnitate auctum, fiet sextuplum polygonorum à singulis.

A2. B4. C6. D8.
E3. F4. G5. H12.
K60. L36. M72.
N360. O420. P84.

Sint in hac progressione ABCD. & polygonus minimus esto E, numerus vero terminorum F, & illo vnitate maior esto G: ductoque E in F. fiat H. Maximi vero polygonus esto L cuius duplum M quo addito ad H fiat P. ductoque P in G fiat O dico O esse sextuplum polygonorum à singulis. etenim ducto G in ipsos H. M. fiant kN. cùm ergo ex eodem G in P. summam eorundem HM. factus sit O. erit O æqualis ambobus kN. Quia vero ex E in F fit H & ex H in G. fit k, est K solidus sub tribus EFG. proinde [a] idem K, fiet ducto F in G. & producto in E, sed ex F. in G fit duplum trianguli ipsius F per octauam Diophanti. Ergo K fit ducto E in duplum trianguli F. similiter N factus est ex G in M duplum polygoni L. ergo sũma duorum KN seu O componitur ex ductu E in duplum trianguli ex F, & ex ductu G in duplum polygoni ex D. sed horum semissis, nempe productus ex E in triangulum ex F vna cum producto ex G in polygonum ex D. æquatur triplo polygonorum à singulis per præcedentem. Igitur O æquatur sextuplo eorundem polygonorum. Quod ostendendum susceperam. [a 3.1. porif.]

SCHOLIVM.

Ex his duabus propositionibus duo elici possunt Canones ad inueniendum summam quotlibet similium polygonorum, quorum latera in hac progressione disponantur. sed quia ipsi Canones ab ipsis propositionibus non differunt, illos adscribere superuacaneum duxi. Itaque hactenus de polygonorum progressione dictum esto: Restat vt agamus de cuborum progressione, sed prius tres insignes illorum proprietates demonstrabimus, quæ ad illorum progressionem aliquatenus spectant.

PROPOSITIO VIGESIMATERTIA.

Si disponantur omnes numeri impares ab vnitate, ex illorum ordinata & continua additione, quadrati omnes procreabuntur.

Putabit forte quispiam nos huic propositioni supersedere debuisse, quandoquidem ex polygonorum definitione quadratis applicatã, hoc ipsum manifestum fit. Verum quoniam antiqua definitio quadratorum ab Euclide priscisque omnibus, & ab ipso Diophanto libro primo arithmeticorum tradita, diuersa est, quatenus definiuntur quadrati, numeri qui fiunt ex alio quopiam in seipsum multiplicato, operæpretium visum est, ostendere vtramque definitionem iisdem numeris conuenire, ne vlla supersit hac de re dubitatio: Etenim posset aliquis iure ambigere, an quadratus cui conuenit polygoni definitio, & qui fit ex imparium aggregatione, idem sit qui producitur latere in seipsum ducto, quandoquidem neque triangulus, neque pentagonus, nec hexagonus, neque alius quispiam polygonus præter solum quadratum, respondet figuræ geometricæ angulorum & laterum æqualium, eiusdemque nominis:

A1. B3. C5. D7.
L2. M4. N6.
F1. G2. H3.

Sint ab vnitate impares ABCD. dico ex eorum ordinata aggregatione fieri omnes quadratos. etenim cùm vnitas A sit primus quadratus, dico summam duorum AB esse secundum quadratum seu quadratum binarii, & summam trium ABC. esse quadratum ternarii, & summam quatuor numerorum ABCD esse quadratum quaternarii, & sic in infinitum. sumantur numeri ab vnitate secundum seriem naturalem, FGH. & sint eorum dupli LMN. patet igitur ipsos LMN. esse numeros pares ordinate dispositos, ac proinde si singulis addatur vnitas, fierit omnes impares, hoc est L cum vnitate æquatur ipsi B. at M cum vnitate æquatur ipsi C, ac demum N cum vnitate æquatur ipsi D & sic deinceps. Itaque [b] quoniam si quadrato vnitatis F. hoc est ipsi vnitati A addatur duplum [b 18.2. porif.]

lateris illius & præterea vnitas, fit quadratus proximè maior, hoc eſt quadratus binarii, cum L ſit duplus ipſius F & B excedat L vnitate, patet addito B ad vnitatem A fieri quadratum binarii. Rurſus quia quadrato binarii G addendo duplum ipſius G & vnitatem, hoc eſt numerum C fit quadratus ternarii, cum A G. ſimul faciant quadratum binarii vt oſtenſum eſt, facient tres ABC. ſimul quadratum ternarii. Et eodem argumento oſtendetur quatuor ABCD, æquari quadrato quaternarii, & ſic in infinitum. Igitur conſtat propoſitum.

COROLLARIVM.

Patet ergo quemlibet quadratum tot imparibus conſtare, quot vnitates continet latus quadrati.

PROPOSITIO VIGESIMAQVARTA.

In progreſſione arithmetica ab vnitate incipiente, & per vnitatem creſcente, cubus maximi æquatur quadrato maximi, & producto ex maximo in duplum antecedentium.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 12.

Sit vnitas A & quotlibet numeri deinceps BCD. per vnitatis augmentum creſcentes, ſitque E duplum ipſorum ABC. Dico cubum maximi D. æquari quadrato ipſius D & producto ex D in E. etenim productus ex D. in E cum quadrato ipſius D.[a] æquatur producto ex DE. ſimul in D. at ED. ſimul æquantur quadrato ipſius D per corollarium 4. huius. Igitur productus ex E in D, cum quadrato ex D æquatur producto ex quadrato ipſius D in D, hoc eſt cubo ipſius D. Quod erat oſtendendum.

[a] tertia 2.

PROPOSITIO VIGESIMAQVINTA.

Quotlibet cuborum ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſitorum ſumma quadratus eſt, cuius latus componitur ex cuborum ipſorum lateribus ſimul additis.

Sint quotlibet numeri ab vnitate ABCD, ſecundum ſeriem numerorum, quorum cubi ſint EFGH. Dico ſummam duorum EF. Itemque trium EFG. itemque quatuor EFGH. eſſe quadratum, cuius latus eſt ſumma duorum AB. vel trium ABC. vel quatuor ABCD.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 1. F 8. G 27. H 64.

Primò enim quadratus ſummæ duorum AB,[b] æquatur quadratis ipſorum A & B & duplo producti ex A in B. At quadratus vnitatis A æquatur cubo ipſius vnitatis E. quadratus autem ex B cum duplo producti ex B in A æquatur cubo F per præcedentem. Igitur quadratus ſummæ duorum AB. æquatur cubis EF. ſimul. quod erat propoſitum. Deinde quadratus ſummæ trium ABC. æquatur quadrato ſummæ duorum AB. & quadrato ipſius C. & duplo producti ex AB ſimul in C. ſed quadrato ſummæ duorum AB. æquantur cubi EF per demonſtrata; quadrato autem ipſius C cum duplo producti ex AB. ſimul in C æquatur cubus G per præcedentem. Igitur quadratus ſummæ trium ABC, æquatur cubis EFG. ſimul. Denique eodem argumento quadratus ſummæ omnium ABCD. æquatur quadrato ſummæ trium ABC, hoc eſt cubis EFG. & quadrato ipſius D cum duplo producti ex D. in ſummam trium ABC. hoc eſt cubo H. per præced. Igitur quadratus ſummæ ipſorum ABCD. æquatur cubis EFGH ſimul. Quod erat demonſtrandum. eademque eſt demonſtrationis ratio in pluribus, vt patet. quamobrem abundè conſtat propoſitum.

[b] quarta 2.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur ſummam quotlibet cuborum ab vnitate, facere quadratum cuius latus, eſt numerus triangulus, quia enim ABCD. eſt progreſſio naturalis numerorum ab vnitate, patet ex definitione triangulorum, tam AB. ſimul, quàm ABC, vel ABCD, conficere triangulum. eſt autem trianguli latus, ipſe cuborum numerus, vt etiam perſpicuum eſt.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Quadratus quilibet adſumpto ſuo latere, duplum facit collateralis trianguli.

A 16. Eſto quilibet quadratus A cuius latus BC. dico ſi BC addatur ad A
B....C.D fieri duplum trianguli à latere BC. etenim ipſi BC. addatur vnitas CD. igitur ex BC in BD. fiet duplum trianguli ex BC. per 8. Diophanti. ſed productus ex BC in BD æquatur quadrato ex BC hoc eſt ipſi A, & producto ex BC in CD, hoc eſt ipſi BC, cum CD ſit vnitas. Ergo duplum trianguli ex BC, æquatur quadrato A cum ſuo latere BC. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIGESIMASEPTIMA.

Vnitas primum cubum; duo ſequentes impares coniuncti, ſecundum cubum; tres ſequentes tertium cubum; quatuor ſuccedentes, quartum, ſemperque vno plures ſequentem deinceps in infinitum cubum aggregati impares conſtituunt.

A 1. Diſponantur ab vnitate A. numeri impares BCDEFGHKL. Dico quod BC. ſimul ſecundum ab vnitate cubum faciunt, at DEF. faciũt
B 3. | R 8. tertium cubum. ac demum GHKL. quartum cubum conſtituunt, &
C 5. ſic deinceps. ſit enim R. ſumma duorum BC. & ſic T. ſumma trium
D 7. DEF. ſitque V. ſumma ipſorum quatuor GHKL. etenim quoniam
E 9. | T 27. ABCDEFGHKL. ſunt impares ordinate diſpoſiti ab vnitate, eorum
F 11. ſumma, ſeu ſumma ipſorum ARTV. [a] eſt quadratus, cuius latus tot
conſtat vnitatibus, quot ſunt numeri ABCDEFGHKL. Quoniam [a 23. huius]
G 13. vero ex ipſis vnus ſumitur, tum duo, tum tres, tũ quatuor, patet numerum
H 15. numerorum eſſe triangulum, cuius latus tot continet vnitates,
K 17. | V 64. quot fiunt propoſitorum numerorum ſumptiones, hoc eſt, quot ſunt
L 19. ipſi ARTV. Cum itaque ſumma ipſorum ARTV. ſit quadratus cuius latus eſt triangulum, [b] erit eadem ſumma, aggregatum totidem cuborum [b corolla. 23 huius.] ab vnitate quot ſunt vnitates in latere trianguli, hoc eſt quod ſunt ipſi ARTV, puta quatuor cuborum. ſimili prorſus argumento oſtendemus aggregatum ipſorum ART. eſſe ſummam trium cuborum ab vnitate. Quare relinquetur V. eſſe quartum cubum. eademque ratione oſtendemus AR. ſimul eſſe ſummam duorum cuborum ab vnitate, ac proinde relinquetur T tertius cubus, eritque R ſecundus, cùm A ſit vnitas. Quare patet propoſitum.

SCHOLIVM.

Eadem fere ratione demõſtratur hac propoſitio à Franciſco Maurolyco, prop. 62. arithmeticorũ.

PROPOSITIO VIGESIMAOCTAVA

Cubus quilibet adsumpto sextuplo trianguli collateralis vnitate aucto facit cubum proxime maiorem.

A.27.B.36.C.64.
D.3. E. 6. F. 4.

Sit cubus A cuius latus D & ab eodem latere triangulus esto E. cuius sextuplum B. additoque B. vnitate aucto ad A. fiat C. dico C. esse cubum proxime maiorem. Sumatur F. su-
a 20. 2. por. perans vnitate ipsum D. Igitur cubus ex F. [a] æqualis est cubo ipsius D. & vnitati, & triplo tum quadrati ipsius D. tum ipsius D. At quadratus ipsius D. cum
b 26. huius. suo latere [b] æquatur duplo trianguli E. Quare triplum quadrati ex D. cum triplo ipsius D. æquatur sextuplo ipsius E. hoc est ipsi B. Igitur ad cubum ipsius D. hoc est ad A. addendo B. & vnitatem, qui fit puta C. est cubus ipsius F. Quod demonstrandum erat.

c 11. 2. pori. Aliter interuallum cuborum ab ipsis DF. [c] æquatur cubo interualli, hoc est vnitati, & triplo producti ex D. in F. At ex D. in F. fit duplum trianguli E. per octauam Diophanti, ac proinde triplum producti ex D. in F. æquatur sextuplo ipsius E. hoc est ipsi B. Igitur interuallum cuborum ab ipsis DF. æquatur ipsi B. & vnitari. Quod erat propositum.

PROPOSITIO VIGESIMANONA.

In progressione arithmetica, in qua minimus terminus æquatur differentiæ, productus ex minimo in quadratum numeri terminorum, æquatur producto ex maximo in numerum terminorum.

A.2.B.4.C.6.D.8.E.10.
F. 5.

Sint in hac progressione ABCDE, & sit numerus ter-
d 1. huius. minorum F. dico productum ex A. in quadratum ipsius F. æquari producto ex E. in F. Quia enim [d] ex A. in F. fit E. vtique productus ex F. in E. erit solidus contentus sub tribus nu-
e 31. pori. meris A. F. F. Quare [e] idem solidus fiet si F. ducatur in F. & productus hoc est quadratus ipsius F, ducatur in A. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO TRIGESIMA.

In hac progressione, productus ex minimo in triangulum numeri terminorum, æquatur summæ omnium.

A.2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
F. 5. G. 30.

Sint numeri qui prius, & sit summa omnium G. dico G æquari producto ex A. in triangulum ipsius F. Etenim ducto F. in summam extremorum, hoc est in ipsos A. E. fit duplum ipsius G. per quartam diophanti. At productus ex F. in E. æquatur producto ex quadrato ipsius F. in A. per præcedentem igitur duplum ipsius G. æquatur productis ex A. in F. & ex A. in quadratum
f 26. huius. F. hoc est producto ex A. in F. auctum suo quadrato. Quare [f] cùm F. cum suo quadrato sit duplus trianguli ex F. erit duplum ipsius G. æquale producto ex A. in duplum trianguli ex F. ac proinde ipse G. æquabitur producto ex A. in triangulum ipsius F. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO TRIGESIMAPRIMA.

In hac progressione, productus ex cubo minimi in quadratum trianguli numeri terminorum, æquatur aggregato cuborum à singulis.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
F. 8. N. 15.
G. 1. H. 2. k. 3. L. 4. M. 5.
P. 225.

Sint in hac progressione ABCDE. & ipsius A. cubus esto F. sumanturque totidem ab vnitate continue dispositi numeri GHKLM. quorum summa N. patet ergo N. esse triangulum numeri terminorum. Quare sit eius quadratus P. dico productum ex F. in P. æquari aggregato cuborum à singulis ABCDE. Quia enim sicut [a] A. continetur in B. bis, in C. ter, in D. quater, in E. quinquies, sic etiam G. continetur in H. bis, in K. ter, in L. quater in M. quinquies, pater ipsos ABCDE esse in iisdem rationibus, in quibus & ipsi GHKLM. Quamobrem & cubi illorum sunt in iisdem rationibus, in quibus & cubi istorum. cùm sit ergo cubus A ad cubum G, sicut cubus B ad cubum H, & cubus C ad cubum K, & cubus D ad cubum L, & cubus E ad cubum M. erunt & omnes antecedentes hoc est aggregatum cuborum à singulis ABCDE. ad consequentes simul, hoc est ad aggregatum cuborum à singulis GHKLM. sicut F ad cubum ipsius G hoc est ad vnitatem. sed aggregatum cuborum à singulis GHKLM. æquatur ipsi P. per 25. huius. ergo est aggregatum cuborum à singulis ABCDE. ad P. sicut F ad vnitarem, proinde ex definitione multiplicationis, ducto F in P. fiet aggregatum cuborum à singulis ABCDE. Quod erat demonstrandum. a 1. huius.

PROPOSITIO TRIGESIMASECVNDA.

In hac progressione productus ex minimo in quadratum summæ omnium æquatur aggregato cuborum à singulis.

H4. K8. F30. G900.
A2. B4. C6. D8. E10.
L225. M15.

Sint in hac progressione ABCDE. quorum summa F cuius quadratus G. dico ex A in G. produci aggregatum cuborum à singulis. Sit enim H. quadratus ipsius A & K cubus eiusdem. sitque M triangulus numeri terminorum, cuius quadratus L. Itaque [b] quoniam ex A in M producitur F est F medius proportionalis inter quadratos ipsorum AM hoc est inter H & L. per 7. Diophanti. quamobrem ex H in L producitur G quadratus ipsius F. Quamobrem [c] cum ex eodem H in A & in L. producantur K & G est A ad L vt K ad G. [d] ac proinde ex A in G fiet idem numerus, qui ex K in L sed ex K in L fit aggregatum cuborum à singulis per præcedentem. Igitur & ex A in G. fit idem aggregatum cuborum. quod erat ostendendum. b 30. huius. c 17. 7. d 19. 7.

PROPOSITIO TRIGESIMATERTIA.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, & quilibet extremorũ ducatur in quadratũ alteri⁹ extremi; quilibet autẽ mediorũ ducatur in quadratũ alterius medii, fiẽt quatuor solidi in eadẽ ratione proportionales.

E4. F16. G9. H36.
A2. B4. C3. D6.
K12.
L24. M48. N36. P72.

Sit A ad B, vt C ad D. & sint ipsorum ABCD. quadrati EFGH. ductoque D in E fiat L. & ex A in H fiat P. & rursus ducto C in F fiat M. & ex B in G fiat N. dico esse L ad M. & N ad P. sicut A ad B vel C ad D. sumatur K planus sub mediis BC. vel sub extremis AD. Quia ergo L fit ducto A in A, & producto E in D. [e] idem L fiet ducto A in D, & producto K in A. similiter quia M. fit ducto B in B & producto F in C fiet idem M. ducto B in C & producto K in B. quare cum eodem K ducto in A & in B fiat e 13. 1. partic.

a 17.7. LM. [a] erit L ad M vt A ad B. eodem argumento ostendemus ex eodem K in C & in D produci N & P ac proinde esse N ad P. vt C ad D. igitur vt A ad B vel C ad D. sic est L ad M. & N ad P. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO TRIGESIMAQVARTA.

In hac progressione, est vt minimus ad maximum, ita solidus sub maximo, & sub quadrato summæ extremorum, ad quadruplum aggregati cuborum à singulis.

F12. L5. Sint in hac progressione ABCDE. & summa extremorũ A2. B4. C6. D8. E10. F. dico esse A ad E. sicut solidus sub E & quadrato ipsius H30. K60. F ad quadruplum aggregati cuborum à singulis. sumatur
b 1 huius. H summa omnium cuius duplum sit K & sit numerus terminorum L. quia ergo
c 17.7. ducto L in F fit K per 4 Diophanti, [b] at ducto eodem L in A. fit E [c] erit A ad E. sicut F ad K. quare per præcedentem erit A ad E sicut productus ex E in quadratum ipsius F. ad productum ex A in quadratum ipsius K sed productus ex A in
d 32. huius. quadratum ipsius H [d] æquatur aggregato cuborum à singulis, & quadratus ipsius K quadruplus est quadrati sui semissis H. ac proinde productus ex A in quadratum ex K quadruplus est aggregati cuborum à singulis. Igitur est A ad E. sicut productus ex E in quadratum ipsius F ad quadruplum aggregati cuborum à singulis. quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Ex aliquibus harum propositionum licebit faciles elicere regulas ad inueniendam summam quotlibet cuborum, quorum latera sint in hac progressione disposita.

PRIMA REGVLA.

Sume triangulum numeri terminorum, & eius quadratum ducito in cubum minimi, fiet aggregatum cuborum à singulis.

Constat per 31. vt si sint 5. numeri, & sit minimus 2. sume triangulum ipsius 5. puta 15. & eius quadratum 225. ducito in 8. cubum ipsius 2. fit aggregatum cuborum à singulis 1800.

SECVNDA.

Ducito minimũ in quadratum summæ omniũ, fiet aggregatum cuborũ à singulis.

Constat per 32. sic in dato supra exemplo. ducito 2 in 900 quadratum summæ omnium 30. fit aggregatum cuborum à singulis 1800. vt prius.

TERTIA.

Ducito quadratum maximi in quadratum summæ extremorum, productum diuide per quadruplum minimi, orietur aggregatum cuborum à singulis.

Facile infertur ex 34. sic in dato exemplo ducito 100. quadratum maximi, in 144 quadratum summæ extremorum, fit 14400. quem diuide per quadruplum minimi 2. puta per 8. fit 1800. aggregatum cuborum vt ante.

QVARTA.

Ducito maximum in semissem summæ extremorum, vel summã extremorũ in semissem maximi, producti quadratum diuide per minimum, orietur aggregatum cuborum à singulis.

Rursus infertur ex 34. vel etiam ex præcedente regula. sic ducendo 10. in 6. vel 12. in 5. fit 60. cuius quadratus 3600. quo diuiso per minimum 2. fit aggregatum cuborum à singulis. vt supra 1800.

Errata

IN LIBRIS PORISMATVM.

Pag. 1. *lin.* 13. ratio AF *lege* ratio AE. *pag.* 2. *lin.* 3. productus ex AF *lege* productus ex A in F. *ibid. lin.* 41. duobus G *lege* duobus C. *pag.* 9. *lin.* 9. quadratis pat *lege* quadratis partium. *pag.* 10. *lin.* 10. sub AC.GB. *lege* sub AC.CB.

IN LIBRIS ARITHMETICORVM.

Pag. 9. *lin.* 6. similiter $\frac{1}{4}$ Q *lege* similiter $\frac{1}{4}$ Q. *pag.* 16. *lin.* 27. 30. -- 3 N *lege* 30. -- 1N. *pag.* 17. *lin.* 22. secundus *lege* secandus *pag.* 36. *lin.* 12. duo quolibet *lege* duo quilibet. *pag.* 36. *lin.* 19. D 30. *lege* D 20. *pag.* 44. *lin.* 18. satutum *lege* statutum. *ibid. lin. vltima* δοθέντα *lege* δοθέν. *pag.* 47. *lin.* 12. habentur *lege* habeatur. *pag.* 51. *lin.* 38. summum efficere *lege* summam efficere. *pag.* 53. *lin.* 44. quid septima *lege* quod septima. *pag.* 59. *lin.* 14. vel animæ *lege* vel adime. *pag.* 60. *lin.* 30. ipsi numerus *lege* ipse numerus. *pag.* 61. *lin.* 4. fit 286. *lege* fit 289. *ibid. lin.* 8. quadratum semissis summæ quadratorum aufer à quadrato *lege* A quadrato semissis summæ quadratorum , aufer quadratum. *pag.* 66. *lin.* 1. per Canonem primam, vel vigesimam *lege* per Canonem primæ huius, vel per vigesimam. *pag.* 67. *lin.* 6. 1N — 5 & 1N + 5 *lege* 1N -- 2 & 1N + 2. *pag.* 68. *lin.* 19. interuallo numerorum *lege* interuallo quadratorum. *pag.* 81. *lin.* 34. diuiso A & B *lege* diuiso A per B. *pag.* 89. *lin.* 10. latum vnum *lege* latus vnum. *pag.* 91. *lin.* 37. cũ signo — *lege* cum signo +. *pag.* 94. *lin.* 1 $\frac{1}{2}$ *lege* 11 $\frac{1}{2}$ *pag.* 97. *lin.* 9. niti primæ *lege* niti quintæ. *pag.* 105. *lin.* 30. 1Q + 20 $\frac{1}{4}$ *lege* 1Q + 9N + 20 $\frac{1}{4}$. *pag.* 107. *lin.* 11. 6 & $\frac{1}{3}$ *lege* 6 & $\frac{1}{3}$ N. *pag.* 111. *lin.* 44 Hoc animaduerlo *lege* Hoc animaduerso. *pag.* 117. *lin.* 3. 275. *lege* 27. *pag.* 123. *lin.* 40. æquales quadrati *lege* æquales quadratis. *pag.* 145. *lin.* 16. Canonem decimam sextam *lege* Canonem decimæ sextæ. *pag.* 161. *lin.* 29. latus in ipsius *lege* latus ipsius. *pag.* 171. *lin.* 5. quadratum summam *lege* quadratum summæ. *pag.* 179. *lin.* 35. laterum fictiorum *lege* laterũ fictitiorum. *pag.* 183. *lin.* 40. eundem nimirum *lege* eundem numerum. *pag.* 194. *lin.* 18. At proinde *lege* Ac proinde. *ibid.* minore *lege* minores. *pag.* 195. *lin.* 21. N 16. *lege* N 26. *pag.* 214. *lin.* 43. addendo vnitatum *lege* Addendo vnitatem. *pag.* 215. *lin.* 47. 1N + 6 + $_{1N}$ *lege* 1N + 6 + $\frac{1}{1N}$. *pag.* 221. *lin.* 32. facit quadratus *lege* facit quadratos. *pag.* 234. *lin.* 16. cuius quadratus *lege* cuius quadrans. *pag.* 241. *lin.* 10. considerari *lege* consideranti. *pag.* 242. *lin.* 28. cum laterum *lege* cum summa laterum. *pag.* 243. *lin* 35. 1. primi *lege* 1. secundi. *pag.* 264. *lin.* 38. pro valor *lege* pro valore. *pag.* 272. *lin* 3. tertium denique $_{1Q}$ *lege* tertium denique $\frac{2}{1Q}$. *pag.* 280. *lin.* 6. numeri autem vnitatem *lege* numeri autem vnitatum. *pag.* 286. *lin.* 9. interuallum statim *lege* interuallum statui. *pag* 294. *lin.* 8. vnitatem *lege* vnitate. *pag.* 298. *lin.* 10. ex 4 in 9. *lege* ex 4. in 16. *ibid. lin.* 24. summa siue detracta *lege* summa siue addita, siue detracta. *pag.* 299. *lin.* 19. à duobus *lege* à duabus. *pag.* 307. *lin.* 25. numerorum additiorum *lege* numerorum adtitiorum. *pag.* 308. *lin.* 4. quadrati quæsiti $\frac{81}{32}$ *lege* quadrati quæsiti $\frac{81}{32}$. *ibid. lin.* 54. fiat vtrumque *lege* fiat vtrimque. *pag.* 309. *lin.* 2. inuenio hinc $\frac{42}{14}$ *lege* inuenio hinc $\frac{42}{74}$. *pag.* 319. *lin.* 4. minor sit quàm 10. *lege* minor est quàm 10. *pag.* 333. *lin.* 43. vt 16. per 9. *lege* vt 9. per 16. *pag.* 364. *lin.* 40. superest per quem *lege* superest 5. per quem. *pag.* 366. *lin.* 34. secundi talenta *lege* secundus talenta. *pag.* 369. *lin.* 28. quotum summa $\frac{17}{3}$ *lege* quorum summa $\frac{17}{11}$. *pag.* 379. *lin.* 18.

1Q $\frac{144}{Q}$ *lege* 1Q — $\frac{144}{1Q}$. *pag.* 380. *lin.* 16. à latere 1N — $\frac{1}{1N}$ *lege* à latere 1N — $\frac{1}{1N}$. *ibid. lin.* 28. datum numerum 9. *lege* datum numerum 6. *pag.* 381. *lin.* 5. latus esto $\frac{10}{1N}$ + 5. *lege* latus esto $\frac{1}{1N}$ + 5. *pag.* 390. *lin.* 48 qui ducto *lege* quo ducto. *pag.* 405. *lin.* 28. præductum latus *lege* prædictum latus. *pag.* 407. *lin.* 43. fit rationalis *lege* sit rationalis. *pag.* 410. *lin.* 1. ablato vtrumque *lege* ablato vtrimque. *pag.* 415. *lin.* 37. esse rationem *lege* esse rationalem. *pag.* 416. *lin.* 37. cuius quadratis *lege* cuius quadratus. *pag.* 419. *lin.* 7. vnde erit 1N $\frac{1}{1x}$ *lege* vnde erit 1N $\frac{1}{17}$. *pag.* 420. *lin.* 36. sumus minima *lege* sumas minima. *pag.* 421. *lin.* 5. sit 1N. *lege* fit 1N. *pag.* 431. *lin.* 33. simul addantur, ad maiorem *lege* simul addantur, reducantur ad maiorem. *pag.* 444. *lin.* 44. 10. R 50. *lege* 10. — R 50.

In libro de numeris multangulis.

Pag. 9. *lin.* 3. si ergo selemus *lege* si ergo secemus. *pag.* 14. *lin.* 1. G. 3. *lege* G. 1. *ibidem linea* 18. esse H. *lege* esto H. *ibidem linea* 49. vnitate differant *lege* vnitate differant. *pag.* 30. *lin.* 35. residerium *lege* residuum. *pag.* 37. *lin.* 20. numerum *lege* numerorum. *pag.* 39. *lin.* 33. componendii *lege* compendii.

Quædam alia minutiora errata lectoris iudicio relinquimus emendanda.